REPERTORIUM
DER HÖHEREN MATHEMATIK

ZWEITE VÖLLIG UMGEARBEITETE AUFLAGE DER DEUTSCHEN AUSGABE, UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER MATHEMATIKER

HERAUSGEGEBEN VON

H. E. TIMERDING

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN BRAUNSCHWEIG

ZWEITER BAND: GEOMETRIE

ZWEITE HÄLFTE

RAUMGEOMETRIE

MIT 12 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER
1922

Vorwort.

Nach langen Hemmungen wird durch den vorliegenden Band der geometrische Teil der deutschen Bearbeitung von Pascals Repertorium der Mathematik zum Abschluß gebracht. Die Verzögerung ist namentlich dadurch entstanden, daß der Bearbeiter, der die Flächentheorie übernommen hatte, durch dringende andere literarische Arbeiten und Dienstgeschäfte gehindert, jahrelang mit seinem Beitrag im Rückstand blieb, bis er schließlich erklärte auf die Mitarbeiterschaft verzichten zu müssen. In dankenswerter Weise sprang jetzt Herr Salkowski hilfsbereit ein und erledigte die schwierige Aufgabe in überraschend kurzer Zeit, indem er dadurch die lange in Gefahr schwebende Beendigung des Werkes sicherte. Daß zwischen der Abfassung der ersten und der letzten Kapitel infolge der auseinandergesetzten unglücklichen Umstände eine ziemlich bedeutende Zeitspanne liegt, ist zu bedauern, die geometrische Forschung hat aber in den letzten Jahren keine so entscheidenden Wandlungen durchgemacht, daß der Inhalt zum Teil als veraltet angesehen werden müßte. Im Gegenteil kann immer noch das Werk in seiner Gesamtheit beanspruchen, eine Darstellung der geometrischen Wissenschaft nach ihrem gegenwärtigen Stande zu geben. Es ist dabei zu berücksichtigen, daß eine erschöpfende Vollständigkeit bei dem zur Verfügung stehenden, verhältnismäßig knappen Raum nicht erstrebt werden konnte und auch nicht erstrebt zu werden brauchte, denn das Werk ist nicht so sehr für den Forscher bestimmt, der für seine eigenen Untersuchungen den Anschluß an die vorhandene Literatur sucht, als vielmehr für alle diejenigen, die einen Überblick über den Gesamtbereich der geometrischen Wissenschaft zu erlangen streben. Allerdings wird man nicht bloß auf den einzelnen Gebieten Lücken finden, man wird auch wichtige Teile der Geometrie gänzlich vermissen. Dahin gehören z. B. die Dreiecksgeometrie, die Kugelgeometrie, die differentielle Liniengeometrie und die Theorie der Berührungstransformationen, also Gebiete, die unbedingt Berücksichtigung verlangt hätten und die bloß deswegen

weggeblieben sind, weil der Umfang nicht weiter erhöht werden konnte. Grundsätzlich ist die Geometrie in Räumen von mehr als drei Dimensionen ausgeschieden worden, weil es unmöglich war, hierfür eine irgendwie brauchbare Darstellung in solcher Kürze, wie sie notwendig gewesen wäre, zu geben. Es schien besser, die mehrdimensionale Geometrie einem besonderen Bande vorzubehalten, um so mehr, als die Entwicklung der Relativitätstheorie eine gründliche Behandlung gerade dieses Gebietes als geboten erscheinen läßt. Man möge sich daher begnügen, die gängigsten Disziplinen, die auch in den Universitätsvorlesungen gewöhnlich behandelt werden, in dem vorliegenden Handbuche vereinigt zu finden.

Der ersten Auflage war ein ausführliches doppeltes Register beigegeben, das viel Beifall gefunden hat. Leider war hierin bei der Neubearbeitung doch eine Abänderung notwendig. Der Stoff hat sich im Texte so gehäuft, daß sich ein Überblick über den Inhalt nur in einem Sachregister geben ließ. Ein Namenregister mit den bloßen Namen wäre ziemlich wertlos gewesen. Sollten aber den Namen die an den einzelnen Stellen zu findenden Untersuchungsgegenstände, an denen sich die verschiedenen Autoren betätigt haben, beigefügt werden, so wäre dieses Register selbst zu einem Bande angewachsen, denn schon im Texte ist die Literatur der einzelnen Probleme oft nur mit dem Namen des Autors und dem Fundort angegeben. Es ist aber auch anzunehmen, daß bei der Benutzung des Registers der Wunsch des Lesers mehr ist, sich über die Stelle, wo sich ein bestimmter Gegenstand behandelt findet, zu informieren, als darüber, was der einzelne Autor auf dem Gebiet der Geometrie geleistet hat, und so wird dieses eine Register wohl genügen. Für seine Anfertigung bin ich Herrn Dr. K. Krüger in Dresden zu besonderem Dank verpflichtet.

So möge denn das Werk hinausgehen und dazu dienen, das Studium der Geometrie zu erleichtern und dieser schönen Wissenschaft neue Freunde zu erwerben.

Braunschweig, September 1921.

H. E. Timerding.

INHALTSVERZEICHNIS.

DRITTER ABSCHNITT.

Raumgeometrie.

Kapitel XXV.

Flächen zweiter Ordnung nach ihrer Gestalt und Einteilung.

Von *O. Staude* in Rostock.

Kapitel XXVI.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und die Theorie ihrer ebenen Schnitte.

Von *O. Staude* in Rostock.

Kapitel XXVII.

Fokaleigenschaften und konfokale Systeme von Flächen zweiter Ordnung.

Von *O. Staude* in Rostock.

Kapitel XXX.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

(Grundlagen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Kapitel XXXI.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

(Weitere Ausführungen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Kapitel XXXII.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

(Besondere Fragen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Kapitel XXXIII.

Die Geometrie auf einer algebraischen Fläche.

Von *Francesco Severi* in Padua.

Kapitel XXXVI.

Seite

Allgemeine Theorie der algebraischen Raumkurven.

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Kapitel XXXVII.

Besondere algebraische Raumkurven.

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Kapitel XXXVIII.

Rationale Transformationen des Raumes.

Von *H. E. Timerding* in Braunschweig.

DRITTER ABSCHNITT

RAUMGEOMETRIE

Kapitel XXV.

Flächen zweiter Ordnung nach ihrer Gestalt und Einteilung.

Von *O. Staude* in Rostock.

§ 1. Gestalt der Rotations-, Zylinder- und Kegelflächen.

Einige Flächen 2. Ordnung sind ihrer Gestalt nach unmittelbar durch die Kegelschnitte (s. 1. Teil, S. 201—207) bestimmt. Es sind die *Rotations-, Zylinder-* und *Kegelflächen 2. Ordnung*.

Dreht man die in der zx-Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ verzeichnete Ellipse:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2,$$

um ihre große oder kleine Achse, so erhält man das *verlängerte* und *abgeplattete Rotationsellipsoid:*

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2;$$

(3) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2,$$

mit dem besonderen Fall der *Kugel* ($c^2 = a^2$):

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ebenso entsteht aus der Hyperbel:

(5) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch Drehung um die reelle oder imaginäre Achse das *zweischalige* und *einschalige Rotationshyperboloid*:

(6) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1;$$ (7) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

aus dem Asymptotenpaar der Hyberbel (5):

$$(8)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gleichzeitig mit (6) der *Rotationskegel:*

$$(9)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 0.$$

Endlich geht durch Drehung der Parabel:

$$(10)\qquad z^2 - 2px = 0$$

um die x-Achse das *Rotationsparaboloid* hervor:

$$(11)\qquad y^2 + z^2 - 2px.$$

Diese Rotationsflächen 2. Ordnung erscheinen schon bei Archimedes um 237 v. Chr. (Opera ed. Heiberg, 1, S. 280; 274) bis auf das einschalige Rotationshyperboloid, das erst von Kepler 1615 und Wren 1669 betrachtet wird (s. Cantor, Geschichte d. Math. 3 (2. Aufl.), S. 401).

Das verlängerte Rotationsellipsoid und zweischalige Rotationshyperboloid haben *zwei Brennpunkte,* das Rotationsparaboloid *einen*, je dieselben wie die erzeugenden Kegelschnitte. Dagegen erhält das abgeplattete Rotationsellipsoid und einschalige Rotationshyperboloid einen *Brennkreis*, den die Brennpunkte des erzeugenden Kegelschnittes bei der Drehung beschreiben.

Bezieht man die Gleichungen (1), (5) und (10) selbst auf das räumliche System $Oxyz$, so stellen sie den *elliptischen*, *hyperbolischen* und *parabolischen Zylinder* dar, der von einer Geraden beschrieben wird, die, beständig der y-Achse parallel bleibend, an dem in der zx-Ebene verzeichneten Kegelschnitt hingleitet.

Der elliptische Zylinder (1) wird auch als *schiefer Kreiszylinder* eingeführt bei Euler 1748 (*Introductio* 2, App. art. 52) und geht mit $c^2 = a^2$ in den *geraden Kreiszylinder* oder *Rotationszylinder* über. Den letzteren kannte Euklid um 300 v. Chr. (s. Tropfke, *Gesch.* 2, 388), den hyperbolischen und parabolischen Zylinder bemerkt Euler (*Introd.* 2, App. art. 125; 126).

Der *elliptische Kegel:*

$$(12)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\quad a^2 > b^2,$$

wird von einer um den Anfangspunkt O drehbaren Geraden beschrieben, die an der in der Ebene $z = z_0 = c$ verzeichneten Ellipse:

(13) $$\frac{{}'}{{}^2} + \frac{y'^2}{}$$

hingleitet (ss' in Fig. 1). Er entstand ursprünglich als *schiefer Kreiskegel* bei Apollonius um 225 v. Chr. (Con. I, Def. 3; ed. Heiberg, 1, 7).

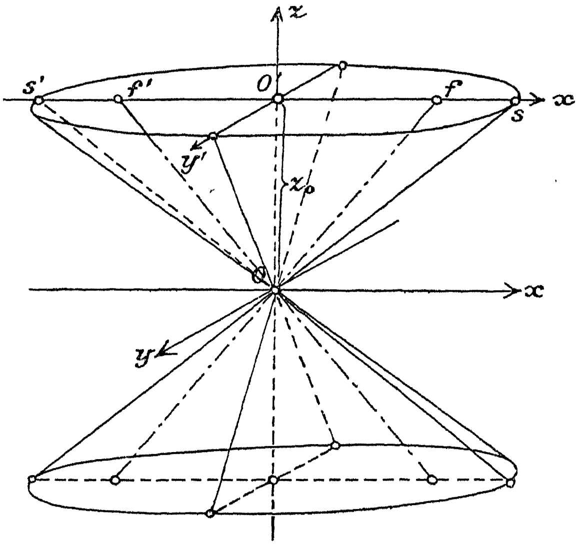


Fig. 1.

Die z-Achse ist die *innere Hauptachse* des Kegels (12), die xy-Ebene, welche die beiden *Mäntel* des Kegels trennt, die *äußere Hauptebene*; die zx-und yz-Ebene sind die *Hauptebenen der größten* und *kleinsten Öffnung*.

Als *Brennlinien* des elliptischen Kegels (12) bezeichnet man (nach Magnus, *Aufgaben* 2 (1837), 172) das in der Hauptebene der größten Öffnung liegende Geradenpaar:

(14) $$\frac{x^2}{a^2 - b^2} \qquad \frac{}{b^2 + c^2} \qquad 0, \quad y = 0$$

($O\,ff'$ in Fig. 1).

Ersetzt man die Gleichung (12) durch die Gleichung:

$$(15)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}=0,\quad e^2>d^2,$$

so werden die Brennlinien:

$$(16)\qquad \frac{x^2}{d^2}-\frac{z^2}{e^2-d^2}=0,\quad y=0.$$

Da sie von a unabhängig sind, heißen zwei zu verschiedenen Werten von a^2 gehörige Kegel (15) *konfokal.* Die Gleichung (15) umfaßt aber, je nachdem:

$$(17)\qquad e^2>a^2>d^2 \qquad \text{oder} \qquad d^2>a^2>0$$

ist, nicht nur Kegel von der Form (12) mit der z-Achse, sondern auch solche mit der x-Achse als innerer Hauptachse, *aufrechte* und *liegende* bei vertikal gestellter z-Achse. Monographie über den Kegel: Chasles, *Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré, Brux. Mém.* **6** (1830); vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raum* **1** (4. Aufl. 1898), 426; Staude, Flächen 2. O., *Teubners Samlg.* XXX, 281.

§ 2. Die Gestalt der Ellipsoide und Hyperboloide.

Die allgemeinen räumlichen Gegenstücke der Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln sind jedoch die *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Paraboloide.* Ihre Namen tauchen bei J. Wallis 1695 auf (s. Kötter, Jahresber. d. D. Math. Vereinig. **5** (1901), 66), während ihre zusammenhängende Beschreibung zuerst von L. Euler (*Introd.* **2**, *App. art.* 117—125) gegeben wird.

Die Gestalt des *Ellipsoides,* des *ein-* und *zweischaligen Hyperboloides* ist aus ihren Gleichungen:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\quad 1,\quad a^2>b^2>c^2,$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a^2>$$

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad b^2<c^2$$

zu entnehmen.

Alle drei Flächen haben einen *Mittelpunkt,* den Anfangspunkt O, drei *Hauptachsen,* die x-, y- und z-Achse, und drei *Hauptebenen,* die xy-, zx- und yz-Ebene.

Das Ellipsoid hat drei Paar *Scheitelpunkte* (Fig. 2):

(4) $A, A' = \pm a,\ 0,\ 0;\quad B, B' = 0,\ \pm b,\ 0;\quad C, C' = 0,\ 0,\ \pm c;$

das einschalige Hyperboloid zwei Paar reelle (Fig. 3) und ein imaginäres Paar:

(5) $A, A' = \pm a,\ 0,\ 0;\quad B, B' = 0, \pm b, 0;\quad 0, 0, \pm ci;$

das zweischalige Hyperboloid ein reelles (Fig. 4) und zwei imaginäre Paare:

(6) $A, A' = \pm a, 0, 0;\quad 0, \pm bi, 0;\quad 0, 0, \pm ci.$

Beim *Ellipsoid* heißen $2a$, $2b$, $2c$ (AA', BB', CC' in Fig. 2)

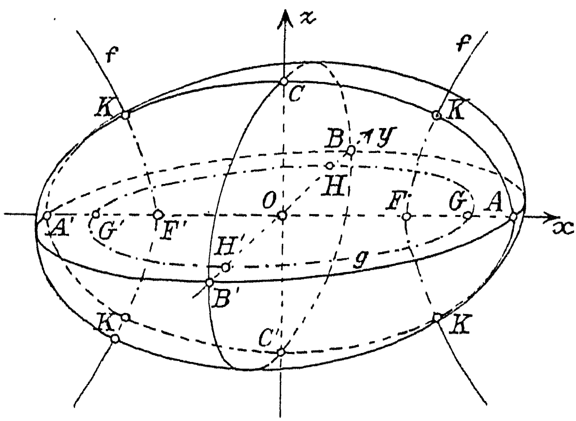


Fig. 2.

die *große, mittlere* und *kleine Hauptachse* (Hauptachsenlänge), beim *einschaligen Hyperboloid* $2a$ und $2b$ (AA', BB' in Fig. 3) die *große* und *kleine reelle* und $2ci$ die imaginäre *Hauptachse*, beim *zweischaligen Hyperboloid* $2a$ (AA' in Fig. 4) die *reelle*, $2bi$ und $2ci$ die kleine und große imaginäre *Hauptachse*.

Das *Ellipsoid* schneidet die drei Hauptebenen $z = 0$, $y = 0$ und $x = 0$ in drei Ellipsen ($ABA'B'$, $ACA'C'$ und $BCB'C'$ in Fig. 2), seinen *Hauptschnitten* oder *Scheitellinien*, die bezüglich die Brennpunkte haben:

$$(7)\quad \begin{gathered} F, F' = \pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0;\ G, G' = \pm\sqrt{a^2 - c^2}, 0, 0; \\ H, H' = 0,\quad \pm\sqrt{b^2 - c^2}, 0, \end{gathered}$$

von denen die beiden ersten Paare *die inneren und äußeren Hauptbrennpunkte* heißen und das letzte Paar mit bestimmen. Durch die Hauptbrennpunkte sind auch die *Fokalkegelschnitte,* die *Fokalellipse* (g in Fig. 2) und die *Fokalhyperbel* (f in Fig. 2):

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}&=1, \quad z=0;\\ \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}&=1, \quad y=0 \end{aligned}$$

bestimmt, die mit den bezüglichen Hauptschnitten *konfokal* sind, während die Scheitelpunkte des einen in die Brennpunkte des anderen fallen. Die Fokalellipse liegt innerhalb des Ellipsoides, die Fokalhyperbel schneidet es in den vier Punkten (KK in Fig. 2):

$$(9)\qquad x^2=a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad y=0, \quad z^2=c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}$$

Das Ellipsoid ist eine *geschlossene Fläche,* die innerhalb des von den sechs Ebenen $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ begrenzten rechtwinkligen Parallelepipedons liegt.

Das *einschalige Hyperboloid* hat als *Hauptschnitte* in der Ebene $z=0$ eine Ellipse ($ABA'B'$ in Fig. 3), in den Ebenen

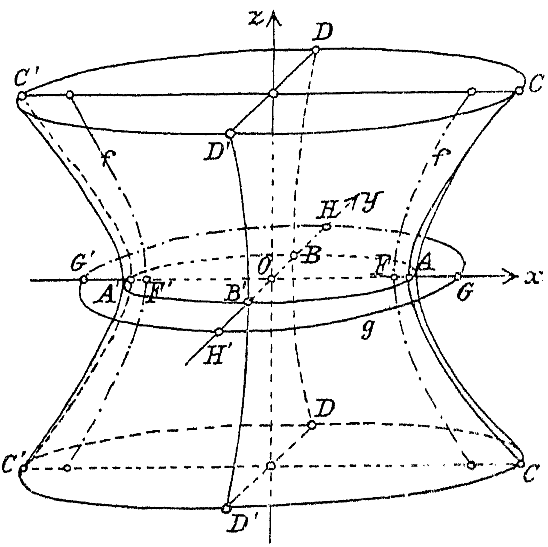


Fig. 3.

$y = 0$ und $x = 0$ je eine Hyperbel (CAC, $C'A'C'$ und DBD, $D'B'D'$). Die Brennpunkte der beiden ersten Hauptschnitte, die *Hauptbrennpunkte,* sind:

$$(10)\quad F, F' = \pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0,\ 0; \qquad G, G' = \pm\sqrt{a^2 + c^2},\ 0,\ 0.$$

Die *Fokalkegelschnitte* (g und f in Fig. 3):

$$(11)\quad \begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1, \quad z = 0; \\ &\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1, \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind mit den beiden ersten Hauptschnitten bezüglich *konfokal*; die Brennpunkte des einen sind die Scheitelpunkte des andern. Die *Fokalellipse* umschließt den ersten Hauptschnitt, die *Kehlellipse.* Die *Fokalhyperbel* liegt auf der konvexen Seite des zweiten Hauptschnittes. Das einschalige Hyperboloid dehnt sich in der Richtung der z-Achse nach beiden Seiten hin *unbegrenzt* weit aus und schmiegt sich mehr und mehr dem *Asymptotenkegel*:

$$(12)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

an, den er rings umschließt. Die Asymptoten der Fokalhyperbel sind die Brennlinien des Asymptotenkegels.

Das *zweischalige Hyperboloid* hat als ersten und zweiten *Hauptschnitt* $z = 0$ und $y = 0$ je eine Hyperbel (BAB, $B'A'B'$ und CAC, $C'A'C'$ in Fig. 4), deren Brennpunkte die *Hauptbrennpunkte* der Fläche sind:

$$(13)\quad F, F' = \pm\sqrt{a^2 + b^2},\ 0,\ 0; \qquad G, G' = \pm\sqrt{a^2 + c^2},\ 0,\ 0.$$

Die dritte Hauptebene $x = 0$ schneidet die Fläche nicht reell, sondern trennt sie in *zwei Schalen.*

Die *Fokalkegelschnitte* (g und f in Fig. 4):

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad x = 0; \\ &\frac{x^2}{a^2 + b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind mit den beiden ersten Hauptschnitten bezüglich *konfokal*; die Brennpunkte des einen sind die Scheitelpunkte des andern.

Die *Fokalellipse* schneidet den ersten Hauptschnitt in den vier Punkten (K, K in Fig. 4):

$$x^2 = a^2\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}, \quad y^2 = b^2\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad z = 0; \tag{15}$$

die *Fokalhyperbel* liegt auf der konkaven Seite des zweiten Hauptschnittes. Der *Asymptotenkegel*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{16}$$

schließt die beiden Schalen der Fläche ein. Die Asymptoten der Fokalhyperbel sind die Brennlinien des Asymptotenkegels.

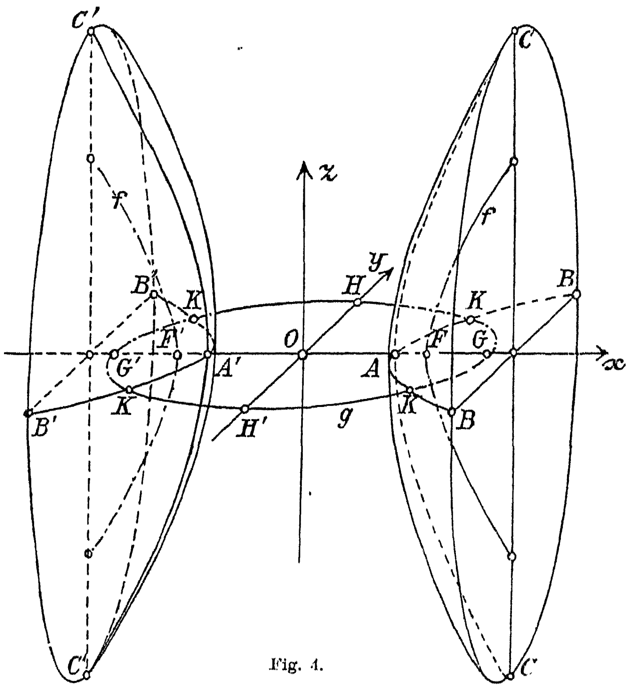


Fig. 4.

Man kann die drei betrachteten Flächen in die *eine Gleichung*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-d^2} + \frac{z^2}{a^2-c^2} = 1, \quad c^2 > d^2, \tag{17}$$

zusammenfassen. Sie stellt ein Ellipsoid, ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid dar, je nachdem:

$$(18) \qquad \infty > a^2 > e^2, \quad e^2 > a^2 > d^2, \quad d^2 > a^2 > 0.$$

In allen drei Fällen sind die *Hauptbrennpunkte*:

$$(19) \qquad F, F' = \pm d, 0, 0; \quad G, G' = \pm e, 0, 0$$

und die *Fokalkegelschnitte*:

$$(20) \qquad \frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad z = 0; \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 1, \quad y = 0.$$

Da die Hauptbrennpunkte und damit auch die Fokalkegelschnitte von a unabhängig sind, heißen zwei zu verschiedenen Werten a gehörige Flächen (17) *konfokal.*

§ 3. Die Gestalt der Paraboloide.

Die Gestalt des *elliptischen* und *hyperbolischen Paraboloids* ist ebenfalls aus ihren Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0, \quad b^2 > c^2,$$

$$(2) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

zu entnehmen.

Die xy- und zx-Ebene sind Symmetrie- oder *Hauptebenen*, die x-Achse eine ausgezeichnete *Hauptachse* beider Flächen. Der Schnittpunkt O der Fläche mit der Hauptachse heißt der *Scheitelpunkt.*

Das *elliptische Paraboloid* (1) liegt bei rechtslaufender x-Achse ganz links von der yz-Ebene (in Fig. 5, die sich an die spätere Gleichung (10) anlehnt, ist das Achsensystem $Oxyz$ nach dem Scheitel A verschoben zu denken). Es schneidet die beiden Hauptebenen $z = 0$ und $y = 0$ in zwei nach links geöffneten Parabeln (BAB', CAC' in Fig. 5), seinen *Hauptschnitten*, die bezüglich die Brennpunkte haben:

$$(3) \qquad F = -\frac{b^2}{2}, 0, 0; \quad G = -\frac{c^2}{2}, 0, 0$$

(ersterer in Fig. 5 mit O bezeichnet), die beiden *Hauptbrennpunkte*

der Fläche. Durch sie sind die beiden *Fokalparabeln* (g und f in Fig. 5):

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2-c^2} + 2x + c^2 = 0, & z = 0, \\[2ex] \dfrac{z^2}{b^2-c^2} - 2x - b^2 = 0, & y = 0 \end{cases}$$

bestimmt, die mit den bezüglichen Hauptschnitten *konfokal* sind, während der Scheitelpunkt der einen im Brennpunkt der

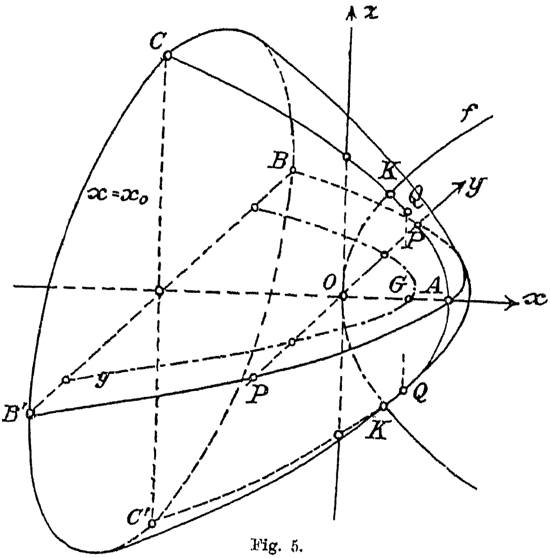


Fig. 5.

andern liegt. Die erste nach links geöffnete Fokalparabel (4) liegt innerhalb der Parabel des Hauptschnittes $z = 0$, die zweite nach rechts geöffnete schneidet die Fläche in den beiden Punkten (K, K in Fig. 5):

$$(5)\qquad x = -\frac{b^2 - c^2}{2}, \quad y = 0, \quad z^2 = (b^2 - c^2)\, c^2.$$

Das *hyperbolische Paraboloid* (2) hat als *Hauptschnitte* eine nach links und eine nach rechts geöffnete Parabel (BAB', CAC' in Fig. 6, wo ebenfalls $Oxyz$ parallel nach A verlegt zu denken ist), die bezüglich die Brennpunkte haben:

$$(6)\qquad F(O) = -\frac{b^2}{2}, 0, 0; \quad G = \frac{c^2}{2}, 0, 0,$$

die beiden *Hauptbrennpunkte* der Fläche. Die *Fokalparabeln* (g und f in Fig. 6):

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{y}{b^2+c^2}+2x-c^2=0, \quad z=0;\\ &\frac{z^2}{b^2+c^2}-2x-b^2=0, \quad y=0 \end{aligned}$$

sind wiederum mit dem ersten und zweiten Hauptschnitt *konfokal* und umschließen ihn. Der Scheitelpunkt der einen ist der Brenn-

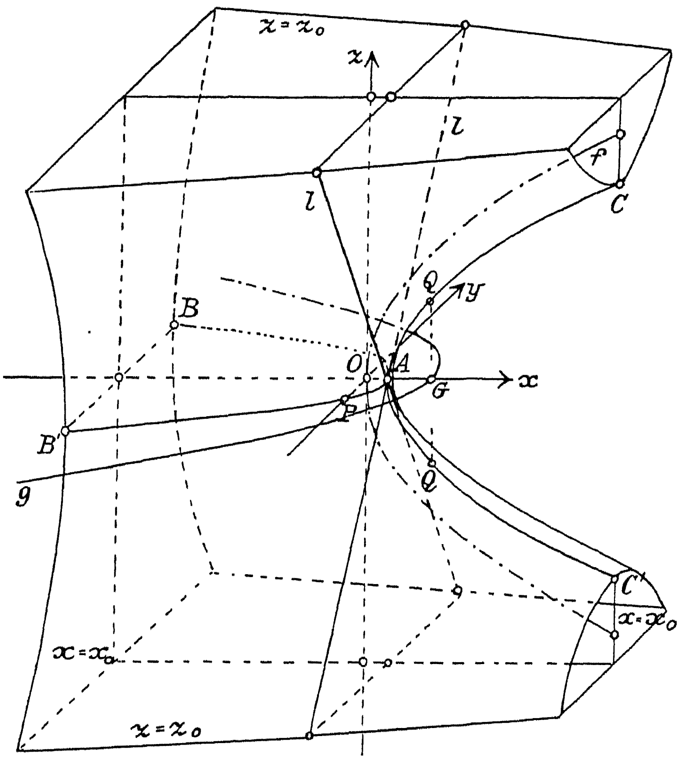


Fig. 6.

punkt der andern. Die durch den Scheitelpunkt der Fläche gehende yz-Ebene schneidet die Fläche in dem Linienpaar (ll in Fig. 6):

$$(8)\qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=0, \quad x=0,$$

den beiden *Scheitelerzeugenden.* Die beiden Ebenen:

(9) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(bei *Steiner,* Werke **1**, 376 auch alle parallelen) heißen *Asymptotenebenen* des hyperbolischen Paraboloids.

Die *eine Gleichung*:

(10) $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0$$

stellt (im System $Oxyz$ der Fig. 5 und 6), je nachdem:

(11) $$\infty > p > e \quad \text{oder} \quad e > p > 0 \quad \text{oder} \quad 0 > p > -\infty$$

ein *linkes* (nach links hin offenes) *elliptisches*, ein *hyperbolisches* und ein *rechtes elliptisches Paraboloid* dar. In allen Fällen sind die beiden *Hauptbrennpunkte*:

(12) $$F = O = 0,\ 0,\ 0; \quad G = \frac{e}{2},\ 0,\ 0$$

und die *Fokalparabeln*:

(13) $$y^2 + 2ex - e^2 = 0, \quad z = 0; \quad z^2 - 2ex = 0, \quad y = 0.$$

Da die Hauptbrennpunkte und Fokalparabeln von p unabhängig sind, heißen zwei zu verschiedenen Werten p gehörige Paraboloide (10) *konfokal.*

Die Darstellung der Flächen 2. Ordnung durch ihre Hauptschnitte gibt Euler, *Introd.* **2**, App. Fig. 143—147, entsprechende *Drahtmodelle* H. Wiener, bei Teubner, *Mathem. Katalog*, Jubiläumsausgabe 1910, 143. *Gipsmodelle* sind unter Leitung von A. Brill von R. Diesel (1878) in München angefertigt worden, vgl. W. Dyck, *Katalog math. Modelle*, 258. Genaueres über die gestaltlichen Verhältnisse bei Staude, *Teubners Samml.* XXX, 275.

§ 4. Die Kreisschnitte und die Kartonmodelle.

Bei dem *Ellipsoid*:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2,$$

gibt es *zwei Systeme paralleler Ebenen*, die es in einem *Kreise* schneiden, wie zuerst J. d' Alembert gefunden hat (s. Kötter, Ber. 72). Sie sind parallel den beiden *Hauptkreisschnittebenen*:

$$(a^2 - b^2)\frac{x^2}{a^2} - (b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{2}$$

Diese Ebenen verbinden die mittlere Achse $2b$ des Ellipsoides mit den beiden in der zx-Ebene liegenden Durchmessern, welche die Länge $2b$ haben. Sie selbst liefern Schnittkreise vom Radius b, die reell schneidenden parallelen Ebenen Schnittkreise, deren Radien von b bis 0 abnehmen. Für den Radius 0 reduziert sich der ganze Kreisschnitt auf einen Punkt, einen „*Kreispunkt*". Die *vier Kreispunkte* des Ellipsoids (1) sind dieselben vier Punkte § 2, (9), die auf der Fokalhyperbel liegen (Dupin, Développements (1813), 278; 321).

Bei dem *einschaligen Hyperboloid* und dem Kegel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2; \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a^2 > b^2 \tag{4}$$

sind in gleicher Weise die beiden *Hauptkreisschnittebenen* (Monge-Hachette, *J. éc. polyt. cah.* **11** (1802), 161):

$$(a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} - (a^2 + c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{5}$$

Sie verbinden beim Hyperboloid (3) die große Achse $2a$ mit den beiden in der yz-Ebene liegenden Durchmessern von der Länge $2a$. Sie liefern Schnittkreise vom Radius a, während alle parallelen Ebenen in Kreisen vom Radius a bis ∞ schneiden. *Kreispunkte* fehlen. Wegen der Kreisschnitte ist der gerade elliptische Kegel (4) mit dem schiefen Kreiskegel identisch (§ 1, (12)).

Die Kreisschnittebenen des *elliptischen Zylinders*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 > b^2 \tag{6}$$

sind parallel den beiden Ebenen:

$$(a^2 - b^2)\,y^2 - b^2 z^2 = 0. \tag{7}$$

Bei dem *zweischaligen Hyperboloid*

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b^2 < c^2,$$

sind die *Hauptkreisschnittebenen*:

$$(9) \qquad (a^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} - (c^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Sie schneiden selbst die Flächen nicht reell, aber die reell schneidenden parallelen Ebenen schneiden in Kreisen vom Radius 0 bis ∞. Die vier dem Radius 0 entsprechenden *Kreispunkte* sind die Punkte § 2, (15), die auf der Fokalellipse liegen.

Das *elliptische Paraboloid*:

$$(10) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x \quad 0, \quad b^2 > c^2,$$

hat zwei Systeme von Kreisschnittebenen parallel dem Ebenenpaar:

$$(11) \qquad c^2x^2 - (b^2 - c^2)z^2 = 0.$$

Die *Kreispunkte* sind wiederum die beiden Punkte § 3, (5), in denen die Fläche von der einen Fokalparabel geschnitten wird.

Beim hyperbolischen Paraboloid treten für die Kreisschnittebenen solche Ebenen ein, die in einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden schneiden. Es sind die dem Ebenenpaar § 3, (9) parallelen Ebenen (Klügel, *Mathem. Wörterb.* **3** (1808), 328).

Indem man eine Anzahl Kreisschnitte von jedem der beiden Systeme in Kartonkreisen ausschneidet und ineinander schiebt (wie Fig. 7 im Durchschnitt der zx-Ebene des Ellipsoides), erhält man die *Kartonmodelle* der Flächen 2. Ordnung. Sie bleiben in den Kreuzungslinien der Kartonblätter beweglich (wie von Fig. 7 auf Fig. 8) und stellen daher eine ganze Reihe von Flächen derselben Art dar.

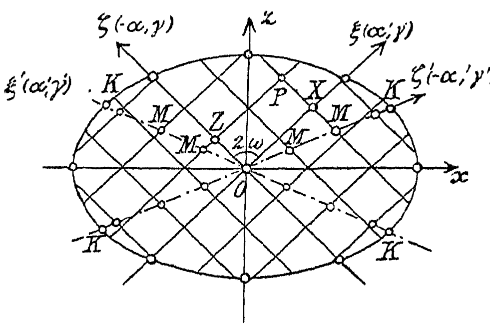


Fig. 7.

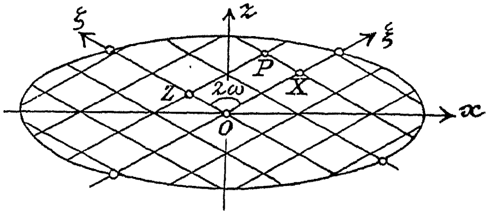


Fig. 8

Diese Kartonmodelle sind nach einer Anregung von O. Henrici zuerst von A. Brill (1874) ausgeführt, vgl. Dyck, *Katalog,* 258. Von H. Wiener sind die Kreise in Draht hergestellt, bei Teubner, *Math. Katalog,* Jubiläumsausgabe 1910, 143. Nähere Beschreibung der dargestellten Flächenreihen bei Staude, Teubners Samlg. XXX, 308 ff.

§ 5. Die geraden Linien der Flächen zweiter Ordnung und die Fadenmodelle.

Auf dem *einschaligen Hyperboloid:*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

gibt es *zwei Scharen von geraden Linien,* die in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegen. (Monge, *J. éc. polyt. cah.* **1** (1794), 5; Kötter, *Ber.* 75.) Diese *„Erzeugenden"* der Fläche sind mit einem Parameter ϑ durch die Gleichungen (Cauchy, *Applications d' analyse* **1** (1826), 228):

$$(2)\qquad \frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\vartheta+\varepsilon\sin\vartheta,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\vartheta-\varepsilon\cos\vartheta$$

dargestellt. Die eine Schar entspricht dem Vorzeichen $\varepsilon=+1$, die andere $\varepsilon=-1$. Der Asymptotenkegel:

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

hat nur die einzige Schar von Erzeugenden:

$$(4)\qquad \frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\vartheta,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\vartheta.$$

Die Richtungskosinus α, β, γ der Erzeugenden (2) und (4) entsprechen der Bedingung:

$$(5)\qquad \alpha:\beta:\gamma=a\cos\vartheta:b\sin\vartheta:c.$$

Je zwei ungleichnamige, verschiedenem ε entsprechende Erzeugende des Hyperboloids, die zu demselben ϑ gehören, sind parallel und sind auch der zu demselben ϑ gehörigen Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel.

Mit $\lambda = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$ kann man die Erzeugenden auch durch die Gleichungen:

$$(6) \quad \left(-\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(\frac{y}{b}-\varepsilon\right)=0, \quad \left(\frac{y}{b}+\varepsilon\right)-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0$$

darstellen.

Irgend zwei gleichnamige Erzeugende schneiden sich niemals; irgend zwei ungleichnamige schneiden sich stets. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Erzeugende.

Indem man die Erzeugenden durch gespannte Fäden darstellt, erhält man ein *Fadenmodell* (Fig. 9) des einschaligen Hyper-

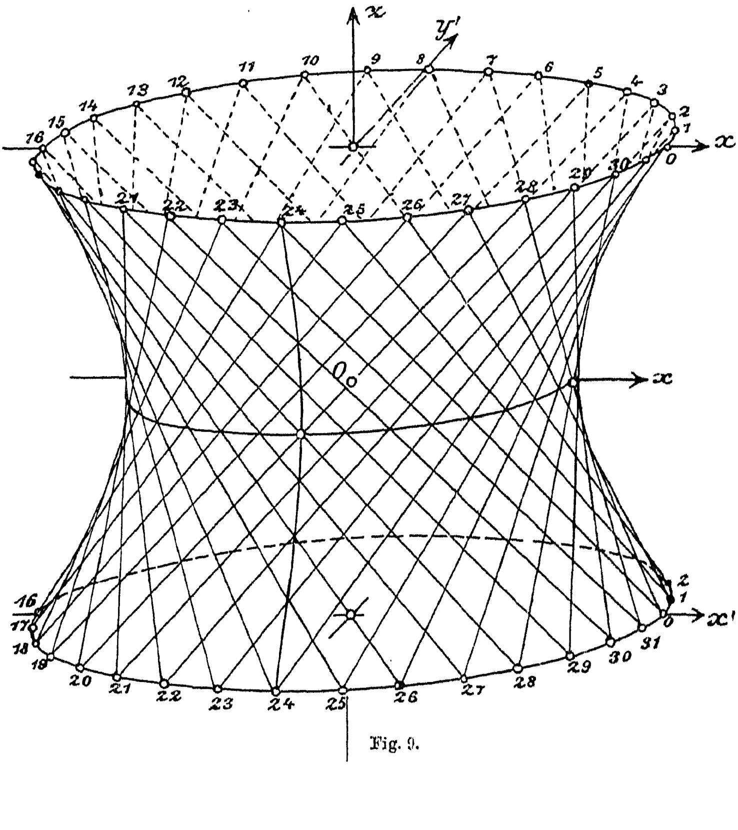


Fig. 9.

boloides, wie es zuerst von Th. Olivier 1830 angefertigt wurde (s. F. Müller, *Führer durch die math. Lit.* 206). Wählt man statt der Fäden starre Stäbe, die in ihren Kreuzungspunkten drehbar, aber nicht verschiebbar miteinander verschränkt sind, so bleibt das Modell *beweglich* und stellt in seinen verschiedenen Lagen lauter *konfokale* Hyperboloide dar. Dieses bewegliche Modell wurde von O. Henrici 1874 entdeckt (s. W. Dyck, *Katalog*, 261) und von H. Wiener durch das „geschränkte Verbindungsgelenk" wesentlich vervollkommnet (s. Teubner, *Katalog* 1910, 143; Staude, Teubners Sammlg. XXX, 339, 714).

Auf dem *hyperbolischen Paraboloid:*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0 \tag{7}$$

gibt es *zwei Scharen von Erzeugenden*, dargestellt mit einem Parameter λ durch die Gleichungen:

$$\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = \lambda, \quad \lambda\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c}\right) = 2x, \tag{8}$$

die eine Schar mit $\varepsilon = +1$, die andere mit $\varepsilon = -1$.

Die Erzeugenden einer Schar ε sind alle der festen Ebene:

$$\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = 0 \tag{9}$$

parallel.

Die Richtungskosinus einer Erzeugenden (8) entsprechen der Bedingung:

$$\alpha : \beta : \gamma = \lambda : b : \varepsilon c; \tag{10}$$

zwei parallele Erzeugende gibt es nicht.

Irgend zwei gleichnamige Erzeugende schneiden sich niemals, irgend zwei ungleichnamige stets. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Erzeugende.

Irgend zwei Erzeugende der einen Schar werden von denen der anderen in ähnlichen Punktreihen geschnitten; zwei Erzeugende entgegengesetzter Parameterwerte λ und $-\lambda$ in kongruenten.

Man erhält ein *Fadenmodell* (Fig. 10) der Fläche, indem man das von den vier Erzeugenden $\pm\lambda$, $\varepsilon = \pm 1$ gebildete gleichseitige windschiefe Viereck ($E_1 E_2 E_3 E_4$ in Fig. 10) in Draht

herstellt, die gegenüberliegenden Seiten in gleiche Teile teilt und die Teilpunkte durch Fäden verbindet.

Bei starren, in den Kreuzungspunkten verschränkten Stäben

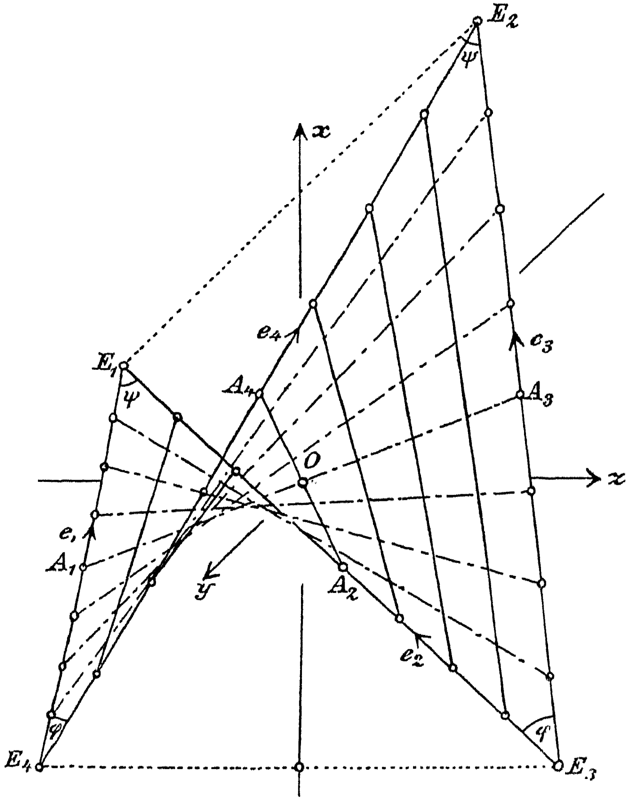


Fig. 10.

gibt das alsdann *bewegliche* Modell eine Reihe *konfokaler* Paraboloide.

§ 6. Konjugierte Durchmesser.

Bei dem *Ellipsoid* oder *Hyperboloid* (mit Wechsel der Vorzeichen von b^2 und c^2):

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

heißt eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade oder Ebene ein *Durchmesser* oder eine *Diametralebene.*

Zu jedem Durchmesser mit den Richtungskosinus α, β, γ gehört eine *konjugierte Diametralebene:*

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0,$$

der Ort der Mittelpunkte aller dem Durchmesser parallelen Sehnen der Fläche.

Zwei *Durchmesser* heißen *konjugiert,* wenn jeder in der konjugierten Diametralebene des andern liegt. Ihre Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ entsprechen der Bedingung:

$$(3) \qquad \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{c^2} = 0.$$

Ein Durchmesser ist zu sich selbst konjugiert, wenn er auf dem Asymptotenkegel der Fläche liegt.

In einem System von *drei konjugierten Durchmessern* ist die Ebene je zweier die konjugierte Diametralebene des dritten. In bezug auf ein solches System als schiefwinkliges Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ lautet die Gleichung der Fläche (1):

$$(4) \qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} = 1.$$

Für die halben Längen λ, μ, ν der konjugierten Durchmesser gelten die drei Hauptsätze:

$$(5) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(6) \qquad \mu^2\nu^2 \sin^2 \eta\zeta + \nu^2\lambda^2 \sin^2 \zeta\xi + \lambda^2\mu^2 \sin^2 \xi\eta = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

$$(7) \qquad \lambda^2\mu^2\nu^2 \sin^2 \xi\eta\zeta = a^2b^2c^2.$$

Nach dem letzten ist das Parallelepipedon aus drei konjugierten Durchmessern von festem Volumen.

Konzentrische, ähnliche und ähnlich liegende Flächen (1) haben gemeinsame konjugierte Durchmesser.

Beim *elliptischen und hyperbolischen* ($-c^2$ für c^2) *Paraboloid*

$$(8) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0.$$

heißt jede der Hauptachse parallele Gerade oder Ebene ein *Durchmesser* oder eine *Diametralebene.*

Zu jeder Richtung α, β, γ gehört eine *konjugierte Diametralebene*:

$$\alpha + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0, \tag{9}$$

der Ort der Mittelpunkte aller in dieser Richtung laufenden Sehnen.

Die Gleichung des Paraboloides (8) hat in einem schiefwinkligen System $\Omega\xi\eta\zeta$ die Form:

$$\frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\xi = 0, \tag{10}$$

wenn Ω ein Punkt der Fläche, die η- und ζ-Achse zwei Tangenten in ihm und die $\zeta\xi$- und $\xi\eta$-Ebene die zur Richtung derselben konjugierten Diametralebenen sind. Alsdann ist:

$$\mu^2 \sin^2 \xi\eta + \nu^2 \sin^2 \xi\zeta = b^2 + c^2, \tag{11}$$

$$\mu^2\nu^2 \sin^2 \xi\eta\zeta = b^2c^2. \tag{12}$$

Die Sätze (5)—(7) über konjugierte Durchmesser sind von Livet, *Corr. polyt.* **1** (1804), 29; Binet, ebd. **2** (1812), 323 und mit anderen Sätzen von Chasles, ebd. (1816), 306 entwickelt. Ihre Ableitung als Invariantensätze bei Plücker, *System d. anal. Geom. d. Raumes* (1846), 160; Salmon-Fiedler, *Raum* **1** (4. Aufl.), 125; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 502. Sie fallen in dieser Auffassung unter die *affine Geometrie* von *Heffter*, s. II, **1**, 100 (Timerding).

§ 7. Allgemeiner Begriff der Fläche zweiter Ordnung und des Kegels zweiter Ordnung.

Die Gleichungen der bisher betrachteten Flächen haben das gemeinsame Merkmal, daß sie in den Koordinaten vom 2. Grade sind. Unter einer *Fläche 2. Ordnung überhaupt* versteht man jede Fläche, die in gemeinen, auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogenen Punktkoordinaten durch eine Gleichung von der Form (Euler, *Introd.* **2**, App. art. 102):

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{1}$$

oder bei homogener Schreibweise (Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 138):

$$(2)\quad f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{23}yz + 2\,a_{31}zx + 2\,a_{12}xy + 2\,a_{14}xt + 2\,a_{24}yt + 2\,a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

dargestellt wird.

Der Grad der Gleichung bleibt beim Übergang zu einem anderen rechtwinkligen oder einem schiefwinkligen System immer derselbe. Daher hat die Fläche 2. Ordnung das charakteristische Merkmal, *daß sie von jeder Geraden, die ihr nicht ganz angehört, in zwei Punkten und von jeder Ebene, die ihr nicht ganz angehört, in einer Kurve 2. Ordnung geschnitten wird.*

Das duale Gebilde zur Fläche 2. Ordnung ist die *Fläche 2. Klasse* (das Ebenenbündel 2. Ordnung), von deren Tangentialebenen („Ebenen") durch eine beliebige Gerade *zwei* hindurchgehen, während die durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangentialebenen einen *Kegel 2. Klasse* umhüllen.

Die *Gleichung* der Fläche 2. Klasse lautet in homogenen gemeinen Ebenenkoordinaten u, v, w, s (Plücker, *System d. anal. Geom. d. R.* (1846), 191):

$$(3)\quad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2\,b_{23}vw + 2\,b_{31}wu + 2\,b_{12}uv + 2\,b_{14}us + 2\,b_{24}vs + 2\,b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0.$$

Die Gleichung (2) behält auch in beliebigen *Tetraederkoordinaten* x_1, x_2, x_3, x_4 dieselbe Gestalt (Plücker, ebd. 49; 79):

$$(4)\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl}x_k x_l = 0,$$

wobei:

$$(5)\quad a_{kl} = a_{lk}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist immer eine *quadratische Form* der vier Koordinaten. Das Entsprechende gilt bei der Fläche 2. Klasse.

Wegen der neun unabhängigen Koeffizientenverhältnisse, die in die Gleichung (2) eingehen, ist die Fläche 2. Ordnung im allgemeinen *durch neun Punkte bestimmt*; ebenso die Fläche zweiter Klasse durch neun Ebenen. Über die Konstruktion der Fläche aus neun gegebenen Punkten s. K. Rohn, *Leipz. Ber.* 1894, 160; Thomae, *Leipz. Ber.* 1892, 542; 1897, 315.

Die aus den Koeffizienten der Gleichung (2) oder (4) gebildete Determinante:

$$A = |a_{kl}| \tag{6}$$

heißt die *Determinante der Fläche 2. Ordnung.* Ihre 16 Unterdeterminanten 3. Grades bezeichnen wir mit:

$$A_{kl} = A_{lk}, \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

ihre 36 Unterdeterminanten 2. Grades mit:

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk}, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, 6) \tag{8}$$

wo k und l die Nummern bedeuten, welche die Variation der Zeilen und Kolonnenindizes in der Reihe:

$$23, \quad 31, \quad 12, \quad 14, \quad 24, \quad 34 \tag{9}$$

besitzen, z. B.:

$$\alpha_{25} = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{12} & a_{14} \end{vmatrix}, \qquad \alpha_{26} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{13} & a_{14} \end{vmatrix}$$

Der Gebrauch der Determinanten der Flächen 2. Ordnung setzt mit Cauchy, *Exerc.* **4** (1829), 142 und Jacobi, *Werke* **3** (1834), 201 ein und wird von Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 138, 174; Salmon-Fiedler, *Raum* **1** (4. Aufl.), 88 allgemein durchgeführt.

Die Determinante A ist *Invariante* der Fläche. Sie ändert sich beim Übergang von dem ursprünglichen Koordinatensystem der Gleichung (4) zu einem andern nur um das *Quadrat* der Substitutionsdeterminante.

Der Kegel § 1, (12), der im Sinne der Gleichung (1) als Fläche 2. Ordnung im *Raume* erscheint, ist auch ein Kegel 2. Ordnung innerhalb des *Bündels* an seiner Spitze O. Versteht man nämlich unter x, y, z homogene gemeine Koordinaten des Strahles im Bündel (Richtungskosinus des Strahles), so ist die Gleichung:

$$h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0 \tag{10}$$

der allgemeine Ausdruck des *Kegels 2. Ordnung im Bündel. Er wird von jeder Ebene des Bündels, die ihm nicht ganz angehört, in zwei Strahlen geschnitten.*

Das duale Gebilde zum Kegel 2. Ordnung im Bündel ist der *Kegel 2. Klasse*:

$$(11) \qquad H(u, v, w) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0,$$

wo u, v, w homogene gemeine Koordinaten der Ebene im Bündel (Richtungskosinus ihrer Normale) sind. Von seinen Tangentialebenen gehen durch jeden Strahl des Bündels zwei.

Die Gleichungen (10) und (11) sind auch der allgemeine Ausdruck der *Kurve 2. Ordnung* und *2. Klasse in der unendlich fernen Ebene*, wenn x, y, z Punkt- und u, v, w Linienkoordinaten in dieser Ebene bedeuten (*Staude,* Samml. Teubner XVI, 244).

§ 8. Tangenten und Tangentialebenen, Mittelpunkt.

Eine durch ihre Parameterdarstellung gegebene *Gerade*:

$$(1) \qquad x_0 + \alpha s, \qquad y = y_0 + \beta s, \qquad , + \gamma s,$$

die durch den Punkt x_0, y_0, z_0 in der Richtung α, β, γ hindurchgeht, schneidet die *Fläche* § 7, (1) in *zwei Punkten* S_1 und S_2, deren Parameterwerte $s = s_1$ und s_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind (Cauchy, *Exerc.* **3** (1828), 1):

$$(2) \qquad h(\alpha, \beta, \gamma)s^2 + 2(g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3{}^0\gamma)s + g^0 = 0.$$

Hier ist $h(\alpha, \beta, \gamma)$ die in § 7, (10) eingeführte Funktion mit α, β, γ für x, y, z und ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$(3) \qquad g_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4},$$

$i = 1, 2, 3, 4$, während der obere Index 0 überall die Substitution der Koordinaten x_0, y_0, z_0 für x, y, z bedeutet.

Eine Gerade, deren beide Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der Fläche 2. Ordnung in einen Punkt $S_1 = S_2$ zusammenfallen, ist eine *Tangente* der Fläche in dem Punkte, der Punkt selbst ihr

Der Ort der in einem Punkte der Fläche an sie gelegten Tangenten ist eine Ebene, die *Tangentialebene* der Fläche in dem Punkte.

Die Gleichung der Tangentialebene der Fläche § 7, (1) im Punkte x_0, y_0, z_0 ist:

(4) $$g_1^0(x - x_0) + g_2^0(y - y_0) + g_3^0(z - z_0) = 0$$

oder:

(5) $$g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 z + g_4^0 = 0.$$

Bei der homogenen Schreibweise § 7, (2) hat die Tangentialebene im Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 die Gleichung (Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 130):

(6) $$f_1^0 x + f_2^0 y + f_3^0 z + f_4^0 t = 0,$$

wo:

(7) $$f_i = f_i(x, y, z, t) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, und der Index 0 wieder die Substitution der Koordinaten mit dem Index 0 bedeutet.

Die Tangentialebene schneidet die Fläche in zwei (reellen oder imaginären) Geraden, welche die beiden durch den Berührungspunkt gehenden *Erzeugenden* der Fläche sind.

Der Ort der von einem Punkte x_0, y_0, z_0 des Raumes an die Fläche § 7, (1) gelegten Tangenten ist der *Berührungskegel* von P_0 an die Fläche. Seine Gleichung lautet:

(8) $$g^0 h(x - x_0, y - y_0, z - z_0) - \{g_1^0(x - x_0) + g_2^0(y - y_0) + g_3^0(z - z_0)\}^2 = 0,$$

wo h wieder die Bedeutung § 7, (10) hat, oder:

(9) $$g^0 g(x, y, z) - (g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 z + g_4^0)^2 = 0$$

oder bei homogener Schreibweise (Hesse, *Vorles. Raum* 171):

(10) $$f^0 f(x, y, z, t) - (f_1^0 x + f_2^0 y + f_3^0 z + f_4^0 t)^2 = 0.$$

Zwischen Mittelpunkt x_0, y_0, z_0 und Richtung α, β, γ einer *Sehne* $S_1 S_2$ der Fläche besteht nach (2) die Gleichung:

(11) $$g_1^0 \alpha + g_2^0 \beta + g_3^0 \gamma = 0.$$

Daher ist der *Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen* von der Richtung α, β, γ eine Ebene:

$$(12) \qquad \alpha g_1(x, y, z) + \beta g_2(x, y, z) + \gamma g_3(x, y, z) = 0,$$

welche *die der Richtung* α, β, γ *konjugierte Ebene* heißt.

Wenn die Gleichung (11) identisch in α, β, γ besteht, so ist der Punkt x_0, y_0, z_0 Mittelpunkt *jeder* durch ihn gehenden Sehne und daher *Mittelpunkt der Fläche.* Der Mittelpunkt der Fläche ist daher durch die Gleichungen bestimmt:

$$(13) \qquad g_1 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = 0.$$

§ 9. Einteilung nach dem Rang.

Die Tangentialebene der Fläche 2. Ordnung im Punkte x_0, y_0, z_0, t_0 wird unbestimmt, wenn alle Koeffizienten der Gleichung § 8, (6) verschwinden. Ein solcher Punkt heißt ein *singulärer* oder *Doppelpunkt* der Fläche. Er ist vollkommen charakterisiert durch die *vier Gleichungen*:

$$(1) \qquad f_i(x, y, z, t) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t = 0,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, welche schon zur Folge haben, daß er auf der Fläche selbst liegt, da identisch:

$$(2) \qquad f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_4 t = f.$$

Die *Anzahl* der Doppelpunkte hängt von dem *Rang der Fläche* ab. Der Rang der Fläche ist gleich dem *Rang ihrer Determinante* A in § 7, (6), nämlich der größten Zahl r von der Art, daß nicht alle Unterdeterminanten r^{ten} Grades verschwinden. Er ist also $r = 4$, wenn die Determinante 4. Grades A selbst $\neq 0$; $r = 3$, wenn $A = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten 3. Grades A_{kl} verschwinden; $r = 2$, wenn $A = 0$, alle $A_{kl} = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten 2. Grades α_{kl} verschwinden; $r = 1$, wenn $A = 0$, alle $A_{kl} = 0$, alle $\alpha_{kl} = 0$, aber nicht alle Elemente a_{kl} verschwinden.

Je nachdem $r = 4, 3, 2$ oder 1 ist, hat die Fläche *keinen* oder *einen* Doppelpunkt oder ∞^1 oder ∞^2 Doppelpunkte.

Die Flächen *ohne* Doppelpunkte heißen *eigentliche* Flächen 2. Ordnung. Die Flächen mit *einem* Doppelpunkt erweisen

sich als *Kegel* 2. Ordnung, deren Spitze der Doppelpunkt ist. Kegel mit unendlich ferner Spitze sind Zylinder. Die Flächen mit ∞^1 Doppelpunkte sind *Ebenenpaare*; die Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Paares bildet die Reihe der ∞^1 Doppelpunkte. Die Flächen mit ∞^2 Doppelpunkten sind *Doppelebenen*, alle ∞^2 Punkte der Fläche sind dann Doppelpunkte. Über die Rangeinteilung s. Gundelfinger in Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 449.

Die Bedingungen der verschiedenen Fälle sind, wenn wir unter „$A_{kl} = 0!$" und „$A_{kl} \neq 0!$" verstehen, daß „*alle* $A_{kl} = 0$" und „*nicht alle* $A_{kl} = 0$":

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
& A \neq 0\text{: eigentliche Flächen 2. Ordnung,} \\
& A = 0, \quad A_{kl} \neq 0!\text{:} \quad \text{Kegel 2. Ordnung,} \\
& \phantom{A = {}} 0, \quad A_{kl} = 0!, \quad \alpha_{kl} \cdot \quad 0!\text{: Ebenenpaare,} \\
& A = 0, \quad A_{kl} = 0!, \quad \alpha_{kl} \cdot \quad 0!, \quad a_{kl} \neq 0!\text{: Doppelebenen.}
\end{aligned}
$$

Führt man für die *Summen der Hauptunterdeterminanten* die Abkürzungen ein:

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
A' &= A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}, \\
A'' &= \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66}, \\
A''' &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},
\end{aligned}
$$

so können die drei letzten Fälle (3) (bei reellen a_{kl}) auch durch folgende Merkmale bezeichnet werden:

$$
(5) \qquad \begin{cases}
A = 0, \quad A' \neq 0\text{: Kegel 2. Ordnung,} \\
A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' \neq 0\text{: Ebenenpaare,} \\
A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \quad A''' \neq 0\text{: Doppelebenen.}
\end{cases}
$$

Beide Formen (3) und (5) der *Bedingungen des Ranges* sind *von dem Koordinatensystem*, auf das sich die Gleichung der Fläche bezieht, ganz *unabhängig* und gelten für recht- oder schiefwinklige gemeine Koordinaten, sowie für Tetraederkoordinaten.

Die Flächen 2. Klasse, bei denen einem Doppelpunkt eine *Doppelebene* entspricht, zerfallen unter den gleichen Bedingungen in *eigentliche Flächen 2. Klasse, Kegelschnitte* als Umhüllungsgebilde ihrer ∞^2 Tangentialebenen, die büschelweise durch

ihre Tangenten gehen, *Punktepaare* als Ebenenbündel und *Doppelpunkte*.

Die eigentlichen Flächen zweiter Ordnung sind stets auch eigentliche Flächen zweiter Klasse und umgekehrt. Die Fläche 2. Ordnung § 7, (2) hat als Fläche 2. Klasse, in Ebenenkoordinaten die Gleichung:

$$(6)\quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv + 2A_{14}us + 2A_{24}vs + 2A_{34}ws + A_{44}s^2 = 0.$$

Ihr genügen alle Tangentialebenen der Fläche (Plücker, *System d. anal. Geom. d. R.* (1846), 321).

Wie die Fläche selbst, wird auch ihre *Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene:*

$$(7)\quad h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0, \qquad t = 0$$

nach dem *Range* eingeteilt. Sie ist, dem Range 3, 2 oder 1 entsprechend, für:

$$(8)\quad \begin{aligned} &A_{44} \neq 0\text{: ein eigentlicher Kegelschnitt,}\\ &A_{44} = 0, \quad A'_{44} \neq 0\text{: ein Geradenpaar,}\\ &A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0\text{: eine Doppelgerade.}\end{aligned}$$

Dabei sind für die *Summen der Hauptunterdeterminanten* von A_{44} die Abkürzungen gebraucht:

$$(9)\quad A'_{44} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \qquad A''_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Unter Weglassung der Gleichung $t = 0$ in (7) ist damit zugleich die Einteilung der *Kegel 2. Ordnung* im Bündel gegeben, die nach ihrem Range *eigentlich Kegel 2. Ordnung*, oder *Ebenenpaare* oder *Doppelebenen* sind. Entsprechend zerfallen die *Kegel 2. Klasse* im Bündel in *eigentliche Kegel 2. Klasse*, *Strahlenpaare* als Ebenenbüschel und *Doppelstrahlen*.

§ 10. Das Hauptachsenproblem.

Es handelt sich nunmehr um die Frage, ob die in §§ 1—3 bebeschriebenen Flächen den Inhalt der allgemeinen Gleichung § 7, (1)

erschöpfen, oder ob es noch andere Flächen 2. Ordnung gibt. Der natürliche Weg zur Entscheidung dieser Frage, den Euler, *Introd.* 2, App. einschlug, ist der der *Koordinatentransformation.*

Wenn die auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ bezogene Gleichung § 7, (1) durch die Substitution:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y &= y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z &= z_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \end{aligned}$$

auf ein neues recht- oder schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$ transformiert wird, deren Anfangspunkt Ω die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und dessen Achsen ξ, η, ζ die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben, so erhält sie zunächst wieder dieselbe Form:

$$(2)\qquad \begin{aligned} g \equiv a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{23}\eta\zeta + 2a'_{31}\zeta\xi + 2a'_{12}\xi\eta \\ + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0. \end{aligned}$$

Die neuen Koeffizienten a'_{kl} hängen von den alten a_{kl} und den Substitutionskoeffizienten in (1) ab. Über die letzteren wird man nun so zu verfügen suchen, daß ein Teil der Koeffizienten a'_{kl} verschwindet.

Nun hängen die *sechs ersten Koeffizienten* a'_{kl} einerseits nur von den *sechs ersten* a_{kl} und andererseits *nicht von dem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0, z_0$, sondern *lediglich von den Richtungen* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *der Achsen* ξ, η, ζ ab. Diese bilden nun ein System von *Hauptachsenrichtungen* der Fläche, wenn sie zueinander senkrecht stehen und die drei Bedingungen erfüllen:

$$(3)\qquad a'_{23} = 0, \qquad a'_{31} = 0, \qquad a'_{12} = 0.$$

Die Koeffizienten $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$, die danach mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnet sein mögen, heißen die zugehörigen *Hauptachsenkoeffizienten.*

Es sollen also ohne Rücksicht auf den Anfangspunkt Ω nur die Richtungen der Achsen ξ, η, ζ des neuen Systems $\Omega\xi\eta\zeta$ so bestimmt werden, daß dieses wie das alte $Oxyz$ rechtwinklig wird und die Gleichung § 7, (1) durch die Substitution (1) übergeht in:

$$(4)\qquad \begin{aligned} g(x, y, z) \equiv \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta \\ + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0. \end{aligned}$$

Diese Aufgabe ist stets lösbar. Die drei Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3 sind die Wurzeln der in λ *kubischen Gleichung* (Cauchy, *Exercices* 4 (1829), 142):

$$(5)\qquad \Delta(\lambda)\quad \begin{array}{ccc} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33}-\lambda \end{array}\Bigg| = 0$$

oder entwickelt mit der Bezeichnung § 9, (9):

$$(6)\qquad \Delta(\lambda) = -\lambda^3 + A''_{44}\lambda^2 - A'_{44}\lambda + A_{44} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind stets *reell* (*Encyklopädie* der Math. W. III C 2, 9, s. auch den direkten Beweis bei *Staude*, Math. Ann. 61 (1905), 392).

Für eine *einfache* Wurzel können niemals alle drei Hauptunterdeterminanten $\Delta_{11}(\lambda)$, $\Delta_{22}(\lambda)$, $\Delta_{33}(\lambda)$ der Determinante $\Delta(\lambda)$ verschwinden. Für eine *zweifache* Wurzel verschwinden von selbst alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3$, aber nicht alle Hauptelemente $a_{11}-\lambda$, $a_{22}-\lambda$, $a_{33}-\lambda$ von $\Delta(\lambda)$. Für eine *dreifache* Wurzel verschwinden stets alle Elemente von $\Delta(\lambda)$.

Die Verhältnisse der Richtungskosinus α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ der zu dem Hauptachsenkoeffizienten λ_i gehörigen *Hauptachsenrichtung* bestimmen sich nunmehr aus den linearen Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_i + a_{12}\beta_i + a_{13}\gamma_i = 0, \\ a_{21}\alpha_i + (a_{22}-\lambda_i)\beta_i + a_{23}\gamma_i = 0, \\ a_{31}\alpha_i + a_{32}\beta_i + (a_{33}-\lambda_i)\gamma_i = 0. \end{cases}$$

Hat nun die Gleichung (5) drei verschiedene Wurzeln, so besitzt die Fläche drei bis auf die Pfeilspitze eindeutig bestimmte Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ mit den Richtungskosinus:

$$(8)\qquad \alpha_i : \beta_i : \gamma_i = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i),$$

wo nach Belieben $k = 1$, 2 oder 3 genommen werden kann. Sind zwei Wurzeln gleich $(\lambda_1 = \lambda_2)$ und eine verschieden (λ_3), so hat die Fläche eine bestimmte zu λ_3 gehörige Hauptachsenrichtung ζ, während die beiden andern zwei beliebige zu diesen und unter sich senkrechte Richtungen sein können. Sind alle drei Wurzeln gleich, so sind je drei rechtwinklige Richtungen Hauptachsenrichtungen.

Danach zerfallen die Flächen 2. Ordnung in dreiachsige, einachsige und unbestimmtachsige.

Die unbestimmtachsigen:

$$(9)\quad \lambda_1(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+2a'_{14}\xi+2a'_{24}\eta+2a'_{34}\zeta+a'_{44}=0$$

sind für $\lambda_1 \neq 0$ die *Kugelflächen*:

$$(10)\qquad (\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2-r^2=0,$$

für $\lambda_1 = 0$, homogen gemacht in ξ, η, ζ, τ in der Form § 7, (2), ein *Ebenenpaar*, das aus *einer endlichen* und *der unendlich fernen Ebene* besteht, oder die *unendlich ferne Doppelebene.*

Jede Kugel (10) schneidet die unendlich ferne Ebene $\tau = 0$ in einem vom Mittelpunkt a, b, c und Radius r ganz unabhängigen eigentlichen imaginären Kegelschnitt:

$$(11)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0,\qquad \tau=0,$$

dem *imaginären Kugelkreise.*

Im allgemeinen schneidet die Fläche (4) die unendlich ferne Ebene in dem Kegelschnitt:

$$(12)\qquad \lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=0,\qquad \tau=0,$$

der mit dem Kugelkreis (11) die Punkte:

$$(13)\qquad \xi^2:\eta^2:\zeta^2=\lambda_2-\lambda_3:\lambda_3-\lambda_1:\lambda_1-\lambda_2$$

gemein hat. Ist die Fläche (4) dreiachsig ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$), so sind dies vier getrennte Punkte. Ist sie einachsig ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), so sind es zwei mal zwei zusammenfallende:

$$(14)\qquad \xi^2+\eta^2=0,\qquad \zeta^2=0,\qquad \tau=0.$$

Die *dreiachsigen Flächen* schneiden den imaginären Kugelkreis in *vier getrennten Punkten* S_1, S_2, S_3, S_4. Die drei Nebenecken des vollständigen Vierecks dieser Punkte bilden das gemeinsame Polardreieck (s. II, XII § 1, 247) der Kegelschnitte (11) und (12) und sind die unendlich fernen Punkte der Richtungen der drei Hauptachsen (*Poncelet*, Traité (1822), art. 621).

Die *einachsigen Flächen* (Rotationsflächen) *berühren* den imaginären Kugelkreis *in zwei Punkten* $S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$. Die Ebenen

durch die Berührungssehne $S_1 S_2$ sind die Normalebenen der einen bestimmten Hauptachse (Rotationsachse).

Die *unbestimmtachsigen Flächen* enthalten den imaginären Kugelkreis ganz.

Das Hauptachsenproblem der Fläche 2. Ordnung deckt sich danach mit der Frage nach dem *gemeinsamen Polardreieck* der unendlich fernen Kurve (12) und des Kugelkreises (11). Es gibt entweder ein oder ∞^1 oder ∞^3 solcher Polardreiecke. Dies beruht darauf, daß die eine Kurve (11) eine imaginäre eigentliche ist und daher die *Elementarteilerexponenten* der Büscheldeterminante (5) die Werte 1, 1, 1 haben (*Staude,* Teubners Sammlung XXX, 256).

Bezieht sich die ursprüngliche Gleichung § 7, (1) auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ mit den Achsenwinkelkosinus:

$$(15) \qquad \alpha = \cos yz, \qquad \beta = \cos zx, \qquad \gamma = \cos xy,$$

so sind die Hauptachsenkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in der auf die Hauptachsenrichtungen bezogenen Gleichung (4) die Wurzeln der kubischen Gleichung (Gundelfinger, *Nouv. Ann.* (3) **13** (1884), 7):

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} - \gamma\lambda & a_{13} - \beta\lambda \\ a_{21} - \gamma\lambda & a_{22} - \lambda & a_{23} - \alpha\lambda \\ a_{31} - \beta\lambda & a_{32} - \alpha\lambda & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten dieser durch:

$$(17) \qquad S^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma = \sin^2 xyz$$

dividierten Gleichung, also:

$$(18) \qquad \frac{A_{44}}{S^2},$$

$$\frac{a_{11}(1-\alpha^2)+a_{22}(1-\beta^2)+a_{33}(1-\gamma^2)+2a_{23}(\beta\gamma-\alpha)+2a_{31}(\gamma\alpha-\beta)+2a_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^2}$$

$$\frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + 2\alpha_{23}\alpha + 2\alpha_{31}\beta + 2\alpha_{12}\gamma}{S^2}$$

haben in jedem gemeinen Koordinatensystem $Oxyz$ (innerhalb der *affinen* Geometrie) denselben Wert, falls α, β, γ die jedesmaligen

Achsenwinkelkosinus sind. Insbesondere ist dabei in jedem rechtwinkligen System (innerhalb der *äquiformen* Geometrie):

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \qquad S = 1.$$

(*Staude,* Teubner-Samml. XXX, 499).

§ 11. Die kanonischen Gleichungen.

Die auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ bezogene Gleichung § 7, (1) erhält in einem neuen rechtwinkligen System $\Omega\xi\eta\zeta$ die Form § 10, (4), falls ohne Rücksicht auf die Wahl des neuen Anfangspunktes Ω die neuen Achsen die Hauptachsenrichtungen der Fläche erhalten, die ein- oder mehrdeutig, aber unter allen Umständen vorhanden sind.

Von der Verfügung über Ω hängen nur noch die Koeffizienten a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{44} in § 10, (4) ab. Von diesen verschwinden die drei ersten *alle drei* immer dann und nur dann, wenn als Anfangspunkt Ω ein (endlicher) *Mittelpunkt* der Fläche gewählt wird.

Zugleich erhält dann a'_{44} einen bestimmten Wert, der bei mehr als einem Mittelpunkt von der Auswahl desselben unabhängig ist. Infolge der Bedingungen für mehr Mittelpunkte verschwinden dann von selbst auch noch einer oder mehrere der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Die entstehenden Formen der Gleichung § 10, (4) und ihre jedesmaligen Bedingungen sind folgende:

$A_{44} \neq 0$: ein endlicher Mittelpunkt mit den Punktkoordinaten:

(1) $$x = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \qquad y = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \qquad z = \frac{A_{34}}{A_{44}};$$

(2) $$g(x, y, z) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + {}^{A} \qquad 0.$$

$A_{44} = 0$, $A = 0$, $A'_{44} \neq 0$: eine endliche Mittelpunktsachse mit den Achsenkoordinaten:

(3) $$q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6},$$

$k = 1, 2$ oder 3;

(4) $$g(x, y, z) = \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A'}{A'_{44}} = 0.$$

$A_{44} = 0$, $A = 0$, $A'_{44} = 0$, $A' = 0$, $A''_{44} \neq 0$: eine endliche Mittelpunktsebene mit den Ebenenkoordinaten:

(5) $$u : v : w : s = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4},$$

$k = 1, 2$ oder 3;

(6) $$g(x, y, z) = \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} \quad 0.$$

$A_{44} = 0$, $A = 0$, $A'_{44} = 0$, $A' = 0$, $A''_{44} = 0$, $A'' = 0$, $a_{44} \neq 0$: unbestimmter Mittelpunkt;

(7) $$g(x, y, z) = a_{44}\tau^2 \quad \text{(in homog. Koord. } \xi, \eta, \zeta, \tau).$$

Ist kein endlicher Mittelpunkt vorhanden, so kann den homogen gemachten Gleichungen § 8, (13) durch einen oder mehr unendlich ferne Punkte genügt werden. Es können dann in § 10, (4) nur zwei von den Koeffizienten a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, daneben aber a'_{44} verschwinden. Unter den folgenden Bedingungen entstehen dann die weiteren Gleichungen:

$A_{44} = 0$, $AA'_{44} \neq 0$: ein unendl. ferner Mittelpunkt in der Richtung:

(8) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A_{14} : A_{24} : A_{34} = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3},$$

$k = 1, 2$ oder 3;

(9) $$g(x, y, z) = \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 - 2\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}}\,\xi = 0.$$

$A_{44} = 0$, $A = 0$, $A'_{44} = 0$, $A'A''_{44} \neq 0$: eine unendlich ferne Mittelpunktsachse von der Stellung:

(10) $$\alpha : \beta : \gamma = \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6} = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3},$$

$k = 1, 2$ oder 3:

(11) $$g(x, y, z) = \lambda_3 \zeta^2 + 2\sqrt{-\frac{A'}{A''_{44}}}\,\xi = 0.$$

$A_{44} = 0$, $A = 0$, $A'_{44} = 0$, $A' = 0$, $A''_{44} \quad 0$, $A'' \neq 0$: eine unendlich ferne Mittelpunktsebene:

(12) $$g(x, y, z) = 2\sqrt{-A''} \cdot \xi = 0.$$

Die Gleichung § 7, (1) kann stets auf eine und nur auf eine der sieben Formen (2), (4), (6), (7), (9), (11), (12) gebracht werden. Nach dem Range der Fläche selbst und dem Range ihrer unendlich fernen Kurve ordnen sich diese kanonischen Formen in folgende Tabelle:

(13)

Rang der Fläche: / Rang der unendl. f. Kurve:	I. $A \neq 0$: Eigentl. Flächen 2. Ordnung.	II. $A = 0,\ A' \neq 0$: Kegel und Zylinder.	III. $A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$: Ebenenpaare.	IV. $A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0$: Doppelebenen.
1. $A_{44} \neq 0$: Eigentl. Kurve 2. Ordnung.	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$	*	*
2. $A_{44} = 0,\ A'_{44} \neq 0$: Getr. Geradenpaar.	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 - 2\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}}\,\xi = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A'}{A'_{44}} = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$	*
3. $A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} \neq 0$: Doppelgerade.	* *	$\lambda_3 \zeta^2 + 2\sqrt{-\frac{A'}{A''_{44}}}\,\eta = 0$	$\lambda_3 \zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$	$\lambda_3 \zeta^2 = 0$
4. $A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} = 0$: Unbestimmt.	* *	* *	$2\sqrt{-A''}\,\zeta\tau = 0$	$\tau^2 = 0$

Von den Koeffizienten kann unter den bezüglichen Bedingungen keiner mehr verschwinden. In der Tat bedeutet der *Rang* der Fläche auch die *niedrigste Zahl* homogener Koordinaten in der Gleichung der Fläche.

Die Herstellung der kanonischen Gleichungen aller Fälle bahnt Cauchy, *Applic.* **1** (1826), 253; *Exerc.* **3** (1828), 87 an, s. Hesse,

(14)

	I. $B \neq 0$: Eigentl. Flächen 2. Klasse	II. $B = 0$, $B' \neq 0$: Eigentl. Kurven 2. Klasse	III. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' \neq 0$: Eigentl. Punktep.	IV. $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, $B''' \neq 0$: Doppelpunkte
1. $b_{44} \neq 0$: E_∞ nicht Tang.-Ebene	$\mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$	$\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$	$\mu_3 w'^2 + b_{44} s'^2 = 0$	$b_{44} s'^2 = 0$
2. $b_{44} = 0$, $B_0 \neq 0$: E_∞ einf. Tang.-Ebene	$\mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-B_0}\, u' s' = 0$	$\mu_3 w'^2 + 2\sqrt{-B_0}\, u' s' = 0$	$2\sqrt{-B_0}\, u' s' = 0$	0
3. $b_{44} = 0$, $B_0 = 0$: E_∞ Doppel-tang.-Ebene	0	$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$	$\nu_2 v'^2 + \nu_3 w'^2 = 0$	$\nu_3 w'^2 = 0$

Vorles. Raum 253; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 532). In ähnlicher Weise kann die Gleichung § 7, (3) der Fläche 2. Klasse

(1)

		$A \neq 0$: Eigentliche Flächen.		
		$A > 0$		$A < 0$:
		$A'_{44} > 0$, $A' A''_{44} > 0$: I. Imag. Fl.	A'_{44}, $A' A''_{44}$ nicht beide > 0: II. Geradl. Fl.	III. Nichtgeradl. Fl.
$A_{44} \neq 0$: Eigentl. Kegelschn.	$A'_{44} > 0$, $A_{44} A''_{44} > 0$: 1. Imag. Kegelschn.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipsoid		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Ellipsoid
	A'_{44}, $A_{44} A''_{44}$ nicht beide > 0: 2. Reell. Kegelschn.		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Einsch. Hyperb.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Zweisch. Hyp.
$A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0$: Eigentl. Linienpaar	$A'_{44} > 0$: 3. Imag. Linienpaar			$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\xi = 0$ Ell. Paraboloid
	$A'_{44} < 0$: 4. Reell. Linienpaar		$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\xi = 0$ Hyp. Parabol.	
$A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} \neq 0$, 5. Doppellinie				
$A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} = 0$: 6. Unbestimmt				

durch Koordinatentransformation auf eine der Formen der Tabelle (14), S. 571, gebracht werden.

$A=0,\ A'\neq 0$: Kegel		$A=0,\ A'=0,\ A''\neq 0$: Ebenenpaare		$A=0,\ A'=0,$ $A''=0,$ $A'''\neq 0$:
$A'_{44}>0,$ $A'A''_{44}>0$: IV. Imag. Kegel	$A'_{44},\ A'A''_{44}$ nicht beide >0: V. Reelle Kegel	$A''>0$: VI. Im. Ebenenp.	$A''<0$: VII. Reell. Eb.-P.	VIII. Dopp.-Eb.
$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$ Imag. ell. Kegel				
	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$ Ellipt. Kegel			
$\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}+1=0$ Imag. ell. Zylind.	$\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1=0$ Ellipt. Zylind.	$\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$ Im. Ebenenp.		
	$\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1=0$ Hyperb. Zylind.		$\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$ Reell. Eb.-P.	
	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2}+2\eta=0$ Parab. Zylind.	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2}+1=0$ Im. Paralleleb.-P	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2}-1=0$ R. Paralleleb.-P.	$\zeta^2=0$ Endl. Dopp.-Eb.
			$\zeta(\tau)=0$ Endl. + u. f. Eb.	$(\tau^2)=0$ u. f. Dpp.-Eb.

Hier haben B', B'', B''' für die Determinante B die entsprechende Bedeutung wie § 9, (4) und ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\mathsf{B}_0 = \beta_{44} + \beta_{55} + \qquad (15)$$

(§ 7, (8)). Die Koeffizienten μ_1, μ_2, μ_3 sind die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

und ν_1, ν_2, ν_3 die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\nu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\nu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\nu \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Plücker, *Syst. d. anal. Geom. Raum* (1846), 191; Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 173; Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum* 204; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 563.

§ 12. Unterscheidung nach den Vorzeichen.

Aus der Regel des Descartes (I, 1, S. 346, Satz 3) lassen sich die Vorzeichen der Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der Gleichung § 10, (6) bestimmen. Mit Rücksicht darauf ergibt sich alsdann die weitere Gliederung (1), S. 572/3, der Tabelle § 11, (13), in der nun die Koeffizienten je nach ihrem Vorzeichen als positive oder negative Quadrate reeller Größen α, β, γ bezeichnet sind.

Die Anordnung ist so getroffen, daß z. B. der elliptische Zylinder derjenige reelle Kegel (V. Kolonne) ist, der die unendlich ferne Ebene in einem imaginären Linienpaar (3. Zeile) schneidet. Die Tabelle erschöpft *alle Flächen* 2. Ordnung, welche in der auf ein rechtwinkliges System bezogenen Gleichung § 7, (1) enthalten sind, und gibt die Bedingungen an, unter denen diese Gleichung die eine oder andere Art darstellt. In den freien Feldern widersprechen sich Zeilen- und Kolonnenbedingungen.

Die Bedingungen der I. und IV., II. und V. Kolonne können auch in der Form:

$$\text{(2)} \qquad \text{I, IV:} \quad A'' > 0, \; A'A''' > 0;$$
$$\text{II, V:} \quad A'', \; A'A''' \text{ nicht beide } > 0$$

gegeben werden. Die Tabelle gilt dann nicht nur für *rechtwinklige* Koordinaten x, y, z in der Ausgangsgleichung § 7, (1), sondern auch für *schiefwinklige*, wie überhaupt für beliebige *Tetraederkoordinaten*, deren Tetraeder als vierte Seitenfläche die unendlich ferne Ebene hat.

Gundelfinger in Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 465; Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum* 161; Timerding, *J. f. Math.* **122** (1900), 172; Koehler, *Arch. Math. Phys.* (3) **3** (1902), 21; Heffter, *J. f. Math.* **126** (1903), 83; Gundelfinger, *J. f. Math.* **127** (1904), 85; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 539.

§ 13. Unterarten der Flächen zweiter Ordnung.

Die Fläche § 7, (1) ist eine *Rotationsfläche*, wenn zwei Wurzeln der kubischen Gleichung § 10, (5) gleich sind oder, auf die ursprünglichen Koeffizienten übertragen, wenn entweder keiner der drei Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} verschwindet und dann:

$$\text{(1)} \; a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23} : a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31} : a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12} = a_{23} : a_{31} : a_{12},$$

oder zwei, etwa a_{31} und a_{12}, verschwinden und dann:

$$\text{(2)} \qquad (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = 0,$$

oder alle drei verschwinden und dann zwei von den Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} gleich sind (Cauchy, *Exerc.* **3** (1828), 10; 20; Hesse, *Vorl. Raum* (3. Aufl.), 282).

Die Fläche § 7, (1) ist eine *Kugelfläche*, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, oder:

$$\text{(3)} \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33}; \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

Die Fläche § 7, (1) heißt *gleichseitig*, wenn:

$$\text{(4)} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

oder in den ursprünglichen Koeffizienten ausgedrückt:

$$\text{(5)} \qquad A''_{44} = 0;$$

dual gleichseitig, wenn:

$$(6) \qquad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$$

oder:

$$(7) \qquad A'_{44} = 0 \quad (A_{44} \neq 0).$$

Gleichseitig können die beiden Hyperboloide, der elliptische Kegel, das hyperbolische Paraboloid, der hyperbolische Zylinder und das reelle Ebenenpaar sein, dual gleichseitig die beiden Hyperboloide und der elliptische Kegel.

Der Kegel und das einschalige Hyperboloid:

$$(8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad 0; \qquad (9) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sind gleichseitig, wenn:

$$(10) \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Sie haben die charakteristische Eigenschaft, daß es zu jeder Erzeugenden zwei zu dieser und unter sich senkrechte, also ∞^1 Tripel senkrechter Erzeugender gibt.

Die Flächen (8) und (9) sind dual gleichseitig, wenn

$$(11) \qquad a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Der Kegel hat dann die charakteristische Eigenschaft, daß es zu jeder Tangentialebene zwei zu dieser und unter sich senkrechten Tangentialebenen gibt (Magnus, *Aufg.* 2 (1837), 323; Schröter, *Oberfl.*, (1. Aufl.) 195; über den Zusammenhang mit der Theorie der gleichseitig hyperbolischen Schnitte Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 628).

Die Fläche § 7, (1) ist *orthogonal*, wenn:

$$(12) \qquad (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)$$

oder:

$$(13) \qquad A''^3_{44} - 4A'_{44}A''_{44} + 8A_{44} \quad 0$$

und *dual orthogonal*, wenn:

$$(14) \ (\lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1)(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2) = 0$$

oder:

$$(15) \qquad A'^3_{44} - 4A_{44}A'_{44}A''_{44} + 8A^2_{44} = 0.$$

Der Kegel und das Hyperboloid (8) und (9) sind orthogonal, wenn mit $a^2 > b^2$:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0. \tag{16}$$

Beim Kegel stehen dann die beiden in der Hauptebene der kleinsten Öffnung liegenden, beim Hyperboloid die vier durch die Scheitel der großen Achse gehenden Erzeugenden auf den Kreisschnittebenen senkrecht (Schröter, *Oberfl.* (1. Aufl.) 184; 195; Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum.* 195; Entstehung der verschiedenen Erzeugungsarten bei Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 970, Anm. 165).

Vom Kegel (8) gibt es außer dem gleichseitigen, dual gleichseitigen, orthogonalen und dual orthogonalen als weitere Unterarten (immer $a^2 > b^2$ angenommen):

(17)

$b^2 = c^2$,	Kegel des *Pappus* mit zwei Büscheln von Ebenen, die in einem rechtwinkligen Geradenpaar schneiden;
$a^2 = c^2$,	Kegel des *Hachette* mit zwei Büscheln von Strahlen, durch die zwei rechtwinklige Tangentialebenen gehen;
$a^2 - 2b^2 + c^2 = 0$,	Kegel mit *rechtwinkligen Fokallinien;*
$\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{c^2} = 0$,	Kegel mit *rechtwinkligen Kreisschnittebenen* (Reye, *G. d. L.* **1**, (4. Aufl.) 260; Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 963, *Anm.* 143).

Von besonderen Flächen 2. Klasse ist der *imaginäre Kugelkreis:*

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0 \tag{18}$$

zu nennen, bezogen auf irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ (Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 338).

Kapitel XXVI.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und die Theorie ihrer ebenen Schnitte.[1])

Von *O. Staude* in Rostock.

§ 14. Harmonische Pole und Polarebene bei der Fläche zweiter Ordnung.

Die Fläche zweiter Ordnung § 7, (4):

$$(1) \qquad f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_k x_l = 0$$

wird von einer geraden Linie in zwei Punkten S_1 und S_2 geschnitten. Ist die Gerade als Verbindungslinie zweier, wie die Gleichung (1), in *Tetraederkoordinaten* gegebenen Punkten:

$$P_1 = x_k^{(1)} \quad \text{und} \quad P_2 = x_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

bestimmt, so sind die Koordinaten ihres laufenden Punktes durch einen Parameter λ in der Form $x_k^{(1)} + \lambda x_k^{(2)}$ dargestellt. Die Parameter der beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 bestimmen sich alsdann aus der quadratischen Gleichung:

$$(2) \qquad f_{11} + 2 f_{12}\lambda + f_{22}\lambda^2 = 0.$$

Hier sind f_{11} und f_{22} die Werte der quadratischen Form f für die Punkte P_1 und P_2 und ist:

$$(3) \quad f_{12} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = \sum_1^4{}^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = \sum_1^4{}^k f_k^{(1)} x_k^{(2)},$$

---

1) Des bequemen Rückverweisens wegen sind die Paragraphen von Kap. XXV bis Kap. XXVII durchlaufend numeriert.

worin $f_k^{(1)}$ und $f_k^{(2)}$ die für die Punkte P_1 und P_2 gebildeten linearen Ausdrücke:

$$(4) \qquad f_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1^4 {}^l a_{kl} x_l.$$

Unter der Bedingung:

$$(5) \qquad f_{12} = 0,$$

f_{11} und f_{22} nicht beide 0 vorausgesetzt, sind die gegebenen Punkte P_1 und P_2 zu den Schnittpunkten S_1 und S_2 harmonisch und heißen *harmonische Pole in bezug auf die Fläche.*

Auf jeder Geraden, die nicht ganz der Fläche angehört, gibt es ∞^1 Paare harmonischer Pole, die eine *Involution harmonischer Pole* mit den Doppelpunkten S_1 und S_2 bilden.

Der Ort aller harmonischen Pole P eines festen Punktes P_1 ist eine Ebene, die *Polarebene des Punktes*, mit der Gleichung:

$$(6) \qquad f_1^{(1)} x_1 + f_2^{(1)} x_2 + f_3^{(1)} x_3 + f_4^{(1)} x_4 = 0.$$

Sie ist die Ebene des Kegelschnittes, längs dessen der von P_0 an die Fläche gelegte Berührungskegel die Fläche berührt.

Ein Punkt liegt immer dann und nur dann mit seiner Polarebene *vereinigt,* wenn er ein *Punkt der Fläche* ist. Seine Polarebene ist dann die *Tangentialebene* in ihm.

In der durch $a_{kl} = a_{lk}$ bedingten Symmetrie der Bedingung (3) in bezug auf $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ liegt die *involutorische Eigenschaft von Pol und Polarebene* ausgesprochen: Von zwei harmonischen Polen liegt jeder in der Polarebene des andern.

Die *Koordinaten u_k der Polarebene des Punktes x_k* sind mit einem Proportionalitätsfaktor:

$$(7) \qquad \varrho u_k = f_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 + a_{k4} x_4.$$

Diese Gleichungen sind für $a_{kl} \neq a_{lk}$ der allgemeine Ausdruck der *reziproken Verwandtschaft (Korrelation)* im Raume. Von ihr gibt es zwei involutorische Spezialfälle, den hier vorliegenden $a_{kl} = a_{lk}$ und den Kap. XXIX, § 4 zu besprechenden $a_{kl} = -a_{lk}$. Die *Polarverwandtschaft in bezug auf eine Fläche 2. Ordnung* ist also ein *Spezialfall der Korrelation.*

Die Frage, inwieweit zu jedem Punkte x_k eine *bestimmte* Polarebene gehört, führt nach (7) wieder auf die *singulären* Punkte zurück, die nun als Punkte *unbestimmter Polarebene* erscheinen.

Die Polarsysteme unterliegen daher der Einteilung nach dem Range, wie die Flächen 2. Ordnung selbst.

Zwei harmonischen Polen bei der Fläche 2. Ordnung entsprechen dual zwei *harmonische Polarebenen* $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ *bei der Fläche 2. Klasse:*

$$(8) \qquad F = \sum_1^k \sum_1^l b_{kl} u_k u_l = 0.$$

Sie sind zu den beiden durch ihre Schnittlinie gehenden Tangentialebenen harmonisch und sind durch die Bedingung verknüpft:

$$(9) \qquad F_{12} = \sum_1^{k} \sum_1^{l} b_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0.$$

Alle zu einer festen Ebene harmonischen Polarebenen gehen durch einen Punkt, den *Pol* der festen Ebene.

Die Polarentheorie der Flächen 2. Ordnung beginnt bei Monge, *Géom. descr.* (1798/9), Ostwalds *Klassiker* **117**, 197 und wird von Gergonne, *Ann. de math.* **1** (1810/1), 337; **3** (1812/3), 293; **17** (1826/7), 273; Brianchon, *J. éc. polyt. cah.* **13** (1806), 297; Lamé, *Examen des méthodes* (1818), 48; Poncelet, *Traité* (1822), 180; 396 weitergeführt. Die Erkenntnis, daß die Polarverwandtschaft ein Spezialfall der Korrelation überhaupt ist, wird durch Moebius, *Werke* **1** (1827), 169—318, Plücker, *Abhandl.* **1**, 149; 178, 224; Steiner, *Werke* **1**, 305 gewonnen, auch bei Magnus, *Aufgaben* **2**, 127; Chasles, *Aperçu* (1837) 219; 370; 633.

§ 15. Allgemeine Polarentheorie der Flächen verschiedenen Ranges.

Das wesentliche Merkmal der Polarentheorie der *eigentlichen* Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse ist das Fehlen unbestimmter Polarelemente.

Zu jedem Punkt des Raumes gehört eine bestimmte Polarebene, der Ort aller harmonischen Pole des Punktes. Zu jeder Ebene des Raumes gehört ein bestimmter Pol, der Träger aller harmonischen Polarebenen der Ebene. Jeder Punkt ist der Pol seiner Polarebene, jede Ebene die Polarebene ihres Poles.

Zwischen *Pol* x_k und *Polarebene* u_k bestehen die Beziehungen:

$$(1)\quad \varrho u_k = \sum^{*}{}^{l} a_{kl} x_l, \qquad (2)\quad \sigma x_l = \sum^{*}{}^{k} A_{kl} u_k.$$

Beide Gleichungensysteme sind mit $\varrho\sigma = A$ wechselseitig Auflösungen voneinander.

Die Polarebenen der Punkte einer geraden Punktreihe bilden einen ihr projektiven Ebenenbüschel, die Pole der Ebenen eines Büschels eine ihm projektive Punktreihe. Die Achse des Büschels und die Gerade der Reihe entsprechen sich wechselseitig als *reziproke Polaren.* Es sind zwei Gerade, von denen jede die Schnittlinie der Polarebenen zweier Punkte der andern ist. Die Polarebenen der einen von zwei reziproken Polaren gehen durch die andere. Jeder Punkt der einen ist harmonischer Pol jedes Punktes der andern. Die Verbindungslinie zweier Punkte der Fläche hat als reziproke Polare die Schnittlinie der Tangentialebenen der beiden Punkte. Sind p_k und q_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ die Strahlen- und Achsenkoordinaten einer Geraden und p_k' und q_k' die der reziproken Polaren, so bestehen zwischen beiden die Beziehungen:

$$(3)\quad \varrho q_k' = \sum^{*}{}^{l} \alpha_{kl} p_l, \qquad (4)\quad \sigma p_l = \sum^{*}{}^{k} \mathsf{A}_{kl} q_k',$$

wo A_{kl} die Unterdeterminanten 2. Grades aus den A_{kl} sind.

Liegen *Pol* x_k *und Polarebene* u_k *vereinigt*, so ist jener ein Punkt der Fläche und diese die Tangentialebene in ihm. Eliminiert man daher u_k mittels (1) oder x_k mittels (2) aus der Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Ebene:

$$(5)\qquad \sum^{*}{}^{k} u_k x_k = 0,$$

so erhält man die *Gleichung der Fläche in Punkt- oder Ebenenkoordinaten*:

$$(6)\ f = \sum_1^{k} \sum_1^{l} a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (7)\ F = \sum_1^{*}{}^{k} \sum_1^{*}{}^{l} A_{kl} u_k u_l = 0.$$

Liegen *zwei reziproke Polaren vereinigt* (schneiden sie sich), so liegt ihr Schnittpunkt auf der Fläche, und sie sind beide *Tan-*

genten in ihm. Eliminiert man q_k' mittels (3) oder p_k' mittels (4) aus der Bedingung der vereinigten Lage zweier Geraden:

$$(8) \qquad \sum^{6} {}^{k}\, p_k q_k' = 0,$$

so erhält man die *Gleichung der Fläche in Strahlen- oder Achsenkoordinaten:*

$$(9)\ \varphi = \sum_1^6 {}^{k} \sum_1^6 {}^{l}\, \alpha_{kl} p_k p_l = 0. \qquad (10)\ \Phi = \sum_1^6 {}^{k} \sum_1^6 {}^{l}\, A_{kl} q_k q_l = 0.$$

Zwei sich schneidende reziproke Polaren sind „konjugierte" Tangenten. Sie sind zu den durch ihren gemeinsamen Berührungspunkt gehenden Erzeugenden harmonisch.

Fallen *zwei reziproke Polaren ganz zusammen*, so bilden sie eine *Erzeugende* der Fläche. Die Annahme $q_k' = q_k = p_{\bar{k}}$, unter $\bar{k}$ die komplementäre Variation zu k aus der Reihe § 7, (9) verstanden (z. B. $k = 23$, $\bar{k} = 14$), gibt aus (3) als Bedingungen für die Erzeugenden:

$$(11) \qquad \varrho p_{\bar{k}} = \sum^{6} {}^{k}\, \alpha_{kl} p_k.$$

Diese sechs Gleichungen sind aber nur für:

$$(12) \qquad = \varepsilon \sqrt{A}, \qquad \pm 1,$$

verträglich, zählen alsdann für drei unabhängige und bestimmen jede der beiden Scharen von Erzeugenden, die eine für $\varepsilon = +1$, die andere für $\varepsilon = -1$ als gemeinsame Geraden von drei linearen Komplexen. Es sind die *Gleichungen der beiden Regelscharen in Strahlenkoordinaten* (Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 824).

Konjugiert heißen *zwei Elemente*, wenn jedes mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt. Zwei harmonische Pole sind konjugierte *Punkte*, weil jeder in der Polarebene des andern liegt; zwei harmonische Polarebenen sind konjugierte *Ebenen*, weil jede durch den Pol der andern geht. Konjugierte *Gerade* sind solche, von denen jede die reziproke Polare der andern schneidet. Jede Gerade hat also ∞^3 konjugierte, die Transversalen ihrer reziproken Polare und auch diese letztere selbst. Zwischen zwei kon-

jugierten Punkten $x_k^{(1)}$, $x_l^{(2)}$, Ebenen $u_k^{(1)}$, $u_l^{(2)}$, Strahlen $p_k^{(1)}$, $p_k^{(2)}$ oder Achsen $q_k^{(1)}$, $q_k^{(2)}$ bestehen bezüglich die Bedingungen:

$$(13)\ f_{12} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0, \quad (14)\ F_{12} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0,$$

$$(15)\ \varphi_{12} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_k^{(1)} p_l^{(2)} = 0, \quad (16)\ \Phi_{12} = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l \mathrm{A}_{kl} q_k^{(1)} q_l^{(2)} = 0.$$

Es sind zugleich die Gleichungen der Polarebene des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_l^{(2)}$, des Poles der Ebene $u_k^{(1)}$ in laufenden Ebenenkoordinaten $u_l^{(2)}$, der reziproken Polare des Strahles $p_k^{(1)}$ in laufenden Strahlenkoordinaten $p_l^{(2)}$ und der Achse $q_k^{(1)}$ in laufenden Achsenkoordinaten $q_l^{(2)}$.

Die Polarentheorie des *Kegels* kommt im wesentlichen auf das *Polarbündel* an seiner Spitze zurück. In diesem entsprechen sich je ein Strahl und eine Ebene als *Polstrahl* und *Polarebene* wechselseitig eindeutig. *Zwei Strahlen* sind *konjugiert*, wenn der eine in der Polarebene der andern liegt, *zwei Ebenen* sind *konjugiert,* wenn die eine durch den Polstrahl der andern geht. Polstrahl und Polarebene liegen *vereinigt,* wenn jener eine Erzeugende des Kegels und diese die Tangentialebene längs der Erzeugenden ist.

Die Polarentheorie des *Ebenenpaares* kommt im wesentlichen auf die Ebeneninvolution zurück. Zwei Ebenen an der Achse des Paares entsprechen sich wechselseitig eindeutig als zwei zu dem Ebenenpaar harmonische Ebenen.

§ 16. Polarentheorie besonderer Flächen.

Bei dem *Ellipsoid* oder *Hyperboloid:*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - t^2 = 0,$$

das in Ebenen- und Strahlenkoordinaten die Gleichungen hat:

$$(2)\qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - s^2 = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{p_{23}^2}{b^2c^2} + \frac{p_{31}^2}{c^2a^2} + \frac{p_{12}^2}{a^2b^2} - \frac{p_{14}^2}{a^2} - \frac{p_{24}^2}{b^2} - \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0,$$

bestehen zwischen Pol x, y, z, t und Polarebene u, v, w, s die Beziehungen:

$$(4) \qquad \varrho u = \frac{x}{a^2}, \quad \varrho v = \frac{y}{b^2}, \quad \varrho w = \frac{z}{c^2}, \quad \varrho s = -t$$

und zwischen zwei reziproken Polaren:

$$(5) \qquad \begin{matrix} -\frac{p_{14}}{a^2}, & \varrho p'_{31} = -\frac{p_{24}}{b^2}, & \varrho p'_{12} = -\frac{p_{34}}{c^2}, \\ \varrho p'_{14} = \frac{p_{23}}{b^2c^2}, & \frac{p_{31}}{c^2a^2}, & \varrho p'_{24} = \frac{p_{12}}{a^2b^2}. \end{matrix}$$

Die Erzeugenden sind beim einschaligen Hyperboloid:

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die gemeinsamen Linien der drei linearen Komplexe:

$$(7) \qquad \frac{p_{23}}{bc} : \varepsilon p_{14} \qquad \frac{p_{31}}{ca} \quad \varepsilon p_{24} \qquad \frac{p_{12}}{ab} : \qquad \varepsilon p_{34}$$

wo $\varepsilon = 1$ für die eine und $\varepsilon = -1$ für die andere Schar ist.

Mit $a^2 = b^2 = c^2 = -1$ entsteht aus (4) das Polarsystem der Dualität in gemeinen Koordinaten:

$$(8) \qquad x : y : z : t = u : v : w : s.$$

Zwei sich in diesen entsprechende Flächen heißen *polarreziprok* in bezug auf den Ursprung 0. Die Reziproke einer Kugel in bezug auf einen beliebigen Ursprung 0 ist dann eine Rotationsfläche 2. Ordnung, deren einer Brennpunkt in 0 und deren Rotationsachse in den Leitstrahl $0M$ des Kugelmittelpunktes M fällt.

Bei dem *Paraboloid*:

$$(9) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2xt + at^2 = 0,$$

welches in Ebenen und Strahlen-Koordinaten die Gleichung hat:

$$(10) \qquad b^2v^2 + c^2w^2 + 2us - au^2 = 0,$$

$$(11) \quad \frac{p_{23}^2}{b^2c^2} - 2\frac{p_{12}p_{24}}{b^2} + 2\frac{p_{31}p_{34}}{c^2} - p_{14}^2 + a\frac{p_{24}^2}{b^2} + a\frac{p_{34}^2}{c^2} = 0,$$

bestehen zwischen Pol x, y, z, t und Polarebene u, v, w, s die Beziehungen:

$$(12) \qquad \varrho u = t, \quad \varrho v = \frac{y}{b^2}, \quad \varrho w = \frac{}{c^2}, \quad \varrho s = x + at$$

und zwischen zwei reziproken Polaren:

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\varrho p_{23}' = -p_{14}, \quad \varrho p_{31}' = -\frac{p_{12}}{b^2} + a\frac{p_{24}}{b^2}, \quad \varrho p_{12}' = \frac{p_{31}}{c^2} + a\frac{p_{34}}{c^2}, \\ &\varrho p_{14}' = \frac{p_{23}}{b^2 c^2}, \quad \varrho p_{24}' = \frac{p_{34}}{c^2}, \quad \varrho p_{34}' = -\frac{p_{24}}{b^2}. \end{aligned}$$

Die Erzeugenden sind beim hyperbolischen Paraboloid:

$$(14) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

die gemeinsamen Linien der drei Komplexe:

$$(15) \qquad p_{23} = \varepsilon b c p_{14}, \quad b p_{31} = \varepsilon c p_{12}, \quad \varepsilon p_{24} = \varepsilon b p_{34},$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1 ist.

Im Polarsystem des *Kegels:*

$$(16) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

entsprechen sich ein Polstrahl mit den Richtungskosinus α, β, γ und eine Polarebene mit den Stellungskosinus u, v, w nach den Gleichungen:

$$(17) \qquad u : v : w = \frac{\alpha}{a^2} : \frac{\beta}{b^2} : \frac{-\gamma}{}.$$

Es ist die Beziehung zwischen Durchmesser und konjugierter Diametralebene beim einschaligen Hyperboloid § 6, (2).

In bezug auf den *Kugelkegel:*

$$(18) \qquad x^2 + y^2 + \qquad 0,$$

„im orthogonalen Polarbündel“ stehen Polstrahl und Polarebene aufeinander senkrecht. Insbesondere entspricht dem Kegel (16) hier der *reziproke Kegel:*

$$(19) \qquad a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0,$$

dessen Tangentialebenen auf den Erzeugenden des Kegels (16) senkrecht stehen. Den Kreisschnitten des einen von zwei reziproken Kegeln entsprechen die Fokallinien des andern.

In bezug auf den *imaginären Kugelkreis:*

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0 \tag{20}$$

sind zwei Ebenen konjugiert (harmonische Polarebenen), wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Der Pol einer Ebene ist der gemeinsame unendlich ferne Punkt aller Normalen der Ebene.

§ 17. Der Achsenkomplex der Fläche zweiter Ordnung.

Die von Pol auf Polarebene gefällte Senkrechte heißt eine *Achse* der Fläche 2. Ordnung. Die Gesamtheit aller Achsen bildet den *Achsenkomplex.* Er besteht auch aus allen Geraden, die zu ihrer reziproken Polaren senkrecht sind.

Für das Ellipsoid oder Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1 \tag{1}$$

ist die Gleichung des Achsenkomplexes:

$$\alpha p_{23} p_{14} + \beta p_{31} p_{24} + \gamma p_{12} p_{34} = 0, \tag{2}$$

für das Paraboloid:

$$\frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + 2x + a = 0 \tag{3}$$

lautet sie:

$$p_{23} p_{14} + (\beta - \gamma) p_{24} p_{34} = 0. \tag{4}$$

Die durch einen festen Punkt P_0 gehenden Komplexstrahlen bilden einen *gleichseitigen Kegel 2. Ordnung* k. Die in einer Ebene Π_0 liegenden Komplexstrahlen umhüllen eine *Parabel* p.

Derjenige Punkt einer Achse, dessen Polarebene auf ihr senkrecht steht, heißt der *konjugierte Pol der Achse.* Der Ort der Pole der durch einen festen Punkt P_0 gehenden Achsen ist eine *gleichseitige kubische Hyperbel* (s. Kap. XXIX § 6), die auf dem Kegel k liegt. Dagegen erfüllen die Pole der in einer festen Ebene Π_0 liegenden Achsen eine gerade Linie, die Tangente der Parabel p ist.

In den ∞^3 Achsen der Fläche gehören auch ihre ∞^2 *Normalen,* da sie die in den Punkten der Fläche auf der zugehörigen Tangentialebene errichteten Senkrechten sind. Die Fußpunkte der *durch einen Punkt* P_0 *gehenden Normalen* sind die Schnittpunkte der kubischen Hyperbel mit der Fläche. Es sind beim Ellipsoid und Hyperboloid sechs, beim Paraboloid fünf.

Konfokale Flächen haben denselben Achsenkomplex. Der Achsenkomplex einer Fläche besteht auch aus den *Normalen aller zu ihr konfokalen Flächen.*

Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 223; Lie-Scheffers, *Berührungstransformationen* (1896), 271; 320.

§ 18. Polartetraeder und Quadratdarstellung.

Vier nicht in einer Ebene liegende Punkte, von denen jeder harmonischer Pol jedes andern ist, bestimmen ein *Polartetraeder* der Fläche 2. Ordnung.

Bei den *eigentlichen Flächen* 2. Ordnung und 2. Klasse sind je zwei Ecken, je zwei Seitenflächen und je zwei Kanten eines Polartetraeders konjugiert. Jede Ecke ist der Pol der gegenüberliegenden Seitenfläche, jede Seitenfläche die Polarebene der gegenüberliegenden Ecke, jede Kante die reziproke Polare der gegenüberliegenden Kante. Es gibt ∞^6 Polartetraeder.

Beim *Kegel* fällt eine Ecke in die Spitze, beim *Ebenenpaar* fallen zwei Ecken in die Achse und bei der *Doppelebene* drei Ecken eines Polartetraeders in diese selbst hinein.

Immer dann und nur dann, wenn die Gleichung der Fläche 2. Ordnung:

$$(1) \qquad f = \sum_1^k \sum_1^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

auf ein *Polartetraeder* transformiert wird, erhält sie die Form (Plücker, *Syst. anal. Geom. Raum* (1846), 88):

$$(2) \qquad f = f_{11} y_1^2 + \qquad + f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 = 0,$$

in der nur die *Quadrate* der neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 vorkommen. Die Koeffizienten f_{kk} sind die Werte der Form f in den Ecken des neuen Tetraeders.

Die *Anzahl der nicht verschwindenden Glieder* in der Gleichung (2) ist gleich dem *Rang* der Fläche.

Die Transformation der Fläche (1) auf die Quadratdarstellung (2) ist wegen der willkürlichen Wahl des Polartetraeders *auf* ∞^6 *Weisen* möglich, wobei jedesmal noch der *Einheitspunkt* der Tetraederkoordinaten willkürlich bleibt.

Zu demjenigen Polartetraeder, welches sich *am engsten an das ursprüngliche Koordinatentetraeder* der Gleichung (1) *anschließt*, leitet die „*Stufentransformation*“ (Jacobi, *Werke* **3**, 590; Plücker, Abhandl. **1**, 399):

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= y_1 - a_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3 + A_{14} y_4, \\
x_2 &= \phantom{y_1 - {}} a_{11} y_2 + \alpha_{23} y_3 + A_{24} y_4, \\
x_3 &= \phantom{y_1 - a_{11} y_2 + {}} \alpha_{33} y_3 + A_{34} y_4, \\
x_4 &= \phantom{y_1 - a_{11} y_2 + \alpha_{33} y_3 + {}} A_{44} y_4
\end{aligned}
$$

über, vorausgesetzt, daß:

$$
(4) \qquad a_{11} \alpha_{33} A_{44} \neq 0 .
$$

Durch sie wird die Gleichung der Fläche:

$$
(5) \qquad f = a_{11} y_1^2 + a_{11} \alpha_{33} y_2^2 + \alpha_{33} A_{44} y_3^2 + A_{44} A y_4^2 = 0 .
$$

Ein zweites ausgezeichnetes Polartetraeder ist dasjenige, welches die Fläche (1) mit der imaginären eigentlichen Fläche 2. Ordnung:

$$
(6) \qquad g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0
$$

gemein hat. Es wird bei der *orthogonalen Substitution* (Cauchy, *Exerc.* **4** (1829), 140; Jacobi, *Werke* **3**, 199; Hesse, *Vorl. Raum* 259; Weierstraß, *Berl. Ber.* 1858, 213):

$$
(7) \qquad x_k = \sum_m^{4} \frac{x_k^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}}
$$

benutzt, wo $x_k^{(m)}$ die Koordinaten der m^{ten} neuen Ecke sind und g_{mm} der Wert von g für dieselbe ist. Sie führt gleichzeitig (6) in:

$$
(8) \qquad g = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0
$$

und (1) in:

$$
(9) \qquad f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \lambda_4 y_4^2 = 0
$$

über. Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die stets reellen Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

$$(10)\qquad \varDelta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$(11)\qquad \varDelta(\lambda) = \lambda^4 - A'''\lambda^3 + A''\lambda^2 - A'\lambda + A = 0.$$

Die Koordinaten $x_k^{(m)}$ der m^{ten} Ecke des eingeführten Polartetraeders, von denen in (7) nur die Verhältnisse eingehen, werden ihren Verhältnissen nach durch die mit $\lambda = \lambda_m$ gebildeten Gleichungen bestimmt:

$$(12)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + a_{34}x_4 &= 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + (a_{44}-\lambda)x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Transformation ist stets möglich, da die Elementarteilerexponenten der Determinante (10) immer 1, 1, 1, 1 sind (Staude, *Teubners Samml.* XXX, 879).

Nach dem *Trägheitsgesetz* der quadratischen Formen ist die Anzahl der Koeffizienten von einerlei Vorzeichen in (2) immer dieselbe, welches auch das gewählte Polartetraeder sei. Die Flächen 2. Ordnung zerfallen mit Rücksicht auf diese Vorzeichen unter folgenden Bedingungen in folgende „*Spezies*“:

$A \neq 0$ {

$A > 0,\ A'' > 0,\ A'A''' > 0$:

I. $f = \alpha_1{}^2 y_1{}^2 + \alpha_2{}^2 y_2{}^2 + \alpha_3{}^2 y_3{}^2 + \alpha_4{}^2 y_4{}^2 = 0$, eig. imag. Flächen;

$A > 0,\ A'',\ A'A'''$ nicht beide > 0:

II. $f = \alpha_1{}^2 y_1{}^2 + \alpha_2{}^2 y_2{}^2 - \alpha_3{}^2 y_3{}^2 - \alpha_4{}^2 y_4{}^2 = 0$, eig. geradl. Flächen;

$A < 0$:

III. $f = \alpha_1{}^2 y_1{}^2 + \alpha_2{}^2 y_2{}^2 + \alpha_3{}^2 y_3{}^2 - \alpha_4{}^2 y_4{}^2 = 0$, eig. nicht geradl. Flächen;

$A = 0,\ A' \neq 0$:

$A'' > 0,\ A'A''' > 0$:

$$\text{IV. } f = \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 + \alpha_3^2 y_3^2 = 0,$$ imag. Kegel;

$A'', A'A'''$ nicht beide > 0:

$$\text{V. } f = \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 - \alpha_3^2 y_3^2 = 0,$$ reell. Kegel;

$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$:

$A'' > 0$:

$$\text{VI. } f = \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 = 0,$$ imag. Ebenenpaare;

$A'' < 0$:

$$\text{VII. } f = \alpha_1^2 y_1^2 - \alpha_2^2 y_2^2 = 0,$$ reell. Ebenenpaare;

$A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0$:

$$\text{VIII. } f = \alpha_1^2 y_1^2 = 0,$$ Doppelebenen.

Diese Spezies bilden auch die Kolonnen der Tabelle in § 12, (1).

Zu den Polartetraedern der Ellipsoide und Hyperboloide gehören auch die aus den Verbindungsebenen dreier konjugierten Durchmesser und der unendlich fernen Ebene bestehenden Tetraeder, auf die sich die Gleichung § 6, (4) bezieht.

§ 19. Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung durch Elementargebilde.

Die geradlinigen Flächen 2. Ordnung haben zwei Scharen von Erzeugenden. Die Punktreihen, in denen zwei feste Erzeugende der einen Schar von einer laufenden Erzeugenden der anderen geschnitten werden, sind projektiv. Die Ebenenbüschel, welche zwei feste Erzeugenden der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der anderen verbinden, sind projektiv.

Umgekehrt ist der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte *zweier projektiver Punktreihen*, sowie der Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen *zweier projektiver Ebenenbüschel* eine Regelschar einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung (Steiner, *Werke* **1**, 370).

Bei zwei reziproken Bündeln im Raume entsprechen den Strahlen des einen die Ebenen des anderen und umgekehrt den Ebenen des einen die Strahlen des anderen. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen und Ebenen *zweier reziproker Bündel* ist eine Fläche 2. Ordnung. In jedem der beiden

Bündel gibt es ein Paar von Strahlen, die je mit ihrer entsprechenden Ebene vereinigt liegen. Je nachdem dieses Paar reell oder imaginär ist, wird die erzeugte Fläche eine geradlinige oder nicht geradlinige. Dual umhüllen die Verbindungsebenen entsprechender Punkte und Strahlen zweier reziproker Ebenen eine Fläche 2. Klasse (Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* **9** (1847), 158; Schröter, *Oberfl.* (1880) 452).

Bei einer *polaren Verwandtschaft* im Raume entsprechen sich je ein Punkt und eine Ebene wechselseitig. Der Ort der Punkte und Ebenen, die mit ihren entsprechenden vereinigt liegen, ist eine Fläche 2. Ordnung und 2. Klasse.

Wenn eine Gerade an *drei festen windschiefen Geraden* gleitet, beschreibt sie die eine Regelschar eines einschaligen Hyperboloides. Ist die eine feste Gerade unendlich fern, so entsteht das hyperbolische Paraboloid (Magnus, *Aufg.* **2**, 277; Hesse, *Vorles. Raum* 113.)

Überhaupt bilden die gemeinsamen Geraden von *drei linearen Komplexen* die eine Regelschar einer Fläche zweiter Ordnung. Beide Regelscharen können nicht einem und demselben linearen Komplexe angehören. Dagegen gehört jede einzelne Regelschar ∞^2 linearen Komplexen an, die ein *dreigliedriges lineares System* bilden. Die Achsen der speziellen Komplexe der dreigliedrigen Systeme sind die beiden Regelscharen (Klein, *Math. Ann.* **2** (1869), 208).

§ 20. **Sechsseite auf dem Hyperboloid.**

Ein *unebenes Sechsseit* mit den Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 heißt ein *Pascalsches*, wenn die Schnittlinien je zweier Gegenebenen, 12 und 45, 34 und 61, 56 und 23, in einer Ebene, der Pascalebene, liegen; und heißt ein *Brianchonsches*, wenn die Verbindungslinien je zweier Gegenecken, 12 und 45, 34 und 61, 56 und 23, durch einen Punkt, den Brianchonpunkt, gehen.

Jedes unebene Pascalsche Sechsseit ist auch ein Brianchonsches und umgekehrt. Es liegt stets *auf einer Linienfläche zweiter Ordnung* derart, daß seine drei ungeraden Seiten 1, 3, 5 der einen und seine drei geraden Seiten 2, 4, 6 der anderen Regelschar angehören.

Umgekehrt ist jedes auf einer Linienfläche zweiter Ordnung verzeichnete Sechsseit ein Pascalsches und Brianchonsches unebenes Sechsseit. Pascalebene und Pascalpunkt sind Polarebene und Pol in bezug auf die Fläche.

Wenn man bei einem auf dem Hyperboloid liegenden Sechsseit die ungeraden Seiten festhält und die geraden Seiten auf alle Weisen vertauscht, so erhält man *sechs Sechsseite*, die in ihren Ebenen und Ecken verschieden sind. Die sechs Pascalebenen dieser Sechsseite gehen zu je drei durch zwei Gerade, und die sechs Brianchonpunkte liegen zu je drei auf denselben zwei Geraden. Diese selbst sind reziproke Polaren in bezug auf die Fläche (Hesse, *Werke* 58; 651; 676; Staude, *Teubners Samml.* XXX, 913).

§ 21. Der Rang der ebenen Schnittkurve und des Schnittpunktpaares.

Die Theorie der *Schnittkurve der Fläche 2. Ordnung:*

$$f = \sum_1^k \sum_1^l a_{kl} x_k x_l = 0 \tag{1}$$

mit einer Ebene:

$$\sum_1^4{}^k u_k x_k = 0 \tag{2}$$

knüpft sich an die *geränderte Determinante:*

$$A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

deren Unterdeterminanten 4. Grades mit A^u_{kl} und 3. Grades mit α^u_{kl} bezeichnet seien, soweit sie durch Ränderung der Unterdeterminanten § 7, (7); (8) entstehen z. B.:

$$u_{25} \cdot \quad a_{12} \quad \begin{matrix} a_{34} & u_3 \\ a_{14} & u_1 \\ & 0 \end{matrix} \Big| \qquad \alpha^u_{\cdot\cdot} \quad \begin{matrix} a_{13} & a_{14} & u_1 \\ u_3 & u_4 & 0 \end{matrix}$$

Die Schnittkurve ist alsdann ihrem *Range* nach für:

(4) $A^u \neq 0$: ein eigentlicher Kegelschnitt;

$A^u = 0,\ A^u_{kl} \neq 0!$: ein Linienpaar;

$A^u = 0,\ A^u_{kl} = 0!,\ \alpha^u_{kl} \neq 0!$: eine Doppellinie,

in der Bezeichnungsweise von § 9, (3). Führt man für die *Summen der Hauptunterdeterminanten* die Abkürzungen ein:

(5) $$A'^{u} = A_{11}^{u} + A_{22}^{u} + A_{33}^{u} + A_{44}^{u},$$
$$A''^{u} = \alpha_{11}^{u} + \alpha_{22}^{u} + \alpha_{33}^{u} + \alpha_{44}^{u} + \alpha_{55}^{u} + \alpha_{66}^{u},$$

so können die beiden letzten Fälle (4) auch durch folgende Merkmale bezeichnet werden (Staude, *Teubners Samml.* XXX, 583).

(6) $$A^{u} = 0,\ A'^{u} \neq 0\text{: Linienpaar;}$$
$$A^{u} = 0,\ A'^{u} = 0,\ A''^{u} \neq 0\text{: Doppellinie.}$$

Die Bedingung:

(7) $$A^{u} = 0$$

ist bei der eigentlichen Fläche gleichzeitig die der *Tangentialebenen*, also die *Gleichung der Fläche* (1) *in Ebenenkoordinaten.*

Beim Kegel ist A^{u} ein vollständiges Quadrat und (7) die Gleichung der Spitze in Ebenenkoordinaten. Beim Ebenenpaar ist A^{u} identisch 0 (Clebsch-Lindemann, *Vorl. Raum*, 151).

Die Theorie des Schnittpunktpaares der Fläche (1) mit der Geraden:

(8) $$\sum_{k}^{4} u_k x_k = 0, \quad \sum_{k}^{4} u_k' x_k = 0$$

knüpft sich an die doppelt geänderte Determinante:

(9) $$A^{uu'} = \left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 & u_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' & 0 & 0 \end{array} \right|$$

deren Unterdeterminanten 5. Grades mit $A_{kl}^{uu'}$ bezeichnet seien $(k, l = 1, 2, 3, 4)$.

Das Schnittpunktpaar ist dann seinem Range nach für:

(10) $$A^{uu'} \neq 0\text{: ein getrenntes Punktepaar,}$$
$$A^{uu'} = 0,\ A_{kl}^{uu'} \neq 0!\text{: ein Doppelpunkt.}$$

Mit der Abkürzung:

(11) $$A'^{uu'} = A_{11}^{uu'} + A_{22}^{uu'} + A_{33}^{uu'} + A_{44}^{uu'}$$

ist der zweite Fall (10) auch durch die Bedingungen bezeichnet:

(12) $$A^{uu'} = 0, \quad A'^{uu'} \neq 0\text{: ein Doppelpunkt.}$$

Die Bedingung:

(13) $$A^{uu'} = 0$$

ist zugleich die der Tangente, also die Gleichung der Fläche in Achsenkoordinaten:

(14) $$q_{kl} = u_k u_l' - u_l u_k'.$$

Beim Ebenenpaar ist $A^{uu'}$ ein vollständiges Quadrat und (13) die Gleichung der Achse des Paares in Achsenkoordinaten (Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum* 152; Staude, *Teubners Samml.* XXX, 782; 957 (*Anm.* 118)).

§ 22. Das Hauptachsenproblem und die kanonischen Gleichungen.

Ist in gemeinen rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung der Fläche, wie § 7, (1):

(1) $$g(x, y, z) = 0$$

und die der schneidenden Ebene:

(2) $$ux + vy + wz + s = 0,$$

so kann die Gleichung der Schnittkurve in bezug auf ein rechtwinkliges System $\Omega\xi\eta$ in der schneidenden Ebene auf die Form gebracht werden:

(3) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a_{14}'\xi + 2a_{24}'\eta + a_{44}' = 0.$$

Hier haben ξ und η die stets vorhandenen *Hauptachsenrichtungen* der Schnittkurve, während der Anfangspunkt Ω und mit ihm die Koeffizienten a_{14}', a_{24}', a_{44}' noch verfügbar bleiben. Die *Hauptachsenkoeffizienten* λ_1 und λ_2 aber sind die stets reellen Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(4) $$H(\lambda) \quad \begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \quad - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \\ u & & w \end{matrix}$$

oder entwickelt:

(5) $$H(\lambda) = -(u^2 + v^2 + w^2)\lambda^2 - A'^u_{44}\lambda + A^u_{44} = 0,$$

wo:

(6) $$A'^u_{44} = \alpha^u_{11} + \alpha^u_{22} + \alpha^u_{33}.$$

Da die Gleichung (4) von s unabhängig ist, sind *Schnitte paralleler Ebenen* ähnlich und ähnlich liegend.

Die Möglichkeit des Verschwindens der Koeffizienten a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} bei geeigneter Wahl von Ω hängt von der Frage des Mittelpunktes der Schnittkurve ab. Die entstehenden kanonischen Gleichungen ordnen sich nach dem *Rang der Schnittkurve* und dem *Rang ihres unendlich fernen Punktepaares* in die Tabelle:

(7)

	I. $A^u \neq 0$: Eigentl. Kegelschnitt.	II. $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$: Getrennt. Linienp.	III. $A^u = 0$, $A'^u = 0$: $A''^u \neq 0$, Doppellin.
1. $A^u_{44} \neq 0$: Getrennt. Punktep.	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A^u}{A^u_{44}} = 0$	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$	*
2. $A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} \neq 0$: Doppelpunkt.	$\lambda_2 \eta^2 - 2\frac{\sqrt{-A^u A'^u_{44}}}{A'^u_{44}}\xi = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A'^u_{44}} = 0$	$\lambda_2 \eta^2 = 0$
3. $A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} = 0$: Unbestimmt.	**	$\eta\tau = 0$	$\tau^2 = 0$

Die weitere Gliederung der Tabelle (7) beruht auf der Unterscheidung der Vorzeichen der Koeffizienten λ_1, λ_2, die sich nach (5) bestimmen. Danach ergibt sich folgende Tabelle (8) der Schnittkurven der Fläche (1) mit der Ebene (2), S. 596/7.

Wendet man die Tabelle (8) auf die Ebene $z = 0$ ($u = 0, v = 0, w = 1, s = 0$) an, so erhält man die Klassifikation der Kegelschnitte in der xy-Ebene (Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.), 388; Staude, *Teubners Samml.* XXX, 647).

(8)		$A^u \neq 0$: Eigentl. Kegelschnitte	
		$-A^u_{44} > 0$, $A^u A'^u_{44} > 0$: I. Imag. Kegelschn.	$-A^u_{44}$, $A^u A'^u_{44}$ nicht beide > 0: II. Reell. Kegelschn.
$A^u_{44} \neq 0$: Eigentl. Punktepaare	$-A^u_{44} > 0$: 1. Imag. Pp.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reelle Ellipse
	$-A^u_{44} < 0$: 2. Reell. Pp.		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Hyperbel
$A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} \neq 0$: 3. Doppelp.			$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$ Parabel
$A^u_{44} = 0$, $A'^u_{44} = 0$: 4. Unbest.			

§ 23. Gleichseitig hyperbolische und Kreisschnitte.

Der Kegelschnitt, in dem die Fläche zweiter Ordnung von der Ebene u, v, w, s geschnitten wird, hat ein gegebenes Achsenverhältnis $m : -n$, wenn u, v, w der Bedingung genügen (Steiner, *Werke* **1**, 445, Aufg. 31; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX. 976, Anm. 184):

$$(1) \qquad (m-n)^2(u^2+v^2+w^2)A^u_{44} - mn(A'^u_{44})^2 = 0.$$

Da parallele Schnitte gleiches Achsenverhältnis haben, kann man die zu festem u, v, w und wechselndem s gehörigen Ebenen alle von der durch 0 gehende Ebene:

$$(2) \qquad s = 0$$

vertreten lassen. Die beiden Gleichungen (1) und (2) stellen alsdann einen *Kegel vierter Klasse* dar, den *Leitkegel der ebenen*

$A^u = 0,\ A'^u \neq 0$: Getr. Linienpaare		$A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0$:
$-A'^u > 0$: III. Imag. Linienp.	$-A'^u < 0$: IV. Reell. Linienp.	V. Doppellinien
$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Imag. Linienp.		
	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Reell. Linienp.	
$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Parallellinienp.	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reell. Parallellinienp.	$\eta^2 = 0$ Endl. Doppell.
	$\eta(\tau) = 0$ Endl. + u. f. Linie	$(\tau^2) = 0$ Un. f. Doppell.

Schnitte vom Achsenverhältnis $m : -n$. Jede einer Tangentialebene dieses Kegels parallele Ebene schneidet in einem Kegelschnitt von solchem Achsenverhältnis.

Für $m = 0$ oder $n = 0$ kommt er auf den Kegel zweiter Klasse:

$$A_{44}^u = 0 \tag{3}$$

zurück, welcher durch Parallelverschiebung in den Asymptotenkegel der Fläche übergeht und der *Leitkegel der parabolischen Schnitte* ist.

Für $m = n$ zerfällt er in den doppelt zählenden Kegel zweiter Klasse:

$$A_{44}'^u = 0, \tag{4}$$

den *Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte* (Schröter, *Oberfl.* 1880, 75; Bath, *Dissert.*, Rostock 1904; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 624).

Für $m = -n$ tritt der besonders zu behandelnde Fall der *Kreisschnitte* ein. Je nachdem die Fläche zweiter Ordnung dreiachsig, einachsig oder unbestimmtachsig ist, besitzt sie sechs oder ein oder ∞^2 Systeme paralleler Kreisschnittebenen. Sie gehen im ersten Falle durch die sechs Seiten des vollständigen Vierecks der in § 10 zu (14) erwähnten Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der unendlich fernen Kurve der Fläche mit dem imaginären Kugelkreis, im zweiten durch die Berührungspunkte $S_1 = S_3$ und $S_2 = S_4$ beider (Kötter, *Bericht* 72; Staude, *Arch. Math. Phys.* (3) 7 (1904), 183; *Teubners Sammlg.* XXX, 632).

§ 24. Die Spezies der ebenen Schnitte.

Bilden drei Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ in der schneidenden Ebene ein *Polardreieck der Schnittkurve* und bedeuten y_1, y_2, y_3 Dreieckskoordinaten in bezug auf dieses, so lautet die Gleichung der Schnittkurve:

(1) $$f_{11}y_1^2 + f_{22}y_2^2 + f_{33}y_3^2 = 0.$$

Da es ∞^3 Polardreiecke eines Kegelschnittes gibt, kann diese *Quadratdarstellung* auf ebenso viele Weisen erreicht werden. Beispielsweise kann man entsprechend § 18, (5) unter der Voraussetzung:

(2) $$\alpha_{33}^u A_{44}^u \neq 0$$

die Form herstellen:

(3) $$-\alpha_{33}^u y_1^2 + \alpha_{33}^u A_{44}^u y_2^2 + A_{44}^u A^u y_3^2 = 0.$$

Man kann aber auch das Polardreieck wählen, welches die Schnittkurve § 21, (1); (2) mit dem imaginären eigentlichen Kegelschnitt:

(4) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \qquad \sum_1^4 {}_k u_k x_k = 0$$

gemein hat und in dem dieser die Gleichung:

(5) $$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$$

erhält. Die Gleichung der Schnittkurve wird dann:

(6) $$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 0,$$

wo λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung sind:

$$(7)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & u_4 \\ u_1 & & & u_4 & 0 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt (§ 21, (5)):

$$(8)\qquad \Delta(\lambda) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)\lambda^3 + A''^u\lambda^2 - A'^u\lambda + A^u = 0.$$

Danach ergeben sich *für die Spezies der Schnittkurve folgende Merkmale:*

$$(9)\qquad A^u \neq 0 \quad \begin{cases} -A'^u > 0,\ A^u A''^u > 0: \\ \qquad 1.\ \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 + \alpha_3^2 y_3^2 = 0; \\ -A'^u,\ A^u A''^u \text{ nicht beide } > 0: \\ \qquad 2.\ \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 - \alpha_3^2 y_3^2 = 0; \end{cases}$$

$$A^u = 0,\ A'^u \neq 0 \quad \begin{cases} -A'^u > 0: \\ \qquad 3.\ \alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 = 0; \\ -A'^u < 0: \\ \qquad 4.\ \alpha_1^2 y_1^2 - \alpha_2^2 y_2^2 = 0; \end{cases}$$

$$A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u \neq 0: \qquad 5.\ a_1^2 y_1^2 = 0;$$

$$A^u = 0,\ A'^u = 0,\ A''^u = 0: \qquad 6.\ \text{unbestimmt.}$$

Bei gegebener Spezies der Fläche ist nicht jede Spezies der Schnittkurve möglich. Die möglichen Kombinationen enthält die folgende Tabelle. Sie gibt für die möglichen Fälle in der ersten Zeile jedes ausgefüllten Faches die Gleichung einer Fläche von der Spezies der betreffenden Kolonne, in der zweiten Zeile die Gleichung einer Ebene, welche mit der Fläche eine Schnittkurve von der Spezies der betreffenden Zeile liefert, z. B.: in V 5 ist

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$$

ein reeller Kegel, der von der Ebene $y_2 - y_3 = 0$ in der Doppellinie $y_1^2 = 0$, $y_2 - y_3 = 0$ geschnitten wird.

(10)

		$A \neq 0$: Eigentl. Flächen zweiter Ordnung		
		$A>0$, $A''>0$, $A'A'''>0$: I. Imag. Fl.	$A>0$, A'', $A'A'''$ nicht beide >0: II. Geradl. Fl.	$A<0$: III. Nichtger. Fl.
$A^u \neq 0$: Eigentl. Kurven zweiter Ordnung	$-A'^u>0$, $A^u A''^u>0$: 1. Imag. eig. K.	$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0$ $y_4=0$		$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2=0$ $y_4=0$
	$-A'^u$, $A^u A'''^u$ n. beide >0: 2. Reell. eig. K.		$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2=0$ $y_4=0$	$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2=0$ $y_3=0$
$A^u=0$, $A'^u\neq 0$: Getrennte Linienpaare	$-A'^u>0$: 3. Imag. L.p.			$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2=0$ $y_2-y_4=0$
	$-A'^u<0$: 4. Reell L.p.		$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2=0$ $y_2-y_4=0$	
$A^u=0$, $A'^u=0$, $A''^u\neq 0$: 5. Doppellinien				
$A^u=0$, $A'^u=0$, $A''^u=0$: 6. Unbestimmt				

Die Tabelle gibt direkt die *Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung*:

$A=0,\ A'\neq 0$: Kegel zweiter Ordnung		$A=0,\ A'=0,\ A''\neq 0$: Ebenenpaare		$A=0,$ $A'=0,$ $A''=0,$ $A'''\neq 0$: VIII. Doppelebenen
$A''>0, A'A'''>0$: IV. Im. Kegel	A'', $A'A'''$ nicht beide >0: V. Reell. Kegel	$A''>0$: VI. Im. Eb.p.	$A''<0$: VII. Reell. Eb.p.	
$y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ $y_4=0$				
	$y_1^2+y_2^2-y_3^2=0$ $y_4=0$			
$y_1^2+y_2^2+y_3^2=0$ $y_3=0$	$y_1^2+y_2^2-y_3^2=0$ $y_3=0$	$y_1^2+y_2^2=0$ $y_3=0$		
	$y_1^2+y_2^2-y_3^2=0$ $y_2=0$		$y_1^2-y_2^2=0$ $y_3=0$	
	$y_1^2+y_2^2-y_3^2=0$ $y_2-y_3=0$	$y_1^2+y_2^2=0$ $y_2=0$	$y_1^2-y_2^2=0$ $y_2=0$	$y_1^2=0$ $y_2=0$
			$y_1^2-y_2^2=0$ $y_1-y_2=0$	$y_1^2=0$ $y_1=0$

(11) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0,$$

falls die Ebene:

(12) $$\sum_1^4{}^k u_k x_k = 0$$

die unendlich ferne Ebene in den Tetraederkoordinaten der Gleichung (11) ist. Es sind nur die Namen der Tabelle § 12, (1) in die entsprechenden Felder einzutragen. Ist die Ebene (12) die Koordinatenebene $x_4 = 0$, so wird:

(13) $$A^u = -A_{44}, \quad A'^u = -A'_{44}, \quad A''^u = -A''_{44}$$

und geht die Tabelle § 12, (1) hervor (Gundelfinger in Hesse, *Vorles. Raum* 388; Staude, *Teubners Samml.* XXX, 893).

Kapitel XXVII.

Fokaleigenschaften und konfokale Systeme von Flächen zweiter Ordnung.

Von *O. Staude* in Rostock.

§ 25. Brennpunkte und Fokaleigenschaften.

Wie bei der Ellipse und Hyperbel die *Differenz der Halbachsenquadrate* die *Brennpunkte* bestimmt, so bestimmen auch bei dem Ellipsoid und Hyperboloid die beiden *Differenzen der Halbachsenquadrate die Fokalkegelschnitte* § 2, (8), deren sämtliche Punkte als *Brennpunkte* gelten, unter ihnen die *Hauptbrennpunkte*, die Scheitelpunkte der Fokalkegelschnitte.

Die *Brennpunkte* der Kegelschnitts sind die Scheitelpunkte solcher *Tangentenpaare*, die *Kreisstrahlenpaare* $(x^2 + y^2 = 0)$ sind, oder was dasselbe ist, sie sind Punkte, an denen die vom Kegelschnitt bestimmte Involution harmonischer Polaren eine Involution rechter Winkel ist. Auf jeder Hauptachse liegt ein Paar von Brennpunkten; das eine dieser Paare ist reell, das andere imaginär. Dieser Begriff erscheint im Raume auf *drei* verschiedene Weisen verallgemeinert.

Erstens entstehen die *„Fokalachsen"* der Flächen 2. Ordnung als Achsen solcher *Tangentialebenenpaare* der Fläche, die *Kreiszylinder-Ebenenpaare* $(x^2 + y^2 = 0)$ sind, oder was dasselbe ist, an denen die von der Fläche bestimmte Involution harmonischer Polarebenen eine Involution rechtwinkliger Ebenenpaare ist. Beim Kegel 2. Ordnung gibt es in jeder Hauptebene ein Paar solcher Fokalachsen (Chasles, *Cônes* (1830), 11); unter diesen drei Paaren ist ein reelles, nämlich die Fokallinien § 1, (14). Bei den Ellipsoiden und Hyperboloiden gibt es ∞^2 Fokalachsen, die Erzeugenden aller zu der Fläche konfokalen Flächen; durch jeden Punkt des Raumes gehen zwei imaginäre und ein reelles Paar. Unter diesen Fokalachsen befinden sich die *Tangenten der Fokal-*

kegelschnitte; in jeder Hauptebene liegt ein Fokalkegelschnitt, einer ist imaginär, zwei sind reell (Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 230).

Zweitens sind die Fokalkegelschnitte der Ort der Scheitelpunkte solcher, die Fläche *längs eines Kegelschnittes* berührender Berührungskegel, die *Rotationskegel* ($x^2 + y^2 - c^2 z^2 = 0$) sind (Steiner, *J. f. Math.* **1** (1826), 47 = *Werke* **1**, 11).

Drittens sind die Fokalkegelschnitte der Ort der Scheitelpunkte solcher, die Fläche in *zwei Punkten* berührender Kegel, die *Kugelkegel* ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$) sind. Hierbei ist die Berührungssehne die dem betreffenden Brennpunkt entsprechende Direktrix, wie beim Kegelschnitt die zu einem Brennpunkt gehörige Direktrix die Berührungssehne des vom Brennpunkt an die Kurve gelegten Tangentenpaares ist (Plücker, *System* (1846), 276).

Die Brennpunkte der Kegelschnitte sind die *Doppelpunkte der Punktinvolutionen*, in denen Tangenten und Normalen die Hauptachsen schneiden. Ebenso sind beim Kegel die Brennlinien die *Doppelstrahlen der Strahleninvolutionen*, in denen Tangential- und Normalebenen die Hauptebenen schneiden. Endlich sind bei den eigentlichen Flächen 2. Ordnung die Fokalkegelschnitte die *Ordnungskurven der Polarsysteme*, in denen Tangentialebenen und Normalen die Hauptebenen schneiden (Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 227).

In der Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln sind die Brennpunktpaare und das imaginäre Kreispunktpaar die *drei Punktepaare der Schar*; in der Schar konfokaler Kegel sind die drei Fokalstrahlenpaare die *drei Strahlenpaare der Schar;* in der Schar konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide sind die drei Fokalkegelschnitte und der imaginäre Kugelkreis die *vier Kegelschnitte der Schar* (Ch. Dupin, *Developpements* (1813), 277; 309).

§ 26. Winkel der Brennstrahlen gegen die Normale.

Bei den Kegelschnitten werden die *Winkel der Brennstrahlen* eines Punktes von *Tangente* und *Normale halbiert.* Allgemeiner hat im *System konfokaler Kegelschnitte* das von einem Punkte an einen Kegelschnitt des Systems gelegte *Tangentenpaar* die Normalen der beiden durch den Punkt gehenden konfokalen Kegelschnitte zu Hauptachsen. Dieser Satz erscheint im Raume in verschiedener Weise verallgemeinert.

Ein *System konfokaler Kegel* ist durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} + \frac{z^2}{\gamma - \tau} = 0, \quad \alpha > \beta > \gamma \tag{1}$$

dargestellt. Die gemeinsamen Brennlinien sind:

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{z^2}{\beta-\gamma}=0,\quad y=0.$$

Das System umfaßt zwei Arten von Kegeln, aufrechte mit der vertikalen z-Achse und liegende mit der horizontalen x-Achse als innerer Hauptachse. Durch jeden Strahl des Bündels an der Spitze 0 gehen zwei ungleichnamige Kegel hindurch, deren Parameter $\tau=\mu$ und $\tau=\nu$ zwischen den Grenzen liegen:

$$(3)\qquad \gamma<\mu<\beta<\nu<\alpha$$

und die elliptischen Koordinaten des Strahles heißen. Diese beiden Kegel schneiden sich senkrecht. Das durch einen Strahl μ, ν an einen Kegel τ des Systems (1) gelegte *Tangentialebenenpaar* hat die Normalebenen der beiden Kegel μ und ν längs des Strahles zu Halbierungsebenen. Insbesondere werden bei dem einzelnen Kegel die *Winkel der „Fokalebenen“*, welche die Erzeugenden des Kegels mit seinen beiden Fokallinien verbinden, durch *Tangential-* und *Normalebene* längs der Erzeugenden *halbiert* (Chasles, *Aperçu hist.* (1837), 237).

Diese Sätze übertragen sich auf die *sphärischen Kegelschnitte*.

Ein *System konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide* ist durch die Gleichung:

$$(4)\qquad \frac{x^2}{\alpha-\tau}+\frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\beta-\tau}=1,\qquad \alpha>\beta>\gamma,$$

dargestellt. Die gemeinsame Fokalellipse und Fokalhyperbel haben die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{x^2}{\alpha-\gamma}+\frac{y^2}{\beta-\gamma}=1,\qquad z=0;\\ &\frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{z^2}{\beta-\gamma}=0,\quad y=0.\end{aligned}$$

Das System umfaßt drei Arten von Flächen, Ellipsoide, ein- und zweischalige Hyperboloide. Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei ungleichnamige Flächen hindurch, deren Parameter $\tau=\lambda$, μ, ν zwischen den Grenzen liegen:

$$(6)\qquad -\infty<\lambda<\gamma<\mu<\beta<\nu<\alpha$$

und die elliptischen Koordinaten des Punktes heißen. Diese drei

Flächen schneiden sich in dem Punkte senkrecht. Je zwei ungleichnamige Flächen schneiden sich überall senkrecht in ihren Krümmungskurven.

Das Entsprechende gilt für das *System konfokaler Paraboloide:*

$$(7) \qquad \frac{y^2}{\beta-\tau}+\frac{z^2}{\gamma-\tau}+2x+\tau=0, \quad \beta>\gamma$$

mit den gemeinsamen Fokalparabeln:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{y^2}{\beta-\gamma}+2x+\gamma=0, \quad z=0;\\ &\frac{z^2}{\beta-\gamma}-2x-\beta=0, \quad y=0. \end{aligned}$$

Das System umfaßt drei Arten von Paraboloiden, nach links geöffnete elliptische, hyperbolische und nach rechts geöffnete elliptische. Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei ungleichnamige Paraboloide hindurch, deren Parameter $\tau=\lambda,\ \mu,\ \nu$ zwischen den Grenzen liegen:

$$(9) \qquad -\infty<\lambda<\gamma<\mu<\beta<\nu<+\infty$$

und die parabolischen Koordinaten des Punktes heißen. Diese drei Flächen schneiden sich in dem Punkte senkrecht (Ch. Dupin, *Développements* (1813), 268; 302; 316).

Der von einem Punkte $P=\lambda,\ \mu,\ \nu$ des Raumes an eine Fläche τ des konfokalen Systems (4) oder (7) gelegte *Berührungskegel* hat als Hauptachsen die Normalen der drei durch den Punkt gehenden Flächen $\lambda,\ \mu,\ \nu$. Seine drei Paar Fokallinien sind die drei Paar Erzeugenden der drei Flächen, die durch P gehen. Insbesondere haben bei einer einzelnen Fläche die beiden *Fokalkegel* eines Punktes P der Fläche, die von ihm über den Fokalkegelschnitten errichtet sind, die *Normale* der Fläche und die *Tangenten* der beiden Krümmungslinien P als *Hauptachsen* (Jacobi, *J. f. Math.* **12** (1834), 137 = *Werke* 7, 7).

Entsprechen so den beiden Brennstrahlen eines Punktes beim Kegelschnitt einerseits die *Fokalkegel,* so entsprechen ihnen anderseits die vier *Fokallinien*, die Schnittlinien der beiden Fokalkegel.

Die Winkel je zweier Paare der vier *gemeinsamen Tangenten*, die von einem Punkte P an *zwei* Flächen des konfokalen Systems laufen, werden von den Normalen der drei Flächen $\lambda,\ \mu,\ \nu$ im Punkte P halbiert (Liouville, *J. de math.* (1) **11** (1846), 112).

Insbesondere werden bei den einzelnen Flächen die Winkel je zweier der vier *Fokallinien* eines Punktes P, der gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalkegelschnitte durch P, von der *Normalen* und den *Tangenten* der beiden Krümmungslinien in P halbiert. (Die gesamte Theorie der konfokalen Flächen s. bei Staude, *Teubners Samml.* XXX, 644 ff.)

§ 27. Die Fokaleigenschaften der Kegel.

Die vereinigte Fokaleigenschaft dei Ellipse und Hyperbel liegt in der für alle Punkte x, y der Ebene gültigen Identität:

$$(1)\quad \begin{aligned} &-a^2(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right\} \\ &=\left\{a^2-\left(\frac{r+r'}{2}\right)^2\right\}\left\{a^2-\left(\frac{r-r'}{2}\right)^2\right\}, \end{aligned}$$

wo r, r' die beiden Fokaldistanzen des Punktes sind.

Innerhalb des Bündels am Anfangspunkt O gilt für jeden Strahl $x:y:z$ identisch die Gleichung (Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 718).

$$(2)\quad \begin{aligned} &a^2(a^2-d^2)(a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}\right\} \\ &=e^4(x^2+y^2+z^2)\left\{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\varrho+\varrho'}{2}\right\}\left\{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\varrho-\varrho'}{2}\right\}, \end{aligned}$$

in der ϱ und ϱ' die Winkel bedeuten, welche der laufende Strahl $x:y:z$ mit den beiden Fokalstrahlen § 1, (16) des Kegels bildet. Außerdem ist:

$$(3)\quad \sin\alpha=\frac{a}{e}$$

und $a < e$, $d < e$. Hieraus folgt aber die Fokaleigenschaft des elliptischen Kegels, bezüglich der sphärischen Ellipse.

Daher ist der elliptische Kegel der Ort eines Strahles im Bündel, für den *die Summe oder Differenz der Winkel, welche er mit den Fokalstrahlen bildet, unveränderlich bleibt* (Magnus, *Aufgaben* 2 (1837), 170).

Die Brennpunkt-Direktrixeigenschaft der Ellipse und Hyperbel liegt in der Identität:

$$(4)\quad (a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right\}=r^2-\varepsilon^2\delta^2,\quad \varepsilon=\frac{e}{a},$$

wo r und δ die Abstände des Punktes x, y von Brennpunkt und Direktrix sind.

Der elliptische Kegel hat zwei *Leitebenen*, die Polarebenen seiner Fokalstrahlen. Sind r und δ die Abstände eines Punktes x, y, z von Fokalstrahl und Leitebene, so gilt die identische Gleichung (Staude, *Teubners Saml.* XXX, 710):

$$(5)\qquad (a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}\right\}=r^2-\varepsilon^2\delta^2,$$

wo:

$$\varepsilon^2=\frac{a^2(a^2-d^2)+(e^2-a^2)d^2}{a^2(e^2-a^2)}.$$

Daher ist der elliptische Kegel der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von Fokalstrahl und Leitstrahl das unveränderliche Verhältnis ε haben.

Für den Kegel des *Hachette* ist $\varepsilon=1$ (Chasles, *Cônes* (1830), 44).

§ 28. Fokaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide.

Verbindet man einen beliebigen Raumpunkt P geradlinig mit einem Punkte C der Fokalellipse:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{e^2}+\frac{y^2}{e^2-d^2}=1,\quad z=0$$

und wiederum C geradlinig mit einem der beiden Brennpunkte B_0 oder B_0' der Fokalellipse, so erhält man eine *„gebrochene Entfernung“*:

$$(2)\qquad r=PCB_0,\quad r'=PCB_0'$$

des Punktes P über die Fokalellipse von einem ihrer Brennpunkte. Jede dieser beiden gebrochenen Entfernungen r und r' hat ein Minimum r_1 und r_1' und ein Maximum r_2 und r_2', und zwar ist:

$$(3)\quad r_1=PC_1B_0,\quad r_2=PC_2B_0;\quad r_1'=PC_3B_0',\quad r_2'=PC_4B_0',$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 die Treffpunkte der vier Fokallinien des Punktes P mit der Fokalellipse in bestimmter Anordnung bedeuten. Man nennt r_1, r_2, r_1', r_2' die *vier gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes P über die Fokalellipse.* Die Anfangsstücke PC_i sowohl wie die Endstücke C_iB_0, C_iB_0' dieser Distanzen sind,

erstere hinreichend verlängert, gemeinsame Transversalen von Fokalellipse und Fokalhyperbel, also Fokallinien.

Für die Größenverhältnisse gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned}(4)\qquad & r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e > r_2 + r_2' - r_1 - r_1' > \\ & |r_2 - r_2' - r_1 + r_1'|; \quad r_1 + r_2 - r_1' - r_2' = 0.\end{aligned}$$

Ferner aber gilt, entsprechend § 27, (1), für jeden Punkt $P = x, y, z$ des Raumes die *identische Gleichung*:

$$\begin{aligned}(5)\qquad & a^2(a^2 - d^2)(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} \\ & = \left\{a^2 - \left(\frac{r_2 + r_2' + r_1 + r_1' - 4e}{4}\right)^2\right\} \\ & \left\{a^2 - \left(\frac{r_2 + r_2' - r_1 - r_1'}{4}\right)^2\right\}\left\{a^2 - \left(\frac{r_2 - r_2' - r_1 + r_1'}{4}\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

Die beiden Minima r_1 und r_1' sind *stabile*, die Maxima r_2 und r_2' *labile* Gleichgewichtslagen eines Fadens, der im Punkte P sowie in B_0, B_0' festgehalten wird und in C_1, C_2, C_3, C_4 frei über die aus dünnem glatten Draht gebildete Fokalellipse hinweggleitet. Die Maxima r_2 und r_2' lassen sich aber unter Erhaltung ihrer Anfangsstücke durch *stabile* Gleichgewichtslagen ersetzen, nämlich durch die Minima der gebrochenen Entfernungen des Punktes P über die beiden Zweige der Fokalhyberbel von deren Brennpunkten C_0, C_0':

$$(6)\qquad s_1 = PB_4C_0, \quad s_1' = PB_2'C_0',$$

wo B_4 und B_2' die Gleitpunkte auf den beiden Hyperbelzweigen sind. Es ist dann:

$$(7)\qquad r_2' = s_1 + d + e, \quad r_2 = s_1' + d + e.$$

Man nennt r_1, r_1', s_1, s_1' (Fig. 11) *die vier gebrochenen Hauptfokaldistanzen* des Punktes P; r_1, r_1' und s_1, s_1' gleichnamige, r_1, s_1 und r_1', s_1' gleichseitige (in bezug auf die yz-Ebene). Danach folgen unmittelbar aus (5) mit Rücksicht auf (4) die Fokaleigenschaften (Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 744).

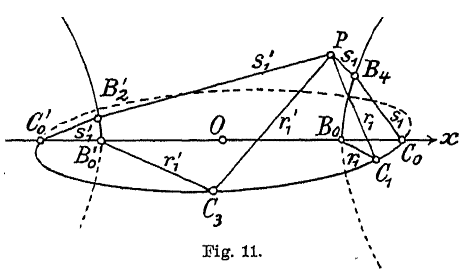


Fig. 11.

I. *Für jeden Pnnkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der großen Hauptachsenlänge, vermehrt um die halbe Differenz der beiden Hauptbrennweiten.*

II. *Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der großen Hauptachsenlänge, vermindert um die halbe Summe der beiden Hauptbrennweiten.*

III. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichnamiger gebrochener Hauptfokaldistanzen gleich der reellen Hauptachsenlänge.*

An die I. Eigenschaft knüpft sich die *Fadenkonstruktion des Ellipsoides* mit der Fadenlage $B_0'C_3PB_4C_0$ oder $C_0'B_2'PC_1B_0$ (Fig. 11) eines in $B_0'C_0$ oder $C_0'B_0$ befestigten, über die Fokalkegelschnitte frei gleitenden und in P durch ein Häkchen gespannten Fadens. Sie entspricht der *Gärtnerkonstruktion der Ellipse* und geht in der xy- und zx-Ebene stetig in diese über, indem sich bei der Fadenstrecke $C_0'B_2'PC_1B_0$ entweder das Stück $C_0'B_2'$ in $C_0'B_0'$ oder das Stück C_1B_0 in C_0B_0 festlegt und P bezüglich den Hauptschnitt mit den Brennpunkten B_0B_0' oder den mit den Brennpunkten C_0C_0' beschreibt.

§ 29. Fokaleigenschaften der Paraboloide.

Die Fokaleigenschaft der Parabel liegt in der Identität:

$$-p\left\{\frac{y^2}{p}+2x-p\right\}=(p-x-r)(p-x+r) \tag{1}$$

begründet, wo r der Abstand des Punktes $P=x,y$ vom Brennpunkt $O=0,0$ und $d=x-p$ der von der Direktrix $x=p$ ist.

Für die Paraboloide gilt eine entsprechende Identität:

$$\begin{aligned}&-p(p-e)\left\{\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{p-e}+2x-p\right\}\\&=(p-x-r_1)(p-x-m_1)(p-x-m_2).\end{aligned} \tag{2}$$

Hier sind:

$$r_1=PC_1+C_1B_0,\; m_1=-PC_2+C_2B_0,\; m_2=-PC_3+C_3B_0 \tag{3}$$

die drei gebrochenen Fokaldistanzen des Punktes $P=x,y,z$ über die linke Fokalparabel:

$$y^2+2ex-e^2=0 \tag{4}$$

von deren Brennpunkt $B_0 = 0, 0, 0$, und zwar ist r_1 das Minimum der Summe: $r = PC + CB_0$ und m_1 und m_2 Minimum und Maximum der Differenz: $m = -PC + CB_0$ bei beliebig laufendem Punkte C der Parabel (4). Unter C_1, C_2, C_3 sind die Schnittpunkte der drei durch P gehenden Fokallinien oder gemeinsamen Transversalen der beiden Fokalparabeln verstanden (die vierte Fokallinie, die nach dem gemeinsamen unendlich fernen Punkte der beiden Fokalparabeln läuft und der x-Achse parallel ist, fällt dabei aus). Es ist dabei:

$$(5) \quad -\infty < e - r_1 - m_2 < 0 < e - m_1 - r_1 < e < e - m_2 - m_1 < +\infty;$$

$$(6) \qquad r_1 + m_1 + m_2 + x - e = 0.$$

Statt m_1 und m_2 kann man auch das Minimum:

$$(7) \qquad s_1 = PB_3C_0$$

der Entfernung des Punktes P über die rechte Fokalparabel § 3, (13) von deren Brennpunkt C_0 einführen (Fig. 12), worauf neben (6):

$$(8) \qquad e - m_1 = \frac{e}{2} + s_1.$$

Man nennt r_1 und s_1 *die beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen.* Sie sind Gleichgewichtslagen eines Fadens, der in P und B_0 oder C_0 festgehalten wird und über die eine oder andere Parabel frei gleitet.

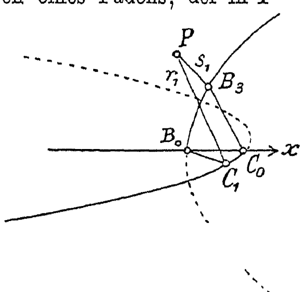


Fig. 12.

Für das linke elliptische Paraboloid § 3, (10) mit $\infty > p > e$ ist nun:

$$(9) \qquad x = p$$

als Polarebene des linken Hauptbrennpunktes B_0 eine Hauptdirektrixebene. Mit Bezug auf diese enthält dann die Identität (2) die Fokaleigenschaft (Staude, *Teubners Samlg.* XXX, 763).

I. *Für jeden Punkt des elliptischen Paraboloides ist die gebrochene Hauptfokaldistanz von dem Brennpunkt der inneren Fokalparabel gleich dem senkrechten Abstand von der zugehörigen Hauptdirektrixebene.*

Andererseits folgt aber aus derselben Identität (2):

II. *Für jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids ist die*

Differenz der beiden gebrochenen Hauptfokaldistanzen gleich der Differenz der Entfernungen des Scheitelpunktes von den beiden Brennpunkten.

In der xy-Ebene kommt die I. Eigenschaft unmittelbar auf die Fokaleigenschaft der Parabel zurück.

§ 30. Das Theorem von Ivory.

Auf zwei konfokalen Ellipsoiden (§ 26, (4)):

$$(1)\ \frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+ \quad = 1, \qquad (2)\ \frac{x^2}{\alpha-\lambda'}+\frac{y^2}{\beta-\lambda'}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda'}=1$$

betrachtet man *zwei solche Punkte P und P' als entsprechende,* welche bei verschiedenen elliptischen Koordinaten λ und λ' dieselben elliptischen Koordinaten μ und ν haben, so daß:

$$(3) \qquad P=\lambda,\ \mu,\ \nu;\quad P'=\lambda',\ \mu,\ \nu$$

ist. Die Punkte P und P' werden also aus den beiden Ellipsoiden λ und λ' von der Schnittlinie der beiden Hyperboloide μ und ν, der orthogonalen Trajektorie, ausgeschnitten. Die Verwandtschaft der beiden Ellipsoide, die sich so Punkt für Punkt entsprechen, ist eine *affine.* Der auf sie bezügliche Satz von Ivory lautet (Ivory, *Ostwalds Klassiker* **19**, 32; Salmon-Fiedler, *Raum* **1** (4. Aufl.), 303 Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 711):

Die Entfernung irgend zweier Punkte P und P_0' der beiden konfokalen Ellipsoide (1) und (2) ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte P' und P_0 der jedesmal andern Fläche, also:

$$(4) \qquad PP_0'=P'P_0.$$

Der Satz gilt ebenso für zwei einschalige oder für zwei zweischalige konfokale Hyperboloide und für zwei gleichartige Paraboloide des konfokalen Systems § 26, (7). Bei zwei einschaligen Hyperboloiden oder zwei hyperbolischen Paraboloiden treten noch die weiteren Sätze hinzu:

Zwei Punkten P_1, P_2 einer Erzeugenden der einen Fläche entsprechen stets zwei Punkte P_1', P_2' einer Erzeugenden der andern.

Die Länge einer Strecke P_1P_2 auf einer Erzeugenden der einen Fläche ist gleich der Länge der entsprechenden Strecke $P_1'P_2'$ auf einer Erzeugenden der andern.

Jedes aus Erzeugenden gebildete Vierseit der einen Fläche überträgt sich also mit unveränderten Seitenlängen auf die andere (Cayley, *Mess.* 8 (1879), 51).

Dieser Satz führt wieder auf das *bewegliche* Modell § 5.

Eine unmittelbare Folge des Ivoryschen Theorems ist die *Jacobische Fokaleigenschaft des Ellipsoides:* Die Abstände eines Punktes P des Ellipsoides von drei festen Punkten F_1, F_2, F_3 der Fokalellipse sind gleich den Abständen des entsprechenden Punktes P' im Innern der Fokalellipse von drei festen, den Punkten F_1, F_2, F_3 entsprechenden Punkten A_1, A_2, A_3 des ersten Hauptschnittes des Ellipsoides; oder allgemeiner:

Der Ort eines Punktes P im Raume, dessen Entfernungen von drei festen Punkten F_1, F_2, F_3 durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen der Ecken eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ von einem Punkte P' ihrer Ebene verbindet, ist eine Fläche 2. Ordnung (Jacobi, *J. f. Math.* **12** (1834) 139 = *Werke* 7, 8, O. Hermes, *J. f. Math.* **73** (1871), 182 = Jacobi, *Werke* 7, 44; Darboux, *Théorèmes d'Ivory* 1872, 197; Schröter, *Oberfl.* 639; Salmon-Fiedler, *Raum* **1**, 305; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 716); R. Sturm, Geom. Verwandtschaften **4** (1909), § 142.

§ 31. Die Amiot-Mac Cullaghschen Fokaleigenschaften.

Die allgemeine Gleichung $g = 0$ der Fäche 2. Ordnung kann auf die Form gebracht werden:

$$g(x, y, z) = k - UV = 0, \tag{1}$$

wo:

$$k = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0 \tag{2}$$

ein Kugelkegel mit dem Mittelpunkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ und $U = 0$, $V = 0$ zwei Ebenen sind. Der Punkt P_0 muß dabei ein Brennpunkt, ein Punkt eines Fokalkegelschnittes, sein. Die beiden reellen oder konjugiert imaginären Ebenen $U = 0$, $V = 0$ heißen die ihm entsprechenden Direktrixebenen und ihre reelle Schnittlinie die ihm entsprechende Direktrix. Sie ist die Berührungssehne der doppelten Berührung der Fläche (1) mit dem Kugelkegel (2).

Nun bedeutet k auch den Abstand r des Punktes $P = x, y, z$ vom Brennpunkt P_0 und UV bis auf einen konstanten Faktor, bei reellen Direktrixebenen das Produkt der Abstände r_1 und r_2

des Punktes P von den Direktrixebenen, bei imaginären Direktrixebenen den schrägen Abstand d des Punktes P_0 von der Direktrix parallel einer Kreisschnittebene gemessen. Im ersten Falle gibt die Gleichung (1) die Amiotsche, im zweiten die Mac Cullaghsche Fokaleigenschaft der Fläche 2. Ordnung (Amiot, *J. de math.* (1) 8 (1843), 161; Mac Cullagh, *Werke* 267).

Jene gilt für die Punkte P_0 derjenigen Fokalkegelschnitte, welche die Fläche in ihren Kreispunkten schneiden, diese für die Punkte P_0 der die Fläche nicht schneidenden Fokalkegelschnitte. Für das einschalige Hyperboloid und hyperbolische Paraboloid gilt also nur die Mac Cullaghsche Fokaleigenschaft, die alle Flächen 2. Ordnung umfaßt.

Im einzelnen gestaltet sich z. B. für das Ellipsoid die Identität (1) folgendermaßen:

$$(3)\quad (a^2-e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}=r^2-\frac{e^2-d^2}{a^2-d^2}s^2,$$

$$(4)\quad (a^2-d^2)\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1\right\}=r^2-\frac{e^2(a^2-d^2)}{a^2(a^2-e^2)}r_1r_2,$$

wo r den Abstand des laufenden Punktes $P = x, y, z$ von einem festen Punkt P_0 der Fokalellipse bez. P_1 der Fokalhyperbel bedeutet, s den schrägen Abstand des Punktes P von der zu P_0 gehörigen Direktrix, parallel den Kreisschnittebenen gemessen, und r_1, r_2 die senkrechten Abstände des Punktes P von den zu P_1 gehörigen Direktrixebenen. Es gelten daher die beiden Sätze:

I. Für jeden Punkt des Ellipsoides:

$$(5)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-d^2}+\frac{z^2}{a^2-e^2}-1=0,\quad a^2>e^2>d^2,$$

ist das Verhältnis des Abstandes von einem Punkte P_0 der Fokalellipse und des schrägen, parallel einer Kreisschnittebene gemessenen Abstandes von der zugehörigen Direktrix konstant, gleich $\sqrt{e^2-d^2}:\sqrt{a^2-d^2}$, also auch unabhängig von P_0.

II. Für jeden Punkt des Ellipsoides (5) ist das Verhältnis des Quadrates des Abstandes von einem Punkte P_1 der Fokalhyperbel und des Rechtecks aus den senkrechten Abständen von den zwei durch die zugehörige Direktrix gelegten Kreisschnittebenen konstant, gleich $e^2(a^2-d^2):a^2(a^2-e^2)$.

Schröter, *Oberfl. zweiter Ordnung* 623; 641; Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 693.

§ 32. Besondere Formen der Berührungskegel.

Der Ort der Scheitelpunkte rechtwinkliger Tangentenpaare ist bei der Ellipse und Hyperbel ein Kreis, bei der Parabel eine gerade Linie.

Die entsprechenden Sätze im Raume ergeben sich mit Hilfe der elliptischen Koordinaten des § 26 nach einheitlicher Methode (Staude, *Teubners Sammlg.* XXX, 940, Anm. 66).

Der Ort der Bündelstrahlen, durch die an den Kegel (mit $c^2 < 0$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{1}$$

zwei rechtwinklige Tangentialebenen gehen, ist der Kegel (Magnus, *Aufgaben* **2** (1837), 321):

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{2}$$

Der Ort der Spitzen gleichseitiger Berührungskegel des Ellipsoides oder Hyperboloides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3}$$

ist die Fläche 2. Ordnung (Plücker, *System d. anal. G. d. R.* (1846), 206):

$$\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \tag{4}$$

und des Paraboloides:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0 \tag{5}$$

das Rotationsparaboloid:

$$\frac{1}{b^2 c^2}\quad {}^2 + z^2) + 2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)x = 1. \tag{6}$$

Der Ort der Spitzen dual gleichseitiger Berührungskegel der Fläche (1) ist die „Mongesche“ Kugel (Lamé, *Examen* (1818), 80):

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \tag{7}$$

der Fläche (5) die Ebene (Magnus, *Aufg.* **2**, 325):

$$2x - b^2 - c^2 = 0. \tag{8}$$

Der Ort der Geraden, durch die zwei senkrechte Tangentialebenen an die Fläche (3) gehen, ist ein Komplex 2. Grades (Painvin, *Bull. scienc. Math.* **2** (1871), 371).

Kapitel XXVIII.

Systeme von Flächen zweiter Ordnung.

Von *O. Staude* in Rostock.

A. Büschel und Scharen von Flächen zweiter Ordnung.

§ 1. Begriff und Gleichung des Büschels.

Die Gesamtheit aller Flächen 2. Ordnung, die durch *acht* gegebene Punkte von allgemeiner Lage hindurchgehen, bildet ein *Büschel von Flächen 2. Ordnung.* Alle Flächen des Büschels gehen durch eine Raumkurve 4. Ordnung, die *Grundkurve des Büschels*, hindurch, welche als Durchschnitt irgend zweier Flächen:

$$(1) \qquad f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_k x_l = 0, \quad g = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l b_{kl}\, x_k x_l = 0$$

des Büschels, seiner *Grundflächen* bestimmt ist. Die *Gleichung des Büschels* ist alsdann mit einem Parameter λ:

$$(2) \qquad f + \lambda g = 0$$

(Lamé, *Examen* (1818), 28; 35).

Durch jeden Punkt des Raumes außerhalb der Grundkurve geht *eine* Fläche λ des Büschels hindurch.

Das duale Gebilde ist die *Schar von Flächen 2. Ordnung,* die Gesamtheit aller Flächen 2. Ordnung, die acht gegebene Ebenen von allgemeiner Lage berühren. Alle Flächen der Schar berühren die gemeinsamen Tangentialebenen irgend zweier Flächen der Schar, ihrer *Grundflächen.* Sind deren Gleichungen in Ebenenkoordinaten:

$$(3) \quad F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}\, u_k u_l = 0, \quad G = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l B_{kl}\, u_k u_l = 0,$$

so ist:

$$(4) \qquad F + \mu G = 0$$

die *Gleichung der Schar.*

Jede Ebene des Raumes, die nicht zu dem Ebenenbüschel der gemeinsamen Tangentialebenen gehört, wird von *einer* Fläche der Schar berührt.

In der *Determinante des Büschels:*

$$(4)\qquad \Delta(\lambda) = |a_{kl} + \lambda b_{kl}| = A + C\lambda + E\lambda^2 + D\lambda^3 + B\lambda^4$$

sind A und B die Determinanten der Grundflächen und:

$$(6)\quad C = \sum^{k}\sum^{l} A_{kl}\, b_{kl},\quad D = \sum^{k}\sum^{l} a_{kl}\, B_{kl},\quad E \qquad\qquad {}^{l}\alpha_{kl}\,\beta_{\bar k\bar l}$$

Simultaninvarianten der beiden Grundflächen (Bedeutung von $\bar k\bar l$ wie Kap. XXVI, § 15, (11)).

Ist $AB \neq 0$, also f und g eigentliche Flächen 2. Ordnung, so bedeutet die Bedingung:

$$(7)\qquad C = 0,$$

daß der Fläche $g = 0$ ∞^3 Polartetraeder der Fläche $f = 0$ ein- und der Fläche $f = 0$ ∞^3 Polartetraeder der Fläche g umbeschrieben werden können; Hesse, *J. f. Math.* **45** (1852), 90; Lüroth, *Zeitschr. f. Math.* **13** (1868), 405); die Fläche $f = 0$ heißt *apolar* zur Fläche g (Reye, *J. f. Math.* **78** (1874), 97; 345; **79** (1874), 159). $D = 0$ bedeutet dasselbe nur mit Vertauschung von f und g. Für:

$$(8)\qquad E = 0$$

gibt es ∞^1 Polartetraeder der einen Fläche, deren Kanten die andere berühren (H. Vogt, *Ann. éc. norm.* (3) **12** (1895), 363).

Ist $A = 0$, $B \neq 0$, so liegt unter der Bedingung (7) die Spitze des Kegels $f = 0$ auf der Fläche $g = 0$; für $D = 0$ gibt es Polartrieder von $f = 0$, deren Ebenen, für $E = 0$ solche, deren Kanten $g = 0$ berühren.

Für $C = 0$ und $D = 0$ heißen $f = 0$ und $g = 0$ auch harmonisch zueinander (A. Voß, *Math. Ann,* **10** (1876), 174).

Für:

$$(9)\qquad CD - 4AB = 0$$

enthält jede der beiden Regelscharen der einen Fläche ∞^1 Tripel von Strahlen, die einander bezüglich der anderen konjugiert sind (Schur, *Math. Ann.* **18** (1881) 9; **21** (1882), 315).

Sind mit $AB \neq 0$ die Grundflächen (3) der Schar mit denen des Büschels (1) identisch, so ist die Entwicklung der *Determinante der Schar*:

$$(10) \quad |A_{kl} + \mu B_{kl}| = A^3 + A^2 D\mu + ABE\mu^2 + B^2 C\mu^3 + B^3\mu^4,$$

so daß wieder dieselben Simultaninvarianten (6) auftreten.

§ 2. Durchschnitt des Büschels mit Ebene und gerader Linie.

Eine Ebene wird von dem Flächenbüschel in einem *Kegelschnittbüschel* geschnitten und von *drei* Flächen des Flächenbüschels *berührt*. Die Berührungspunkte sind die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks des Kegelschnittbüschels.

Die *Gleichung des Büschels in Ebenenkoordinaten* hat die Form ($\Delta(\lambda)$ in § 1, (4) mit u_k geändert):

$$(1) \quad F + H\lambda + K\lambda^2 + G\lambda^3 = 0,$$

wo $F = 0$ und $G = 0$ die Gleichungen der Grundflächen in Ebenenkoordinaten sind. Die Gleichung:

$$(2) \quad H = 0$$

stellt eine Fläche 2. Klasse dar, deren Tangentialebenen die Grundflächen $f = 0$ und $g = 0$ in zwei Kegelschnitten von solcher Lage schneiden, daß dem zweiten Kegelschnitt Polardreiecke des ersten ein- und dem ersten Polardreiecke der zweiten umbeschrieben werden können (Gundelfinger in Hesse, *Vorles.* 497; Salmon-Fiedler, *Raum* **1** (1898), 345).

Durch das Verschwinden der Diskriminante der Gleichung (1):

$$(3) \quad (9FG - HK)^2 - 4(3FK - H^2)(3GH - K^2) = 0$$

wird *die Grundkurve* des Büschels als Fläche 8. Klasse *in Ebenenkoordinaten* u_k dargestellt, der Gleichung (3) genügen die *Tangentialebenen der Grundkurve* (dual bei Cayley, *Cam. Dubl. math. J.* **5** (1850), 53). Die Bedingungen einer dreifachen Wurzel der kubischen Gleichung (1):

$$(4) \quad 3F : H = H : K = K : 3G$$

stellen die *Schmiegungsebenen der Grundkurve* als Ebenenbüschel 12. Klasse dar.

Dual entsprechend ist die *Gleichung der Schar in Punktkoordinaten* von der Form:

(5) $$A^2 f + A h \lambda + B k \lambda^2 + B^2 g \lambda^3 = 0,$$

wo:

(6) $$h = 0$$

eine Fläche 2. Ordnung ist, der Ort der Punkte, von denen an die Grundflächen $f = 0$ und $g = 0$ Berührungskegel von solcher Lage gehen, daß dem zweiten Polartrieder des ersten um- und dem ersten Polartrieder des zweiten einbeschrieben werden können (Gundelfinger in Hesse, *Vorles. Raum* 473).

Die den Grundflächen *umbeschriebene abwickelbare Fläche* 8. Ordnung, das Ebenenbüschel der gemeinsamen Tangentialebenen der Grundflächen, hat die Gleichung:

(7) $$(9 A B f g - h k)^2 - 4(3 B f k - h^2)(3 A g h - k^2) = 0$$

und ihre *Rückkehrkurve* 12. Ordnung die Gleichungen:

(8) $$3 A f : h = A h : B k = k : 3 B g.$$

Eine gerade Linie wird von den Flächen des Büschels in einer *Punktinvolution* geschnitten und von *zwei* Flächen des Büschels berührt. Die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte der Involution.

Die Gleichung des Büschels in Achsenkoordinaten q_{kl} hat die Form ($\Delta(\lambda)$ mit u_k und u_k' geändert):

(9) $$\varphi + \chi \lambda + \psi \lambda^2 = 0,$$

wo $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die Gleichung der Grundflächen in Achsenkoordinaten sind. Die Gleichung:

(10) $$\chi = 0$$

stellt den *Komplex 2. Grades* derjenigen Strahlen dar, welche die beiden Grundflächen in vier *harmonischen* Punkten schneiden; die Gleichung:

(11) $$\chi^2 - 4 \varphi \psi = 0$$

stellt den Komplex 4. Grades derjenigen Strahlen dar, welche die Grundkurve schneiden (vgl. Pick, *Wien. Ber.* **100** (1901), 561).

§ 3. Polarentheorie im Flächenbüschel.

Die *Polarebenen eines Punktes* in bezug auf die Flächen des Büschels bilden einen *Ebenenbüschel*, dessen Achse dem Punkte konjugiert heißt (Plücker, *Abhandl.* **1**, 88).

Die *reziproken Polaren einer Geraden* in bezug auf die Flächen des Büschels bilden eine *Regelschar* und die den Punkten der Geraden konjugierten Achsen deren Leitschar.

Die *Pole einer Ebene* in bezug auf die Flächen des Büschels bilden eine kubische Raumkurve und die konjugierten Achsen der Punkte der Ebene deren Sehnenkongruenz (Hesse, *Werke* 345).

Der *Ort der Schnittkurve* der Polarebene eines Punktes in bezug auf die laufende Fläche des Büschels mit dieser ist eine *Fläche 3. Ordnung* (Steiner, *Werke* **2**, 652; Sturm, *Flächen dritter Ordnung*, 16).

Die Verbindungslinien der Pole einer Ebene oder die Schnittlinien der Polarebenen eines Punktes in bezug auf die beiden Flächen $f = 0$ und $g = 0$ bilden einen *tetraedralen Komplex*. Dieser besteht auch aus allen den Geraden, deren reziproke Polaren in bezug auf $f = 0$ und $g = 0$ sich schneiden (Reye, *G. d. L.* **3** (1910), 29).

Nimmt man f und g in der Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} f = a_1 x_1^{\,2} + a_2 x_2^{\,2} + a_3 x_3^{\,2} + a_4 x_4^{\,2} = 0, \\ g = b_1 x_1^{\,2} + b_2 x_2^{\,2} + b_3 x_3^{\,2} + b_4 x_4^{\,2} = 0, \end{cases}$$

so hat der Komplex die Gleichung:

$$(2)\qquad (a_2 a_3 b_1 b_4 + a_1 a_4 b_2 b_3) p_{23} p_{14} + (a_3 a_1 b_2 b_4 + a_2 a_4 b_3 b_1) p_{31} p_{24} \\ + (a_1 a_2 b_3 b_4 + a_3 a_4 b_1 b_2) p_{12} p_{34} = 0.$$

Für zwei konfokale Flächen $f = 0$ und $g = 0$ geht er in den *Achsenkomplex* über.

Während im allgemeinen die Polarebenen eines Punktes in bezug auf die Flächen des Büschels einen Ebenenbüschel bilden, gibt es insbesondere solche Punkte, deren Polarebenen in bezug auf die Flächen des Büschels zusammenfallen. Sie heißen *Hauptpunkte* und ihre Polarebenen *Hauptebenen*. Sie sind identisch mit den *Doppelpunkten der nicht eigentlichen Flächen des Büschels*. Sie bestimmen sich aus den vier Gleichungen:

$$(3)\qquad f_k + \lambda g_k = (a_{k1} + \lambda b_{k1}) x_1 + (a_{k2} + \lambda b_{k2}) x_2 \\ + (a_{k3} + \lambda b_{k3}) x_3 + (a_{k4} + \lambda b_{k4}) x_4 = 0,$$

$k = 1, 2, 3, 4$, wo λ eine Wurzel der Gleichung:

$$\Delta(\lambda) = 0. \tag{4}$$

Hat diese *vier verschiedene Wurzeln*, so gehört zu jeder Wurzel vermöge der Gleichungen (3) ein Hauptpunkt, und die vier Hauptpunkte bilden das alsdann einzige *gemeinsame Polartetraeder* der beiden Grundflächen sowie aller Flächen des Büschels. In bezug auf dieses erhalten die beiden Grundflächen Gleichungen von der Form (1). Das Büschel enthält in diesem Falle *vier Kegel*, deren Spitzen die Hauptpunkte sind (Lamé, *Examen* (1818), 72).

Wenn indessen die vier Gleichungen (3) infolge der Bedingung (4) im allgemeinen vier durch einen Punkt gehende Ebenen darstellen, so können im besonderen diese vier Ebenen auch durch eine Achse gehen oder alle vier zusammenfallen. Es sind daher verschiedene Fälle zu unterscheiden, mit denen zugleich alle möglichen Fälle der Berührung 2. Ordnung hervorgehen (Plücker, *Abhandl.* **1**, 107) und mit denen außerdem das *Problem der gleichzeitigen Transformation zweier quadratischer Formen von vier Variablen auf Summen von Quadraten* vollständig erledigt wird (Cauchy, *Exercices* **4** (1829), 140; Jacobi, *Werke* **3** (1834), 191; Plücker, *System d. analyt. Geom. d. Raumes* (1846), 324; Weierstraß, *Berl. Monatsber.* 1868, 316).

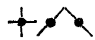
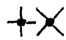
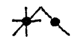
§ 4. Einteilung der Flächenbüschel zweiter Ordnung.

Die Unterscheidung der *verschiedenen Arten von Büscheln*, bezüglich der verschiedenen Lagen zweier Flächen 2. Ordnung gegeneinander, beruht auf der Theorie der *Elementarteiler der Determinante* $\Delta(\lambda)$.

Sei nämlich λ_i der Exponent der höchsten Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\Delta(\lambda)$ vorkommt; ferner λ_i' der Exponent der höchsten Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten 3. Grades $\Delta_{kl}(\lambda)$, λ_i'' der Exponent der höchsten Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in allen Unterdeterminanten 2. Grades $\delta_{kl}(\lambda)$, λ_i''' der Exponent der höchsten Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in allen Elementen der Determinante $\Delta(\lambda)$ vorkommt. Dann heißen die Differenzen:

$$l_i - l_i', \quad e_2 = l_i' \quad l_i, \qquad = l_i'' - \qquad e_4 = l_i'' \qquad 0, \tag{1}$$

soweit sie nicht 0 sind, die zur Wurzel λ_i gehörigen Elementarteilerexponenten. Nach den Werten von $l_1, l_2, \ldots$ und $e_1, e_2,$ sind alsdann folgende Fälle möglich:

(2) $l_1, l_2, l_3, \ldots =$ / $e_1, e_2, e_3, \ldots =$	a 1 1 1 1	b 2 1 1	c 2 2	d 3 1	e 4
I 1, 1, 1, 1,					
II 2, 1, 1,					
III 2, 2,					
IV 3, 1,					
V 4,					

Hier bedeuten die *Punkte* die voneinander verschiedenen Wurzeln; die *Anzahl der Striche*, die ein Punkt trägt, die Multiplizität der betreffenden Wurzel; die Anzahl der je *gleichgerichteten* Striche an jedem Punkte die bezüglichen Elementarteilerexponenten (nach M. Bôcher, *Götting. Preisschrift* 1891, 13).

Einer Wurzel λ_i entspricht als nicht eigentliche Fläche des Büschels ein *Kegel* oder ein *Ebenenpaar* oder eine *Doppelebene*, je nachdem in der Tabelle (2) ihr Punkt nur Striche von einer oder von zwei oder von drei Richtungen enthält. So enthält z. B. im Falle II d das Büschel ein dreifaches Ebenenpaar und einen einfachen Kegel, im Falle II e eine vierfache Doppelebene.

In den Fällen I gibt es bei a ein, bei b ∞^1, bei c ∞^2 und bei d ∞^3 gemeinsame Polartetraeder; in den Fällen II bis V gibt es kein gemeinsames Polartetraeder, also auch keine gemeinsame Quadratdarstellung beider Flächen. Charakteristisch aber ist, daß die Fälle gleicher Zeile jedesmal ein gemeinsames Paar kanonischer Gleichungen für die Flächen $f = 0$ und $g = 0$ zulassen, und zwar:

$$(3) \qquad \text{I. } f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 = 0,$$
$$g = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

$$\text{II. } f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\lambda_3 x_3 x_4 + x_3^2 = 0,$$
$$g = x_1^2 + x_2^2 + 2 x_3 x_4 = 0;$$

$$\text{III. } f = x_1^2 + x_3^2 + 2\lambda_1 x_1 x_2 + 2\lambda_2 x_3 x_4 = 0,$$
$$g = x_1 x_2 + x_3 x_4 = 0;$$

$$\text{IV. } f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 (x_3^2 + 2 x_2 x_4) + 2 x_2 x_3 = 0,$$
$$g = x_1^2 + (x_3^2 + 2 x_2 x_4) = 0;$$

$$\text{V. } f = x_2^2 + 2 x_1 x_3 + 2\lambda_1 (x_1 x_4 + x_2 x_3) = 0,$$
$$g = x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0.$$

Die verschiedenen Fälle *a, b, c, d, e* unterscheiden sich dann innerhalb jeder Zeile nur dadurch, daß die Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda)$, den Kolonnenüberschriften entsprechend gleich werden (Sylvester, *Phil. Mag.* (4) **1** (1851), 119; Killing, *Dissert.* Berlin 1872; Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum* 215).

Die Grundkurve des Büschels ist in den verschiedenen Fällen: I*a* *Raumkurve 4. Ordnung ohne Doppelpunkt*; I*b* zwei eigentliche Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Punkten, I*c* ein windschiefes Viereck, I*d* ein doppelter eigentlicher Kegelschnitt; II*b* *Raumkurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt*, II*c* eigentlicher Kegelschnitt und zwei sich schneidende Gerade, die auch beide den Kegelschnitt schneiden, II*d* zwei sich berührende Kegelschnitte, II*e* zwei sich schneidende Doppelgerade; III*c* *Raumkurve 3. Ordnung mit Sehne*; III*e* Doppelgerade mit zwei diese schneidenden windschiefen Geraden; IV*d* *Raumkurve 4. Ordnung mit Spitze*, IV*e* Kegelschnitt und zwei sich auf ihnen schneidende Gerade; V*e* *Raumkurve 3. Ordnung mit Tangente.*

Innerhalb jeder der 13 Arten von Flächenbüscheln ist bei reellen a_{kl}, b_{kl} nach der *Realität* der Wurzeln λ_i, der Hauptpunkte und der nicht eigentlichen Flächen zu unterscheiden. Zwei Wurzeln können nur dann konjugiert komplex sein, wenn die zugehörigen l_i und e_i entsprechend gleich sind. Im Normalfalle I*a* gibt es vier Unterfälle: 1. die vier Wurzeln λ_i, die vier Hauptpunkte und die vier Kegel des Büschels sind reell; 2. die vier Wurzeln und die vier Hauptpunkte sind reell, aber nur zwei Kegel reell; 3. es sind zwei Wurzeln, zwei Hauptpunkte, zwei Kegel reell; 4. es gibt keine reellen Wurzeln, Hauptpunkte und Kegel (Sturm, *Flächen 3 Ordnung* 254; 304; Cremona, *J. f.*

Math. 68 (1868), 124; Painvin, *Nouv. Ann.* (2) 7 (1868) 481; Killing, *Dissert.* Berlin 1872).

§ 5. Flächen mit gemeinsamem Kegelschnitt.

Besondere Betrachtungen knüpfen sich an die Fälle Ib und Id.

Wenn zwei Flächen 2. Ordnung *einen Kegelschnitt gemein haben*, so schneiden sie sich außerdem noch in einem Kegelschnitt. Die beiden Kegelschnitte haben zwei Punkte gemein, und die Flächen berühren sich in diesen („*doppelte Berührung*"). Die Verbindungslinie beider Punkte heißt *Berührungssehne.* Zugleich haben die beiden Flächen zwei gemeinsame *Tangentenkegel.* Analytisch werden alle Flächen 2. Ordnung, die mit $f = 0$ zwei Kegelschnitte in den Ebenen $U = 0$ und $V = 0$ gemein haben, durch die Gleichung (Kap. XXVII, § 31, (1)):

$$f + \lambda U V = 0 \tag{1}$$

dargestellt (Hesse, *Vorles. Raum* (3. Aufl.) 121).

Als besondere Beispiele von zwei Flächen 2. Ordnung, die zwei Kegelschnitte gemein haben oder sich in zwei Punkten berühren, können zwei ähnliche und ähnlich liegende Flächen 2. Ordnung (Lamé, *Examen* (1818), 41) dienen oder zwei Rotationsflächen 2. Ordnung mit einem gemeinsamen Brennpunkt (Magnus, *Aufgaben* **2**, 353). Eine Rotationsfläche 2. Ordnung und eine Kugel haben eine doppelte Berührung in zwei Punkten des imaginären Kugelkreises (Hesse, *Vorles. Raum* 343). Zwei nicht konzentrische Kugeln schneiden sich außen in dem imaginären Kugelkreise in einem Kreise, dessen Ebene die *Potenzebene* der beiden Kugeln ist, und haben zwei gemeinsame Tangentenkegel, deren Spitzen ihre zwei *Ähnlichkeitspunkte* sind (s. Kötter, *D. Math. Ver.* **5**, 89).

Wenn drei Flächen 2. Ordnung durch einen Kegelschnitt gehen, so gehen die drei Ebenen der Kegelschnitte, in denen sie sich außerdem schneiden, durch eine Gerade, bei drei Kugeln die Potenzachse. Bei vier solchen Flächen gehen die Ebenen der sechs übrigen Kegelschnitte durch einen Punkt, bei vier Kugeln den Potenzpunkt.

Zwei Flächen, die sich längs eines Kegelschnittes berühren, heißen einander ein- und umbeschrieben. Analytisch werden alle Flächen, welche die Fläche $f = 0$ längs ihrer Schnittkurve mit der Ebene $U = 0$ berühren, in der Form:

(2) $$f + \lambda U^2 = 0$$

dargestellt (Magnus, *Aufg.* **2**, 352). Eine Fläche und ihr Berührungskegel, zwei konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Flächen, zwei konzentrische Kugeln sind Beispiele solcher sich berührender Flächen.

Wenn zwei Flächen 2. Ordnung sich längs eines Kegelschnittes berühren, so schneidet die Tangentialebene in einem Kreispunkt der einen Fläche, die andere in einem Kegelschnitt, für den der Kreispunkt ein Brennpunkt ist. Ein Spezialfall dieses Satzes ist das Theorem von Dandelin über Rotationskegel und einbeschriebene Kugel (Dandelin, *Brux. nouv. mém.* **2** (1822), 171).

Zwei Flächen 2. Ordnung, die einer dritten Fläche 2. Ordnung umbeschrieben sind, schneiden sich ihrerseits in zwei ebenen Kurven, deren Ebenen Symptosenebenen heißen. Die Aufgabe, zu vier Flächen 2. Ordnung, die derselben Fläche 2. Ordnung $f = 0$ einbeschrieben sind, eine fünfte zu finden, die ebenfalls der Fläche $f = 0$ einbeschrieben ist und jene vier berührt, ist eine Verallgemeinerung der Berührungsaufgabe des Apollonius für Kugeln (Kötter, *Bericht* D. Math. Ver. **5**, 109).

§ 6. Besondere Büschel und Scharen.

Für zwei *konzentrische Mittelpunktsflächen* 2. Ordnung geht das gemeinsame Polartetraeder in das gemeinsame System konjugierter Durchmesser (nicht immer reell) über (Fall I a). Für eine *Mittelpunktsfläche* und eine *konzentrische Kugel* wird dieses gemeinsame System das der Hauptachsen der ersteren Fläche. Für eine *Rotationsfläche* und *konzentrische Kugel* ergeben sich ∞^1 gemeinsame Systeme (Fall I b). Zwei konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Mittelpunktsflächen haben alle ihre Systeme konjugierter Durchmesser gemein (Fall I d).

Der durch *zwei Kugeln* bestimmte Kugelbüschel (Fall I b, oder wenn die Kugeln sich berühren, Fall II c) enthält die Potenzebene und die unendlich ferne Ebene als doppelt zählendes Ebenenpaar und zwei einfach zählende Kugelkegel.

Ist in bezug auf ein rechtwinkliges Achsensystem $Oxyz$ die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung und 2. Klasse in Punkt- und Ebenenkoordinaten:

(1) $$f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + \cdots a_{44}t^2 = 0,$$

(2) $$F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + \cdots + b_{44}s^2 = 0,$$

wobei

(3) $$b_{kl} = A_{kl},$$

so ist von der Flächenschar (Hesse, *Vorles. Raum* 331):

(4) $$F(u, v, w, s) + \mu(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

die Determinante dieselbe wie beim *Hauptachsenproblem* der Fläche 2. Klasse in Kap. XXV, § 11, (16). In den Koeffizienten a_{kl} ausgedrückt, lautet ihre Entwicklung:

(5) $$A^3 + A^2 A''_{44}\mu + A A'_{44}\mu^2 + A_{44}\mu^3.$$

Die Größen A_{44}, A'_{44}, A''_{44} (vgl. Kap. XXV, § 10, (6)) sind daher *Simultaninvarianten der Fläche* (1) *und des imaginären Kugelkreises* $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, also wie dieser gegen jede Transformation der rechtwinkligen Koordinaten invariant.

Da die Gleichung (2) nach Kap. XXV § 11, (14) durch solche Transformation stets auf eine der Formen:

(6) $$\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 - s^2 = 0 \quad \text{oder:} \quad \beta v^2 + \gamma w^2 + 2us = 0$$

gebracht werden kann, so umfaßt die Schar (4) gerade die beiden Scharen der *konfokalen Ellipsoide und Hyperboloide* und der *konfokalen Paraboloide*:

(7) $$\frac{x^2}{\alpha+\mu} + \frac{y^2}{\beta+\mu} + \frac{z^2}{\gamma+\mu}$$

und

(8) $$\frac{y^2}{\beta+\mu} + \frac{z^2}{\gamma+\mu} + 2x + \mu = 0.$$

B. Bündel von Flächen zweiter Ordnung.

§ 7. Begriff und Gleichung des Bündels.

Die Gesamtheit aller Flächen 2. Ordnung, die durch *sieben* gegebene Punkte von allgemeiner Lage hindurchgehen, bildet ein *Bündel von Flächen 2. Ordnung.*

Alle Flächen des Bündels gehen noch durch einen *achten* Punkt hindurch, der durch die sieben gegebenen vollkommen bestimmt ist. Diese acht Punkte, *Grundpunkte des Bündels,* sind auch als

Schnittpunkte von irgend drei Flächen des Bündels, *den Grundflächen des Bündels*, bestimmt. Sind $f=0$, $g=0$, $h=0$ die Gleichungen der drei Grundflächen, so ist die *Gleichung des Bündels* mit zwei Parametern λ und μ:

$$(1) \qquad f+\lambda g+\mu h=0.$$

Durch *zwei* beliebig gegebene Punkte des Raumes geht im allgemeinen eine Fläche des Bündels. Das duale Gebilde heißt eine *Scharschar von Flächen 2. Klasse.*

Die acht Schnittpunkte dieser Flächen 2. Ordnung, die derart voneinander abhängen, daß durch sieben von ihnen der achte bestimmt ist, heißen *acht assoziierte Punkte* (Reye, *Ann. di mat.* (2) **2**, 129; *G. d. L.* **3** (1910), 38). Irgendwie zu zweimal vier verteilt, bilden sie die Ecken zweier Polartetraeder einer Fläche 2. Ordnung. Auch sind die Ecken zweier Polartetraeder einer Fläche 2. Ordnung stets acht assoziierte Punkte. Sind 1, 2, ... 8 acht assoziierte Punkte, so liegen die Schnittlinien der vier Ebenenpaare 123×567, 234×678, 345×781, 456×812 hyperboloidisch.

Das Bündel von Flächen 2. Ordnung wird von einer *Ebene* in einem Kegelschnittbündel geschnitten; ∞^1 Flächen des Bündels berühren die Ebene, und die Berührungspunkte bilden die Kernkurve des Kegelschnittbündels.

Eine *Gerade* wird in jedem ihrer Punkte von einer Fläche des Bündels berührt.

Die *Erzeugenden* der Flächen des Bündels bilden einen Komplex 3. Grades (Reye, *G. d. L.* **3** (1910), 134ff.).

§ 8. Polarentheorie im Flächenbündel.

Die *Polarebenen eines Punktes P* in bezug auf die Flächen des Bündels bilden einen Ebenenbündel, gehen also durch *einen* Punkt P'; die Punkte P und P' heißen einander *konjugiert* in bezug auf das Bündel. Die acht Grundpunkte sind je sich selbst konjugiert.

Die zu den Punkten einer *Geraden* konjugierten Punkte bilden eine Raumkurve 3. Ordnung, die *reziproken Polaren der Geraden* in bezug auf die Flächen des Bündels die Sehnenkongruenz der Raumkurve.

Die *Pole einer Ebene* in bezug auf die Flächen des Bündels bilden eine Fläche 3. Ordnung.

Die *Spitzen der im Bündel enthaltenen Kegel* liegen auf einer Raumkurve 6. Ordnung, 16. Ranges und 3. Klasse, der Kernkurve, Jacobischen Kurve oder Quadrupelkurve des Bündels. Sie ist zugleich der Ort der Punkte, deren Polarebenen in bezug auf die Flächen des Bündels ein Ebenenbüschel bilden, und der Ort der Ecken der gemeinsamen Polartetraeder aller in dem Bündel enthaltenen Büschel (Reye, *G. d L.* **3** (1910), 135).

§ 9. Besondere Bündel.

Während zwei Flächen 2. Ordnung im allgemeinen ein gemeinsames Polartetraeder besitzen, haben drei Flächen 2. Ordnung im allgemeinen kein gemeinsames Polfünfeck; wenn sie aber ein solches haben, so haben sie unendlich viele. Die Bedingung hierfür ist, daß die drei Flächen die ersten Polaren dreier Punkte in bezug auf eine Fläche 3. Ordnung sind. Sie bestimmen dann ein *Bündel mit Polfünfeck* (G. Darboux, *Bull. Sc. M.* (1) **1** (1870), 353; W. Frahm, *Math. Ann.* **7** (1874), 635; E. Toeplitz, *Dissert.* Leipzig (1876) und *Math. Ann.* **11** (1877), 434; Th. Reye, *J. f. Math.* **82** (1877), 75; Townsend, *Quart. Journ.* **11** (1871), 347).

Liegen die sieben Grundpunkte des Bündels auf der durch sechs von ihnen bestimmten Raumkurve 3. Ordnung, so gehen alle Flächen des Bündels durch diese, und es liegt ein *Bündel mit kubischer Grundkurve* vor (Geiser, *J. f. Math.* **69** (1868), 215; R. Sturm, *J. f. Math.* **70** (1869), 238; J. Cardinaal, *J. f. Math.* **101** (1887), 142; Th. Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 180; R. Sturm, *Liniengeometrie* **1**, 252).

Drei Hyperboloide, die eine Gerade gemein haben, schneiden sich noch in vier Punkten und bestimmen ein *Bündel mit Grundgerader und vier Grundpunkten* (M. Chasles, *J. de Math.* (2) **2** (1857), Nr. 29; R. Sturm, *Math. Ann.* **1** (1869), 559; Th. Reye, *G. d. L.* **3** (1910), 139; G. Darboux, *Bull. Sc. M.* (1) **1** (1870), 354; Sturm, *Liniengeometrie* **1**, 336).

Drei Flächen 2. Ordnung, die *einen Kegelschnitt und zwei Punkte* gemein haben, bestimmen ein Bündel. Ein besonderer Fall von diesem ist das durch drei Kugeln bestimmte Kugelbündel oder die lineare Kugelkongruenz (Th. Reye, *Geom. d. Kugeln*, Leipzig (1870), 21; 79).

C. Systeme dritter bis neunter Stufe.

§ 10. Das Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung.

Sind $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, $k = 0$ vier Flächen 2. Ordnung, die keinem Bündel angehören, so bilden die ∞^3 Flächen:

$$f + \lambda g + \mu h + \nu k = 0 \tag{1}$$

ein *lineares System 3. Stufe* oder ein *Gebüsch von Flächen 2. Ordnung.*

Durch einen Punkt des Raumes gehen ∞^2 Flächen des Gebüsches, die ein Bündel bilden. Jeder Punkt gehört einem System assoziierter Punkte des Gebüsches an. Durch zwei Punkte gehen ∞^1 Flächen des Gebüsches, die einen Büschel bilden. Jedes Punktepaar gehört einer Durchdringungskurve 4. Ordnung des Gebüsches an. Durch drei Punkte geht eine Fläche des Gebüsches (De Jonquière, *J. de Math.* (2) **7** (1862), 412; R. Sturm, *J. f. Math.* **70** (1869), 212; *Math. Ann.* **1** (1869), 554; Th. Reye, *G. d. L,* **3** (1910), 143).

Das duale Gebilde ist das *lineare Gewebe 3. Stufe* von Flächen 2. Klasse (Reye, *J. f. Math.* **82** (1877), 5).

Die Polarebenen zweier Punkte in bezug auf die Flächen des Gebüsches sind homologe Ebenen zweier kollinearen Räume (De Jonquière, *J. de Math.* (2) **7** (1862), 412). Die reziproken Polaren einer Geraden in bezug auf die Flächen des Gebüsches bilden einen tetraedralen Komplex (Reye, *G. d. L.* (1910) **3**, 144).

Weist man jeder Fläche Σ des Gebüsches die Polarebene Σ' eines festen Punktes in bezug auf die Fläche zu, so wird das Gebüsch Σ auf den Ebenenraum Σ' projektiv bezogen. Einem Bündel oder Büschel von Flächen Σ entspricht ein Bündel oder Büschel von Ebenen Σ'. Jede Durchdringungskurve 4. Ordnung zweier Flächen Σ entspricht eine Gerade als Durchschnitt zweier Ebenen Σ'. Jeder Gruppe assoziierter Punkte als Durchschnitt dreier Flächen Σ entspricht ein Punkt, der Schnittpunkt dreier Ebenen Σ' (Th. Berner, *Dissert.* Berlin 1865; Th. Reye, *J. f. Math.* **86** (1879), 85; *G. d. L.* **3**, 145; R. Sturm, *Liniengeom.* **2**, 278).

Der Ort der Spitzen der ∞^2 Kegel, die dem Gebüsch angehören, die *Kernfläche* oder *Jacobische Fläche* des Gebüsches ist eine Fläche 4. Ordnung. Man erhält ihre Gleichung durch Nullsetzen der Funktionaldeterminante von f, g, h, k. Sie ist auch der Ort der Berührungspunkte zweier Flächen des Gebüsches; ferner der Ort eines Punktes P, dessen Polarebenen in bezug auf die Flächen des Gebüsches durch einen Punkt Q hindurchgehen.

Die Punkte P und Q heißen einander konjugiert in bezug auf das Gebüsch und liegen beide auf der Kernfläche. Die Verbindungslinie zweier einander konjugierter Punkte heißt ein *Hauptstrahl* des Gebüsches. Er wird von den Flächen des Gebüsches in einer Punktinvolution geschnitten, deren Doppelpunkte die konjugierten Punkte sind. Die Hauptstrahlen bilden eine Kongruenz (R. Sturm, *Flächen 3. Ordnung* (1867), 108, *Liniengeom.* 2, 278; Th. Reye, *J. f. Math.* **86** (1879), 86; G. Darboux, *Bull. Sc. Math.* (1) **1** (1870), 354). Das Gebüsch enthält im allgemeinen *zehn Ebenenpaare*, deren Doppellinien auf der Kernfläche liegen (Th. Reye, *J. f. Math.* **86** (1897), 86).

§ 11. Besondere Gebüsche von Flächen zweiter Ordnung.

Ein besonderes Gebüsch bilden alle Flächen, die durch *sechs Grundpunkte* hindurchgehen. Durch die sechs Grundpunkte gehen auch die Grundkurven aller in dem Gebüsch enthaltenen Büschel. Die Kernfläche geht durch die 15 Kanten des Sechsecks der Grundpunkte und durch die Doppellinien seiner zehn Paare von Gegenebenen. Sie enthält die kubischen Raumkurven durch die sechs Grundpunkte, deren Sehnen Hauptstrahlen sind und von der Kernfläche in vier harmonischen Punkten geschnitten werden (Th. Reye, *J. f. Math.* **86** (1879), 90; R. Sturm, *Math. Ann.* **1** (1869), 533). Dieses Gebüsch wird zur Definition einer involutorischen Verwandtschaft benutzt, da jeder Punkt mit den sechs Grundpunkten einen Punkt als achten assoziierten bestimmt (V. Eberhard, *Dissert.* Breslau 1885).

Die *ersten Polaren aller Punkte des Raumes in bezug auf eine Fläche 3. Ordnung* bilden ein besonderes Gebüsch von Flächen 2. Ordnung, bei dem die Doppellinien der zehn Ebenenpaare die Kanten eines *Pentaeders* bilden. Die Kernfläche des Gebüsches ist die Hessesche oder Steinersche Fläche der Fläche 3. Ordnung (Steiner, *J. f. Math.* **53** (1857), 138 = *Werke* **2**, 656; R. Sturm, *Flächen 3. Ordnung* (1867), 127; L. Cremona, *J. f. Math.* **68** (1868), 46; Frahm, *Math. Ann.* **7** (1874), 635; Toeplitz, *Math. Ann.* **11** (1877), 432; Thieme, *Ztschr. f. M.* **24** (1879), 221; 276; *Math. Ann.* 28 (1886), 133; Reye, *G. d. L.* **3** (1892), 96; 113).

Vier Flächen 2. Ordnung, die durch eine Gerade gelegt werden, bestimmen ein Gebüsch von Flächen 2. Ordnung. Die Flächen des Gebüsches schneiden sich büschelweise in der *Basisgeraden* und einer Raumkurve 3. Ordnung, bündelweise in der Basisgeraden und vier assoziierten Punkten. Die Kernfläche ist

der Ort der Doppelgeraden der Ebenenpaare des Gebüsches (R. Krause, *Dissert.* Straßburg (1879); Th. Reye, *G. d. L.* **3** (1892) 168; 174; J. Cardinaal, *J. f. Math.* **111** (1893), 31. Gebüsch mit *zwei Basisgeraden* s. R. Sturm, *Liniengeom.* **1**, 252; 254; Silldorf, *Dissert.* Münster (1882); A. Rasche, *Ztschr. f. M.* **20** (1875), 133).

Die Jacobische Fläche von vier Flächen 2. Ordnung, die *einen Kegelschnitt gemein haben,* besteht aus der doppelt zählenden Ebene des Kegelschnittes und einer durch ihn gehenden Fläche 2. Ordnung (Th. Reye, *G. d. L.* **3** (1892), 211). Für das hierher gehörige *Kugelgebüsch* ist die Jacobische Fläche die Orthogonalkugel der vier das Gebüsch bestimmenden Kugeln (Reye, *Geom. der Kugeln,* 5; 78).

Alle Flächen 2. Ordnung, die ein *gegebenes Tetraeder als Polartetraeder haben,* bilden ein Gebüsch, dessen Kernfläche aus den Seitenflächen des Tetraeders besteht (Painvin, *J. f. Math.* **63** (1864), 58; K. Meister, *Ztschr. f. M.* **31** (1886), 321; **34** (1889), 6; Th. Reye, *G. d. L.* **3** (1892), 216; Timerding, *Ann. di mat.* (3) **1** (1898), 95).

§ 12. Systeme und Gewebe vierter bis neunter Stufe.

Die Gesamtheit aller ∞^9 Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse im Raume bildet ein *System,* bezüglich *Gewebe 9. Stufe.* Die zehn Koeffizienten der Gleichung der Fläche dienen als homogene Koordinaten einer Fläche des Systems oder Gewebes. Durch p-Gleichungen zwischen den zehn Koordinaten ist im allgemeinen ein *System oder Gewebe* $(9-p)^{\text{ter}}$ *Stufe* bestimmt. Es ist linear, wenn die Gleichungen linear sind.

Ein *lineares System* p^{ter} Stufe kann auch durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum_0^p \lambda_k f_k = 0 \tag{1}$$

dargestellt werden, wo $f_k = 0$ $p+1$ linear unabhängige Flächen 2. Ordnung und λ_i p + 1 homogene Parameter sind. In einem solchen System gibt es im allgemeinen eine Fläche, die durch p gegebene Punkte geht. Ein *lineares System 8. Stufe* besteht aus allen Flächen 2. Ordnung, die irgend einem Polartetraeder einer bestimmten Fläche 2. Klasse umbeschrieben, zu ihr *apolar* sind (Th. Reye, *J. f. Math.* **82** (1877), 1; 54; Gundelfinger, *Arch. Math. Phys.* (3) **3** (1901), 309; **4** (1902), 352).

Kapitel XXIX.

Die Raumkurven dritter und vierter Ordnung.

Von *O. Staude* in Rostock.

A. Die Raumkurven dritter Ordnung.

§ 1. Begriff und Bestandteile.

Die *Raumkurve 3. Ordnung (kubischer Kegelschnitt)* ist die Raumkurve niedrigster Ordnung. *Sie hat mit jeder Ebene des Raumes drei Punkte gemeinsam.* Eine Ebene, für die *zwei* von diesen drei Punkten zusammenfallen, ist eine *Tangentialebene*; eine Ebene, für welche *alle drei* zusammenfallen, eine *Schmiegungsebene.*

Eine *Gerade* kann mit der Kurve höchstens *zwei* Punkte gemein haben. Ist dies der Fall, heißt sie *Sehne* (Sekante, Bisekante, Doppelsekante), *eigentliche* oder *uneigentliche Sehne*, je nachdem die Punkte reell oder imaginär sind, und wenn die beiden Punkte zusammenfallen, *Tangente.* Eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Kurve gemein hat, heißt *Transversale* (*Treffgerade,* Sekante). Eine Gerade, die durch einen Punkt der Kurve geht und in dessen Schmiegungsebene liegt, heißt ein *Schmiegungsstrahl* (Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 181).

Das duale Gebilde ist der *Ebenenbüschel 3. Ordnung* (das Ebenengewinde 3. Ordnung, die Raumkurve 3. Klasse) *mit drei Ebenen durch jeden Punkt des Raumes.* Die abwickelbare Fläche des Ebenenbüschels ist der Ort der Punkte, für welche *zwei* von den drei Ebenen, die Kuspidal- oder Rückkehrkurve der Ort der Punkte, für welche *alle drei* Ebenen zusammenfallen. Eine Gerade, durch welche zwei Ebenen des Büschels gehen, heißt eine *Achse* (Linie in zwei Ebenen), eine Gerade, durch die eine Ebene geht, *Streichlinie* (Linie in einer Ebene).

Die Raumkurve 3. Ordnung und das Ebenengewinde 3. Ordnung sind insofern *dasselbe Gebilde,* als die Schwingungsebenen

der Raumkurve 3. Ordnung ein Ebenengewinde 3. Ordnung bilden und die Rückkehrkurve eines Ebenengewindes 3. Ordnung eine Raumkurve 3. Ordnung ist. Man sagt daher auch, daß *die Raumkurve von der 3. Ordnung auch von der 3. Klasse ist und umgekehrt.* Die Ordnung bezeichnet die Anzahl der *Punkte in einer Ebene*, die Klasse die Anzahl der Schmiegungsebenen, oder schlechthin *Ebenen, durch einen Punkt.*

Der *Rang der Kurve*, die Anzahl der Tangenten, die eine Gerade treffen, ist 4. Die Tangenten der Raumkurve 3. Ordnung bilden eine Linienfläche 4. Ordnung.

Die Sehnen der Raumkurve 3. Ordnung bilden eine *Strahlenkongruenz* 1. Ordnung und 3. Klasse. Daher hat die Kurve *einen scheinbaren Doppelpunkt.* Die Achsen der Kurve bilden dual eine Strahlenkongruenz 3. Ordnung und 1. Klasse.

Die *Transversalen* der Kurve bilden einen *Komplex 3. Grades.* Der Komplexkegel eines Punktes P außerhalb der Kurve ist ein Kegel 3. Ordnung mit einer Doppelerzeugenden.

Zusammenfassendere Darstellungen der Theorie der Raumkurve 3. Ordnung geben A. F. Moebius (1827), *Werke* **1**, 117 ff.; Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* **10** (1847), 203; M. Chasles, *J. de Math.* (2) **2** (1857), 397 ff.; H. Schröter, *J. f. Math.* **56** (1858), 27 u. *Oberfl.* 2. Ordnung 227 ff.; v. Staudt, *Beitr.* (1860), 299; R. Sturm, *J. f. Math.* **79** (1875), 99; **80** (1875), 128; **86** (1879), 116; *Math. Ann.* **26** (1886), 465; L. Cremona, *Ann. di mat.* (1) **1** (1858), 264; 278; **2** (1859), 19; **5** (1863), 227; C. A. v. Drach, Kub. Kegelschnitte, Leipzig 1867; Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 163, *Hamb. Math. Gesellsch.* **2** (1890), 43.

§ 2. Analytische Darstellung und Schmiegungstetraeder.

Die vier Tetraederkoordinaten des laufenden Punktes sowie der laufenden Schmiegungsebene sind *proportional linearen Funktionen 3. Grades* eines Parameters *t:*

$$\varrho x_k = c_{k1} t^3 + c_{k2} t^2 + c_{k3} t + c_{k4}, \tag{1}$$

$$\sigma u_k = C_{k1} - 3 C_{k2} t + 3 C_{k3} t^2 - C_{k4} t^3, \tag{2}$$

wo C_{kl} die Unterdeterminanten 3. Grades der Determinante $C = |c_{kl}|$ sind.

Ein *Schmiegungstetraeder* ist durch zwei Punkte P_1 und P_4 der Raumkurve bestimmt und dadurch gekennzeichnet, daß die-

jenigen drei Punkte der Kurve, die in jeder Seitenfläche des Tetraeders liegen, beziehungsweise sind: $P_1P_1P_1$, $P_1P_1P_4$, $P_1P_4P_4$, $P_4P_4P_4$. Die erste und letzte dieser Seitenflächen sind also die Schmiegungsebenen in in P_1 und P_4, die beiden mittleren aber die durch P_4 und P_1 gehenden Tangentialebenen der Punkte P_1 und P_4. Von den sechs Kanten des Tetraeders sind zwei Tangenten, zwei Treffgerade und zugleich Streichlinien, eine Sehne und eine Achse. Die Beziehung des Schmiegungstetraeders zur Kurve ist daher dual. Es gibt ∞^2 solche Tetraeder. Jede Sehne, welche die eine der beiden in einem Schmiegungstetraeder enthaltenen Treffgeraden schneidet, schneidet auch die andere und wird durch die beiden Schnittpunkte harmonisch geteilt.

In bezug auf ein *Schmiegungstetraeder* lauten die zusammengehörigen Parameterdarstellungen der *Punkte, Schmiegungsebenen* und *Tangenten* der Raumkurve:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1, \tag{3}$$

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -3t : 3t^2 : -t^3, \tag{4}$$

$$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = t^2 : -2t^3 : t^4 : 3t^2 : 2t : 1. \tag{5}$$

Moebius, *Werke* **1**, 117; 118; 121; H. Schröter, *Math. Ann.* **25** (1885), 294; Sturm, *Liniengeom.* **1**, 356; Cremona, *Ann. di mat.* (1) **1** (1858), 164; **2** (1859), 19.

§ 3. Raumkurve dritter Ordnung und Fläche zweiter Ordnung.

Eine Raumkurve 3. Ordnung hat mit einer Fläche 2. Ordnung *sechs Punkte* gemein. Hat sie mehr als sechs Punkte gemein, liegt sie ganz in der Fläche 2. Ordnung.

Alle durch eine Raumkurve 3. Ordnung gehenden Flächen 2. Ordnung bilden ein *Bündel*. Alle nicht eigentlichen Flächen des Bündels sind *Kegel* und die Raumkurve selbst der *Ort ihrer Spitzen*. Die Sehnen der Kurve sind die Erzeugenden der Kegel. Die Kurve wird aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel 2. Ordnung projiziert. Sie bildet mit jeder ihrer Sehnen den vollständigen Durchschnitt der beiden Kegel 2. Ordnung, welche die Kurve aus den Endpunkten der Sehne projizieren. Die in einer Schmiegungsebene liegenden Achsen umhüllen einen *Kegelschnitt*, den *„Schmiegungskegelschnitt"*.

Alle eigentlichen Flächen des Bündels sind *Regelflächen,* deren eine Regelschar aus Sehnen, deren andere Regelschar aus Transversalen besteht. Der vollständige Durchschnitt irgend zweier solcher Regelflächen besteht stets aus der Raumkurve 3. Ordnung und einer ihrer Sehnen oder Tangenten. Umgekehrt bildet die Kurve mit jeder ihrer Sehnen oder Tangenten die Grundkurve eines Büschels von Flächen 2. Ordnung, welcher in dem Bündel enthalten ist.

Diejenige Regelschar einer Fläche des Büschels, zu welcher die genannte Sehne oder Tangente gehört, besteht aus lauter Sehnen der Raumkurve 3. Ordnung, die andere aus lauter Transversalen. Zwei Raumkurven 3. Ordnung auf einer Fläche 2. Ordnung heißen gleichartig, wenn sie dieselbe Regelschar der Fläche zu Sehnen haben. Zwei gleichartige solche Kurven schneiden sich in vier, zwei ungleichartige in fünf Punkten. S. Cremona, *Ann. di mat.* (1) **1**, 172; Reye, *G. d. L.* 2 (1907), 168.

§ 4. Polarentheorie der Raumkurve 3. Ordnung.

Die Verbindungsebene der Berührungspunkte der drei durch einen Punkt gehenden Schmiegungsebenen heißt *die Polarebene des Punktes.* Der Schnittpunkt der Schmiegungsebenen der drei in einer Ebene liegenden Punkte der Kurve heißt *der Pol der Ebene.*

Jeder Punkt ist der Pol seiner Polarebene, jede Ebene die Polarebene ihres Poles. *Pol und Polarebene liegen stets vereinigt.* Die Verbindungslinie zweier Punkte und die Schnittlinie ihrer Polarebenen sind *reziproke Polaren.*

Diese reziproke Verwandtschaft zwischen Punkten und Ebenen ist diejenige *involutorische Korrelation* des Raumes, die auch als *Nullsystem* bezeichnet wird und zugleich das Polarsystem eines *linearen Komplexes* bildet.

Ist die Raumkurve, auf ein allgemeines Koordinatentetraeder bezogen, durch die Gleichungen § 2, (1) gegeben, so ist die *Gleichung dieses linearen Komplexes:*

$$(1)\quad \begin{aligned}&(\gamma_{41} - 3\gamma_{44})p_1 + (\gamma_{51} - 3\gamma_{54})p_2 + (\gamma_{61} - 3\gamma_{64})p_3\\ &\quad + (\gamma_{11} - 3\gamma_{14})p_4 + (\gamma_{21} - 3\gamma_{24})p_5 + (\gamma_{31} - 3\gamma_{34})p_6 = 0\end{aligned}$$

mit der Invariante:

$$(2)\quad \begin{aligned}&(\gamma_{41} - 3\gamma_{44})(\gamma_{11} - 3\gamma_{14}) + (\gamma_{51} - 3\gamma_{54})(\gamma_{21} - 3\gamma_{24})\\ &\quad + (\gamma_{61} - 3\gamma_{64})(\gamma_{31} - 3\gamma_{34}) = -3C.\end{aligned}$$

Hier bedeuten γ_{kl} die Unterdeterminanten 2. Grades der Determinante C bei § 2, (1).

Ist die Raumkurve, auf ein Schmiegungstetraeder bezogen, durch die Gleichungen § 2, (3) gegeben, so ist die Gleichung des linearen Komplexes:

$$(3) \qquad 3p_1 - p_4 = 0$$

und die *Beziehungen zwischen Pol* x_k *und Polarebene* u_k:

$$(4) \qquad u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = x_4 : -3x_3 : 3x_2 : -x_1.$$

Umgekehrt gehören zu einem linearen Komplex ∞^7 Raumkurven 3. Ordnung als Ordnungskurven oder Nullkurven.

Moebius, *J. f. Math.* **10** (1833), 317 = *Werke* **1**, 489; **3**, 119; v. Staudt, *G. d. L.* 191; *Beitr.* 58; Reye, *Hamburger Math. Gesellsch.* **2** (1890), 48; R. Sturm, *Liniengeom.* **1**, 82ff.

Vier Punkte einer Raumkurve 3. Ordnung bilden ein Tetraeder, die Schmiegungsebenen in ihm ein zweites. *Das eine Tetraeder ist dem andern zugleich ein- und umbeschrieben.*

Moebius, *J. f. Math.* **3** (1828), 273 = *Werke* **1**, 439; *J. f. Math.* **10** (1833), 326 = *Werke* **1**, 498; Magnus, *Aufg.* **2**, 144; Schröter, *J. f. Math.* **56** (1858), 40; Muth, *Ztschr. f. Math.* **37** (1892).

§ 5. Projektive Erzeugungen.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen dreier projektiver Ebenenbüschel ist eine Raumkurve 3. Ordnung. Die Achsen der Büschel sind Sehnen der Kurve. Umgekehrt sind die Ebenenbüschel, welche irgend zwei feste Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung mit dem laufenden Punkte der Kurve verbinden, projektiv.

Der Ort der Schnittpunkte sich schneidender entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbündel ist eine Raumkurve 3. Ordnung. Die Zentra der Bündel sind Punkte der Kurve. Umgekehrt sind die Sehnen, welche irgend zwei feste Punkte einer Raumkurve 3. Ordnung mit dem laufenden Punkte der Kurve verbinden, sich schneidende entsprechende Strahlen zweier projektiver Strahlbündel.

Chasles, *Aperçu* 405, *J. de Math.* (2) **2** (1857), 398; Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* **10** (1847), 203; Cremona, *Ann. di mat.* (1) **1**, 165, *J. f. Math.* **58** (1861), 144; v. Staudt,

Beitr. 325; Schur, *Math. Ann.* **18** (1881) 1; A. del Re, *Palermo Rend.* **1** (1887), 272.

Eine Raumkurve 3. Ordnung ist *durch sechs Punkte bestimmt.* Über ihre Konstruktion s. Moebius, *Werke* **1**, 94, 119; Cremona, *Ann. di mat.* (1) **1**, 168, 170; Seydewitz, *Arch. Math. Phys.* **10**, 208; E. Lange, *Ztschr. Math.* **26** (1881), 98; Sturm, *J. f. Math.* **79** (1874), 79; **80** (1875), 128; 334; Schröter, *Oberfl.* 253; Reye, *G. d. L.* 2 (1907), 167.

In jedem einer Raumkurve 3. Ordnung einbeschriebenen Siebeneck 1 2 3 4 5 6 7 liegt der Punkt 7 in der Ebene der drei Punkte (217) (54), (176) (43), (765) (32); Chasles, *Aperçu* 403; *J. de Math.* (2) **2** (1857), 397.

Sind 1, 2, . . ., 8 irgend 8 Punkte einer Raumkurve 3. Ordnung, so liegen die vier Geraden (123) (567), (234) (678), (345) (781), (456) (812) hyperboloidisch; A. Buchheim, *Mess. of Math.* (2) **14** (1884), 74.

Sind 1, 2, . ., 8 irgend acht Punkte einer Raumkurve 3. Ordnung, so schneiden die zehn Kanten des Fünfecks 12345 und deren Gegenebenen die Ebene 678 in entsprechenden Punkten und Geraden eines polaren Feldes; als Analogon des Satzes von Desargues von Reye, *Ztschr. Math.* **13** (1868), 523; *Hamburger Mitteil.* **2**, 47.

§ 6 Arten der kubischen Raumkurven.

Wie die Kegelschnitte nach ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden, so werden die Raumkurven 3. Ordnung nach ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Ebene eingeteilt. Danach ist die Raumkurve 3. Ordnung, wenn *von ihren drei Schnittpunkten mit der unendlich fernen Ebene* einer reell und zwei konjugiert komplex sind, eine *kubische Ellipse* (I); wenn diese Schnittpunkte alle drei reell und getrennt sind, eine *kubische Hyperbel* (II); wenn zwei zusammenfallen und einer getrennt ist, eine *kubische hyperbolische Parabel* oder parabolische Hyperbel (III); wenn alle drei zusammenfallen, eine *kubische Parabel* (IV).

Eine im Endlichen verlaufende Tangente in einem unendlich fernen Punkt der Kurve heißt eine *Asymptote.* Bei den Kurven I und III gibt es daher *eine* Asymptote, bei II *drei* und bei IV *keine* Asymptoten.

Durch die Kurve I geht ein elliptischer, durch II drei hyperbolische, durch III ein hyperbolischer und ein parabolischer, durch

IV ein parabolischer *Zylinder*. Danach sind die vier Arten von E. Lange auf *Gipszylindern* verzeichnet worden (Dyck, *Katal. math. Modelle*, 268), ebenso auf *Zelluloidzylindern* von W. Ludwig (bei M. Schilling in Halle a. S. 1902). Weitere bezügliche *Modelle* von H. Wiener (bei B. G. Teubner, Leipzig 1900).

Die Parameterdarstellungen der vier Arten lauten in *schiefwinkligen Koordinaten*:

$$x = \frac{at^3}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}; \quad y = \frac{bt^2}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}, \quad z = \frac{ct}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma},$$

und hier ist für die einzelnen Arten:

$$\text{I. } \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = e^2; \quad \text{II. } \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -e^2;$$
$$\text{III. } \alpha = 1, \quad \beta = -2e, \quad \gamma = e^2; \quad \text{IV. } \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1,$$

wo a, b, c und e nicht verschwindende Konstanten sind; s. Cremona, *J. f. Math.* 58 (1859), 149.

Die beiden in einem Schmiegungstetraeder enthaltenen Transversalen sind die Achsen einer geschart involutorischen Kollineation des Raumes, durch welche die Kurve in sich übergeht. Ist die eine Transversale unendlich fern, so halbiert die andern alle durch sie gehenden Sehnen und heißt ein *Durchmesser der Raumkurve 3. Ordnung*. Die Art I hat einen, II drei, III einen und IV unendlich viele Durchmesser. Cremona, *J. f. Math.* **58** (1861), 147; Schröter, *Oberfl.* 329.

Von Unterarten ist *die gleichseitige kubische Hyperbel* hervorzuheben, die aus jedem ihrer Punkte durch einen *gleichseitigen* Kegel projiziert wird (Reye, *G. d. L.* **2** (1907), 180; *Hamburger Mitteil.* **2**, 56), ferner eine *kubische Ellipse*, die aus jedem ihrer Punkte durch einen *orthogonalen* Kegel projiziert wird (Reye, *G. d. L.* **2** (1892), 176; W. Wirtinger, *Wien. Ber.* 94 (1886), 302; A. Schoenflies, *Geom. der Bewegung*, Leipzig 1886), 116; 119.

Die *Krümmungsverhältnisse* der Raumkurve 3. Ordnung werden untersucht von E. Weyr, *Lomb. Rend. Ist.* **4** (1871), 636; E. Timerding, *Dissert.* Straßburg 1894; R. Sturm, *Ztschr. f. Math.* **40** (1895), 1; *Fokaleigenschaften* von H. Krüger, *Dissert.* Breslau 1885; R. Mehmke, *Bökl. Mitt.* **4** (1891), 69.

B. Die Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies.

§ 7. Begriff und Darstellung.

Eine *Raumkurve 4. Ordnung* hat mit einer Ebene vier Punkte gemein. Es gibt zwei Spezies von Raumkurven 4. Ordnung. Eine Kurve der *1. Spezies* ist der vollständige Durchschnitt *zweier* Flächen 2. Ordnung. Durch eine Kurve der *2. Spezies* geht nur *eine* Fläche 2. Ordnung (s. im folgenden § 13). Den Unterschied der beiden Spezies bemerkt G. Salmon, *Cambr. Dubl. math. J.* **5** (1850), 40; s. Steiner, *J. f. Math.* **53** (1857), 138 = *Werke* **2**, 656; Sturm, *Flächen 3. Ordnung*, 185; Cremona, *Ann. di mat.* (1) **4** (1861), 73.

Die Raumkurven 4. Ordnung 1. Spezies zerfallen in *drei Arten*, insofern sie entweder *keinen Doppelpunkt* oder *einen einfachen Doppelpunkt* oder *eine Spitze* haben. Das *duale Gebilde* ist das von den gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen 2. Ordnung gebildete *Ebenengewinde* 4. Ordnung 1. Spezies mit drei entsprechenden Arten; s. Cayley, *Cam. Dubl. Math. J.* **5** (1850), 48; Reye, *G. d. L.* **3** (1910), 33.

Bezeichnet man die *charakteristischen Zahlen* einer Raumkurve derart, daß m die Ordnung, r den Rang, n die Klasse, α die Anzahl der stationären Schmiegungsebenen, β die Anzahl der stationären Punkte, x die Anzahl der in einer Ebene liegenden Schnittpunkte zweier Tangenten, y die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Verbindungsebenen zweier Tangenten, g die Anzahl der in einer Ebene liegenden Achsen (A § 1), h die Anzahl der durch einen Punkt gehenden Sehnen, so ist für die drei Arten der Raumkurven 4. Ordnung neben $m = 4$:

	r	n	α	β	x	y	g	h
1. Art:	8	12	16	0	16	8	32	2
2. Art:	6	6	4	0	6	4	6	3
3. Art:	5	4	1	1	2	2	2	2

Bei der 3. Art sind die dual entsprechenden Zahlen α und β, x und y, g und h je gleich; s. G. Salmon, *Cam. Dubl. Math. J.* **5** (1850), 37.

Die Raumkurve wird *analytisch* bestimmt durch die Gleichungen der beiden Flächen 2. Ordnung, deren Durchschnitt sie ist, oder durch eine Parameterdarstellung.

Die *Kurve 1. Art* ist vom *Geschlecht* 1. Die Koordinaten ihrer Punkte sind daher *elliptische Funktionen* eines Parameters.

Für die Verhältnisse des Tetraederkoordinaten eines *Punktes* ist in *Jacobischen* ϑ-*Funktionen:*

(1) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_2} : \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_3} : \frac{\vartheta_0(u)}{\vartheta_0} : \frac{\vartheta_3\,\vartheta_1(u)}{\vartheta_0\,\vartheta_2};$$

für die zugehörige *Tangente* wird dann:

(2) $$\begin{aligned} p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 &= \vartheta_2{}^3\vartheta_1(u)\,\vartheta_2(u) : -\,\vartheta_3{}^3\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u) \\ &: \vartheta_0{}^3\vartheta_1(u)\,\vartheta_0(u) : \vartheta_2\vartheta_3{}^2\vartheta_0(u)\,\vartheta_3(u) : \vartheta_3{}^2\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u) \\ &: \vartheta_3{}^2\vartheta_0\vartheta_2(u)\,\vartheta_3(u) \end{aligned}$$

und für die *Schmiegungsebene:*

(3) $$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \vartheta_2\,\vartheta_2{}^3(u) : -\vartheta_3\,\vartheta_3{}^3(u) : \vartheta_0\,\vartheta_0{}^3(u) : -\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_1{}^3(u)}{\vartheta_3}.$$

(G. Loria, *Rom. Acc. L. Rend.* (4) **6**[2] (1890), 179.) An Stelle der Darstellung (1) hat man auch in Weierstraßschen Funktionen:

(4) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \sigma_1(u) : \sigma_2(u) : \sigma_3(u) : \sigma(u)$$

oder:

(5) $$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = p''(u) : p'(u) : p(u) : 1.$$

(W. Killing, *Dissert.* Berlin 1872, 11; G. H. Halphen, *Traité des fonctions ellipt.* **2** (1888) 450; F. Klein. *Leipz. Abh.* 1885, 360; Harnack, *Math. Ann.* **12** (1877), 51.)

Der Modul der elliptischen Fnnktionen in (1) ist das *Doppelverhältnis der vier durch eine Sehne gehenden Tangentialebenen* der Kurve, welches von der Auswahl der Sehne unabhängig ist.

Der Vorteil der Darstellung durch elliptische Funktionen besteht besonders darin, daß nach dem *Abelschen Theorem*, bei geeigneter Wahl des den Parameter $u = 0$ erhaltenden Punktes der Kurve, für die vier Schnittpunkte der Kurve mit einer Ebene oder für die acht Schnittpunkte mit einer Fläche 2. Ordnung die *Summe der Parameterwerte* u in bezug auf die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ der elliptischen Funktionen *kongruent* 0 ist.

Die *Kurven der 2. und 3. Art* sind dagegen *rationale* Kurven, so daß die homogenen Koordinaten ihrer Punkte ganzen Funktionen eines Parameters proportional sind, s. W. Killing, *Dissert.* Berlin 1872, 30, 36.

Eine Raumkurve 4. Ordnung ist durch *acht* Punkte von allgemeiner Lage bestimmt. Über ihre Konstruktion s. v. Staudt,

Beitr. (1860), 379; Reye, *Ztschr. f. Math.* **13** (1868), 528; Sturm, *Math. Ann.* **1** (1869), 533; Schröter, *Raumkurven 4. Ordnung*, 5; Reye, *G. d. L.* **3** (1910), 40.

§ 8. Raumkurven vierter Ordnung und gerade Linie.

Je nachdem eine Gerade mit der Kurve *einen, zwei getrennte* oder *zwei zusammenfallende Punkte* gemein hat, heißt sie eine *Transversale*, eine *Sehne* oder eine *Tangente*. Mehr als zwei Punkte kann sie nicht mit der Kurve gemein haben (vgl. später § 14).

Die *Sehnenkongruenz* der Raumkurve 4. Ordnung besteht aus den *Erzeugenden* aller Flächen 2. Ordnung des Büschels, deren Grundkurve die Kurve ist. Sie ist von der 2. Ordnung und 6. Klasse. Alle Sehnen, welche eine feste Sehne schneiden, bilden eine Regelschar einer Fläche des Büschels; alle Sehnen, welche das Polartetraeder des Büschels unter konstantem Doppelverhältnis schneiden, eine Linienfläche 8. Ordnung und 8. Klasse (Quadricuspidale); alle Sehnen, welche zwei Gegenkanten des Polartetraeders schneiden, eine Linienfläche 4. Ordnung; s. Laguerre, *J. de math.* (2) **15** (1870), 197; Killing, *Dissert.* Berlin 1872, 13; Sturm, *Liniengeom.* **2**, 317.

Unter den Erzeugenden jeder Fläche des Büschels befinden sich *acht Tangenten* der Raumkurve (für die zweite Art nur vier, für die dritte nur zwei). Die acht Berührungspunkte bilden *acht assoziierte Punkte* (Kap. XXVIII, § 7); s. Reye, *Ann. di mat.* (2) **2** (1868), 133. Auf einem der vier *Kegel* des Büschels liegen *vier* Tangenten der Raumkurve. Alle *Tangenten* bilden eine *Linienfläche von der Ordnung* $r = 8$ (bei der 2. und 3. Art bezüglich $r = 6$ und $r = 5$). Sie gehören einem tetraedralen Komplex an (s. Reye, *G. d. L.* **3** (1910), S. 33).

Die *Transversalen* der Raumkurve bilden einen *Komplex 4. Grades*, dessen Gleichung in Achsenkoordinaten Kap. XXVIII, § 2, (11) angegeben wurde. Der Komplexkegel ist für einen Punkt außerhalb der Kurve ein *Kegel 4. Ordnung* mit zwei Doppelerzeugenden, für einen Punkt der Kurve selbst ein allgemeiner *Kegel 3. Ordnung* (s. Milinowski, *J. f. Math.* **97** (1884), 277) für einen Hauptpunkt des Büschels ein doppelt zählender *Kegel 2. Ordnung.*

§ 9. Raumkurve vierter Ordnung und Ebene.

Je nachdem von den vier Punkten, die eine *Ebene* mit der Kurve gemein hat, *zwei* oder *zweimal zwei* oder *drei* oder *alle vier*

zusammenfallen, ist die Ebene eine *Tangentialebene* oder eine *Doppeltangentialebene* oder eine *Schmiegungsebene* oder eine stationäre Schmiegungsebeue (*Wendeberührungsebene*).

Die *Doppeltangentialebenen* der Kurve sind die Tangentialebenen der vier Kegel des Büschels Durch einen Punkt des Raumes gehen *acht*, durch eine Tangente der Kurve *vier* Doppeltangentialebenen (s. Sturm, *Liniengeom.* **2**, 318).

Durch einen Punkt des Raumes gehen zwölf *Schmiegungsebenen*, durch einen Punkt der Kurve selbst sechs (bei der 2. und 3. Art sind diese Zahlen 6, 3 und 4, 1). Die Koordinaten u_i einer Schmiegungsebene genügen den Gleichungen Kap. XXVIII, § 2, (4).

Die Schmiegungsebenen *in den vier Schnittpunkten einer Ebene* mit der Kurve schneiden die Kurve zum andernmal in vier Punkten, *die in einer Ebene liegen* (s. Reye, *Ann. di mat.* (2) **2** (1868), 129).

Die 16 *Wendeberührungspunkte* der Kurve, die Berührungspunkte der stationären Schmiegungsebenen, sind die Schnittpunkte der Kurve mit den vier Hauptebenen des Flächenbüschels.

Jede Ebene, die durch drei Wendeberührungspunkte geht, geht auch noch durch einen vierten, der übrigens mit einem der drei ersteren zusammenfallen kann. Man erhält so 116 Ebenen. Es gibt ferner 745 Tetraeder, deren vier Seitenflächen alle 16 Wendeberührungspunkte enthalten. Die bezüglichen Konfigurationen ergeben sich in übersichtlicher Weise aus der Darstellung durch elliptische Funktionen. E. Lange, *Ztschr. f. Math.* **28** (1883), 1; Ameseder, *Wien. Ber.* **87** (1883), 1207; s. auch H. Schröter, *Raumkurven 4. Ordnung,* Leipzig (1890), 85.

§ 10. Raumkurve vierter Ordnung und Fläche zweiter Ordnung.

Eine Raumkurve 4. Ordnung wird von einer Fläche 2. Ordnung in *acht assoziierten Punkten* geschnitten. Zwei *auf einer Fläche 2. Ordnung* gelegene Raumkurven 4. Ordnung schneiden sich in 8 Punkten, durch welche ∞^1 solche Kurven hindurchgehen, die ein *Büschel* bilden. Eine Erzeugende der Fläche wird von den Kurven des Büschels in einer Involution geschnitten deren Doppelpunkte die Berührungspunkte derjenigen zwei Kurven des Büschels sind, welche die Erzeugende berühren. In dem Büschel gibt es 12 Kurven 4. Ordnung mit Doppelpunkt.

Chasles, *C. R.* **54** (1862), 422; Th. Reye, *Ann. di mat.* (2) **2** (1868), 129; R. Sturm, *Math. Ann.* **1** (1869), 553; Laguerre, *J. de math.* (2) **15** (1870), 203.

Sind in der Darstellung der Raumkurve durch elliptische Funktionen u und v die Parameter der Endpunkte einer Sehne, so ist für solche Sehnen, die die beiden Regelscharen einer Fläche des Büschels bilden, dessen Grundkurve die Raumkurve ist, $u + v \equiv 2c$ und $u + v \equiv -2c$ (mod $2\omega_1$, $2\omega_2$). Wenn nun der Raumkurve *ein* $2n$*-Eck einbeschrieben* werden kann, dessen Seiten abwechselnd der einen und der andern der beiden Regelscharen angehören, so können ihr ∞^1 solche $2n$-Ecke einbeschrieben werden, und es muß die Konstante c der Bedingung $4nc \equiv 0$ genügen. Über solche „Schließungssätze" s. F. August, *Arch. Math. Phys.* **59** (1876), 1; F. Schur, *Math. Ann.* **20** (1882), 264; V. Eberhardt, *Ztschr. f. Math.* **32** (1887), 65.

Es gibt sechs Flächen in dem Flächenbüschel, auf denen unendlich viele der Raumkurve *einbeschriebene Vierseite* liegen. Laguerre, *J. f. Math.* (2) **15** (1870), 193; A. Voss, *Math. Ann.* **10** (1876), 177; G. Westphal, *Math. Ann.* **13** (1878), 16; H. Schröter, *Kurven 4. Ordnung*, 69.

Die Raumkurve 4. Ordnung und mit ihr der zugehörige Büschel von Flächen 2. Ordnung geht *durch 32 Kollineationen in sich über*. Sie entsprechen in der Parameterdarstellung dem Übergang von u in $\pm u + c$, wo $4c \equiv 0$. Unter ihnen befinden sich vier involutorische Zentralkollineationen mit Bezug auf je einen Hauptpunkt und die gegenüberliegende Hauptebene, sowie drei geschart involutorische Kollineationen mit Bezug auf je zwei Gegenkanten des Haupttetraeders. A. Harnack, *Math. Ann.* **12** (1877), 81; F. Schur, *Math. Ann.* **20** (1882), 262. Die Transformation einer Geraden in eine Raumkurve 4. Ordnung durch quadratische Transformation behandelt H. Timerding, *Ann. di Mat.* (3) **1** (1898), 95.

Bei der *Abbildung* einer durch eine Raumkurve 4. Ordnung gehenden Fläche 2. Ordnung auf die Ebene *durch stereographische Projektion* geht die Kurve in eine ebene Kurve 4. Ordnung mit zwei Doppelpunkten über (s. Clebsch-Lindemann, *Vorles. Raum* 421).

§ 11. Punktgruppen auf der Raumkurve vierter Ordnung.

Die Berührungspunkte der vier durch eine Sehne gehenden Tangentialebenen bilden ein *Punktquadrupel*. Ein beliebiger Punkt der Kurve bestimmt ein solches Quadrupel. Die Parameter der vier Punkte eines Quadrupels sind von der Form: u, $u + \omega_1$, $u + \omega_2$, $u + \omega_1 + \omega_2$. Die Raumkurve berührt auf einer be-

liebigen durch sie gehenden Fläche 2. Ordnung je vier Erzeugende jeder Regelschar. Die zweimal vier Berührungspunkte bilden *zwei zusammengehörige Quadrupel.* Zwei zusammengehörige Quadrupel bilden acht assoziierte Punkte. Die durch sie bestimmten *beiden Tetraeder* befinden sich in *desmischer Lage.* Schröter, *Raumkurven 4. Ordnung,* 48; Harnack, *Math. Ann.* **12** (1877), 67.

Drei Punkte der Raumkurve 4. Ordnung bilden ein *Tripel,* wenn ihre Schmiegungsebene sich in demselben vierten Punkte der Kurve schneiden, in welchem die Ebene der drei Punkte die Kurve schneidet. Schröter, *Raumkurven 4. Ordnung,* 18; G. Loria, *Rom. Acc. L. Rend.* (4), **6**², 183.

Es gibt endlich *24 Punktepaare* auf der Raumkurve 4. Ordnung der Art, daß die Schmiegungsebene jedes der beiden Punkte eines Paares durch den andern geht. Schröter, *Raumkurven 4. Ordnung,* 81.

§ 12. Gestaltsverhältnisse und Unterarten.

Die Raumkurve 4. Ordnung hat ihren Realitätsverhältnissen nach vier Formen, die durch folgende Unterschiede gekennzeichnet sind: I. vier reelle Hauptpunkte, vier reelle Kegel, zwei paare Züge; II. vier reelle Hauptpunkte, zwei reelle Kegel, keine reellen Züge; III. zwei reelle Hauptpunkte, zwei reelle Kegel, ein paarer Zug; IV. kein reeller Hauptpunkt, kein reeller Kegel, zwei unpaare Züge.

Sturm, *Flächen 3. Ordnung* (1867), 264; 304; Cremona, *J. f. Math.* **68** (1868), 124; Painvin, *Nouv. Ann.* (2) **7** (1868), 481; 529; **8** (1869), 49. *Fadenmodelle* der Raumkurven 4. Ordnung sind von H. Wiener (1889) angefertigt (Dyck, *Katalog* 269).

Die Schnittlinien einer Fläche 2. Ordnung mit einer Kugel heißen *zyklische Kurven* (Lamé, *Examen* (1818), 36; Darboux, *Nouv. Ann.* (2) **3** (1864), 199; *Classe remarquable* 399; Chasles, *J. de math.* (1) **3** (1838), 434; Laguerre, *Soc. phil.* **4** (1867), 51; **5** (1868), 40). Zu ihnen gehören die *sphärischen Kegelschnitte* und das *Vivianische Fenster* (Darboux, *Classe remarquable* 27).

Eine besondere Form der Raumkurve 4. Ordnung hat Schröter (*J. f. Math.* **93** (1882), 132) behandelt: Legt man durch jedes der drei Paar Gegenseiten eines Tetraeders ein orthogonales Hyperboloid, so schneiden sich diese drei Hyperboloide zu zweien in einer Raumkurve 4. Ordnung, die von jeder zu einer Tetraederkante senkrechten Ebene in vier Punkten eines Kreises geschnitten wird.

C. Die Raumkurven vierter Ordnung zweiter Spezies.

§ 13. Begriff und Darstellung.

Eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Spezies ist ein Teil des *Durchschnittes einer Fläche 2. Ordnung und einer Fläche 3. Ordnung*, welche zwei windschiefe Gerade gemein haben. *Es geht keine andere Fläche 2. Ordnung durch die Kurve.*

Diese Raumkurven zerfallen in *drei Arten*, je nachdem sie entweder *keine* oder *eine* oder *zwei stationäre Tangenten* haben. Die *charakteristischen Zahlen* § 7 sind für die drei Arten neben $m = 4$:

	r	n	α	β	x	y	g	h
1. Art:	6	6	4	0	6	4	6	3
2. Art:	6	5	2	0	5	4	4	3
3. Art:	6	4	0	0	4	4	3	3

Diese Raumkurven sind sämtlich vom *Geschlecht* 0. Die homogenen Koordinaten ihrer Punkte sind proportional *ganzen Funktionen 4. Grades eines Parameters.*

Durch acht beliebige Punkte des Raumes lassen sich vier Kurven 4. Ordnung 2. Spezies legen. Eingehende Behandlung finden die Raumkurven 4. Ordnung 2. Spezies bei L. Cremona, *Ann. di mat.* (1) **4** (1861), 73; E. Weyr, *Math. Ann.* **4** (1871 243; *Wien. Ber.* **63** (1871) 493; **73** (1876), 203; **75** (1877 458; **81** (1880), 1218; E. Bertini, *Lomb. Ist.* (2) **5** (1872 622; A. Armenante, *Giorn. di mat.* **11** (1873), 221; **12** (1874 250; A. Adler, *Wien. Ber.* **86** (1882), 919; St. Jolles, *Theorie der Oskulanten,* Aachen 1886; E. Study, *Leipz. Ber.* 1886, 3; W. Stahl, *J. f. Math.* **101** (1887), 73; **104** (1888), 38; L. Berzolari, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **23** (1890), 96; K. Rohn, *Leipz. Ber.* 1890, 208; 1891, 1.

§ 14. Raumkurve vierter Ordnung zweiter Spezies und gerade Linie.

Außer Transversalen, Sehnen (zweifachen Sekanten) und Tangenten, welche ein, zwei getrennte und zwei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein haben (§ 8), hat die Kurve 4. Ordnung 2. Spezies ein einfach unendliches System von *dreifachen Sekanten*, die drei Punkte mit ihr gemein haben. Daraus erklärt sich

auch die Möglichkeit *stationärer Tangenten* bei der 2. und 3 Art in § 13. Durch jeden Punkt der Kurve geht eine dreifache Sekante.

Alle Erzeugenden der einen der beiden Regelscharen auf der durch die Kurve gehenden Fläche 2. Ordnung werden von ihr in *drei*, alle der andern in *einem* Punkte geschnitten; jene sind dreifache Sekanten, diese Transversalen.

Das Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche vier feste Punkte der Kurve mit der laufenden *dreifachen Sekante* verbinden, ist konstant und heißt das *Doppelverhältnis der vier Kurvenpunkte.*

Eine *zweifache Sekante* der Kurve, durch welche sich zwei Schmiegungsebenen von der Beschaffenheit an die Kurve legen lassen, daß die Berührungspunkte die Schnittpunkte der Sekante mit der Kurve sind, heißt nach Bertini eine *Hauptsehne.* Es gibt *drei Hauptsehnen* der Kurve, die sich in demselben Punkte schneiden.

Durch einen Punkt des Raumes gehen drei Sehnen der Kurve $(h = 3)$. Wenn man nun durch diesen Punkt und durch die in den sechs Endpunkten der drei Sehnen an die Kurve gelegten Tangenten Ebenen legt, so berühren diese sechs Ebenen denselben Kegel 2. Orduung.

Eine durch eine *feste Sehne* s_0 gelegte Ebene E schneidet die Kurve noch in zwei Punkten, die wieder eine Sehne s bestimmen. Dreht sich die Ebene E um die feste Sehne s_0, so beschreibt die Sehne s eine windschiefe Regelfläche 3. Ordnung.

Die *Projektion der Kurve auf eine Ebene* von einem beliebigen Punkte aus ist eine Kurve 4. Ordnung und 6. Klasse mit drei Doppelpunkten, vier Doppeltangenten und sechs Inflexionstangenten. Die Projektion aus einem Punkte der Kurve selbst gibt eine Kurve 3. Ordnung und 4. Klasse. Durch die Kurve gehen vier Kegel 3. Ordnung und 3. Klasse.

§ 15. Raumkurve vierter Ordnung zweiter Spezies und Ebene.

Die *Ebenen,* welche die Kurve 4. Ordnung in vier *harmonischen* Punkten schneiden (§ 14, Abs. 3), hüllen eine Steinersche Fläche 4. Ordnung und 3. Klasse ein, welche der abwickelbaren Fläche der Schmiegungsebenen der Kurve einbeschrieben ist.

Die acht Geraden, welche durch einen Punkt des Raumes sich nach den Berührungspunkten der vier durch diesen Punkt gelegten *Doppeltangentialebenen* ziehen lassen, sind Erzeugende eines Kegels 2. Ordnung.

Die sechs von einem Punkte des Raumes an die Kurve gezogenen *Schmiegungsebenen* sind Tangentialebenen eines Kegels 2. Ordnung. Die Schmiegungsebenen der Kurve berühren eine Fläche 2. Ordnung, deren Tangentialebenen die Kurve in vier eine äquianharmonische Gruppe bildenden Punkten schneiden. Die Fläche 2. Ordnung ist der abwickelbaren Fläche der Schmiegungsebenen einbeschrieben.

Von einem Punkte P der Kurve aus können *drei Schmiegungsebenen* an sie gelegt werden. Ihre drei Berührungspunkte liegen in einer durch den Punkt P gehenden Ebene Π, welche die *harmonische Polarebene* der durch P gehenden *dreifachen Sekante* s in bezug auf das Dreikant p, q, r der drei Schmiegungsebenen ist, d. h. die Ebene, welche die drei Schmiegungsebenen in drei Geraden p', q', r' derart schneidet, daß die Ebenenpaare sp, $sp's$; sq, sq'; sr, sr' in Involution stehen. Bei Veränderung den Punktes P umhüllt die Ebene Π der drei Berührungspunkte einen Kegel 2. Ordnung.

Die Tangenten in den vier *Wendeberührungspunkten* der Kurve, den Berührungspunkten der vier stationären Schmiegungsebenen, haben hyperboloidische Lage.

Die vier Wendeberührungspunkte liegen auf der *Doppelkurve der abwickelbaren Fläche der Schmiegungsebenen* der Raumkurve. Diese Doppelkurve hat ebenfalls vier Wendeberührungspunkte und keine mehrfachen Punkte Sie ist der Schnitt einer Fläche 2. und einer Fläche 3. Ordnung, welche in vier Punkten eine stationäre Berührung haben. Die Raumkurve 4. Ordnung schneidet die Doppelkurve der abwickelbaren Fläche in acht Punkten, den Wendeberührungspunkten beider Kurven.

§ 16. Raumkurve vierter Ordnung zweiter Spezies und Fläche zweiter Ordnung.

Die Raumkurve 4. Ordnung liegt auf einer *einzigen* Fläche 2. Ordnung. Die Fläche 3. Ordnung, welche sie aus der Fläche 2. Ordnung ausschneidet, kann mit dieser außerdem entweder *zwei windschiefe* Gerade oder eine für die Fläche 3. Ordnung *doppelt zählende Gerade* gemein haben. Die Fläche 3. Ordnung kann auch eine windschiefe kubische *Regelfläche* sein.

Auf eine Fläche 2. Ordnung kann man *zwei Systeme* von Raumkurven 4. Ordnung 2. Spezies aufzeichnen; die Kurven des einen Systems treffen die Erzeugenden der ersten Schar in *einem* Punkte und die der zweiten Schar in *drei*, die Kurven des andern

Systems treffen umgekehrt die Erzeugenden der ersten Schar in *drei* Punkten und die der zweiten Schar in *einem Punkt.*

Zwei Kurven derselben Fläche 2. Ordnung, welche derart *verschiedenen* Systemen angehören, schneiden sich in *zehn* Punkten, zwei Kurven *desselben* Systems in *sechs.*

Eine Kurve 4. Ordnung 1. Spezies und eine Kurve 2. Ordnung 2. Spezies, die auf derselben Fläche 2. Ordnung liegen, treffen sich in *acht* Punkten.

Eine Raumkurve 3. Ordnung und eine solche 4. Ordnung 2. Spezies, die auf derselben Fläche 2. Ordnung liegen, und von welchen jede die Erzeugenden derselben Schar in *einem* Punkte trifft, schneiden sich in *fünf* Punkten. Wenn dagegen die Kurve 3. Ordnung die Erzeugenden der einen Schar in *zwei* Punkten und die Kurve 4. Ordnung die Erzeugenden der anderen Schar in *einem* Punkte trifft, so haben beide *sieben* Schnittpunkte.

Kapitel XXX.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.
(Grundlagen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Die nachstehend verzeichneten Werke werden in den folgenden Kapiteln abgekürzt zitiert:

1. Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes,* II. Teil, 3. Auflage, Leipzig 1880 (zitiert als Salmon-Fiedler).

2. Cremona, *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologna Mem.* (2) **6**, 91 (1866); **7**, 29 (1867).

3. Cremona, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre, J. für Math.* **68**, 1 (1868).

Die Arbeiten 2. und 3. sind, durch Zusätze des Verfassers vermehrt, deutsch herausgegeben worden von M. Curtze, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung,* Berlin 1870 (zitiert als Cremona, *Grundzüge*).

4. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie,* Leipzig 1879 (zitiert als Schubert, *Kalkül*).

§ 1. Algebraische Flächen und ihre reelle Darstellung.

Eine algebraische Fläche F_n von der Ordnung n ist der Ort der reellen und imaginären Punkte, deren homogene projektive Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 einer Gleichung $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ genügen, wobei f eine quaternäre Form von der Ordnung n mit konstanten, reellen oder komplexen Koeffizienten bedeutet.

Wenn die Gleichung auf ein reelles Grundtetraeder bezogen ist, heißt die Fläche *reell* oder *imaginär*, je nachdem die Koeffizienten von f alle reell sind oder nicht.

Eine Fläche F_n heißt *irreduzibel* oder *reduzibel* (einfach oder zerfallend), je nachdem f derart beschaffen ist. Algebraische (invariante) Kriterien für das Zerfallen von F_n in Ebenen finden sich bei Junker, *Math. Ann.* **45**, 1 (1894); Hadamard, *Bull. Soc. Math.* **27**, 34 (1899); Hočevar, *Wien. Sitzungsb.* **113**, 407 (1904), *Verh. des dritten intern. Math.-Kongresses in Heidelberg*, Leipzig 1905, S. 151;

für eine Form von beliebig vielen Veränderlichen bei Kürschák, *Arch. Math. Phys.* (3) **13**, 153 (1908). Für die Bestimmung der quadratischen Teiler einer Form vgl. Hočevar, *Wien. Sitzungsb.* **116**, 153 (1907); für die Bestimmung der linearen, quadratischen und höheren Teiler Dorner, *Monatsh. f. Math.* **20**, 242 (1909); Glenn, *Amer. J.* **32**, 75 (1910); die Bedingungen dafür, daß eine Form einen linearen, mehrfachen Faktor hat, gab Glenn, *Bull. Amer. M. S.* (2) **17**, 449 (1911). Über Flächen, die in Ebenen zerfallen (und ebene Kurven, die in Gerade zerfallen) vgl. noch Glenn, *Amer. J.* **34**, 449 (1912).

Die Ordnung n von F_n hängt nicht von der Wahl des Grundtetraeders ab und ist deshalb ein projektiver Charakter der Fläche: sie bezeichnet die Anzahl der Punkte, in denen die Fläche von jeder Geraden, die sie nicht enthält, getroffen wird, und auch die Ordnung der algebraischen Kurve, in welcher sie von jeder Ebene, die von ihr nicht einen Teil bildet, geschnitten wird.

Man kann auf verschiedene Arten ein reelles Bild von F_n finden. Indem man z. B.

$$x = \frac{x_1}{x_4},\; y = \frac{x_2}{x_4},\; z = \frac{x_3}{x_4} \text{ setzt, wird } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ von einer gewissen Ordnung $m \leqq n$ in z und definiert z als eine m-wertige algebraische Funktion der zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. Stellen wir x und y in der Gaußschen Weise durch die Punkte zweier Ebenen (oder zweier Kugeln) dar, so entsprechen jedem Paar von Punkten dieser Ebenen m Punkte der Fläche. Dies führt dazu, die Fläche als eine ∞^4-Mannigfaltigkeit aufzufassen, indem eine kontinuierliche Korrespondenz von den Indices 1 und m zwischen den Wertegruppen von vier reellen Zahlen und den Punkten der Fläche besteht.

Man kann die Darstellung auch erlangen, indem man in dem gewöhnlichen Raume bleibt, da es ja genügt, x und y auf zwei verschiedenen Gaußschen Ebenen darzustellen und die Geraden zu betrachten, welche die Punkte der einen mit den Punkten der anderen verbinden. Man erhält auf diese Weise eine kontinuierliche Korrespondenz von den Indizes 1 und m zwischen den Geraden des Raumes und den Punkten der Fläche. Singuläre Elemente der Darstellung sind einerseits die Geraden der beiden Ebenen, von denen jede nicht das Bild von m Punkten, sondern von unendlich vielen Punkten der Fläche ist, und andererseits die Punkte der Fläche, für welche x und y zum Bilde einen und denselben Punkt

der Schnittlinie der beiden Gaußschen Ebenen haben; jeder solche Punkt hat zum Bilde nicht eine, sondern unendlich viele Geraden. Über diese und andere Darstellungen vgl. Segre, *Math. Ann.* **40**, 413 (1892).

Das Studium einer reellen geschlossenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, durch welche die reellen und imaginären Punkte einer F_n dargestellt werden können, und ihrer ein-, zwei- und dreidimensionalen Zykeln im Sinne der Analysis situs spielt eine wichtige Rolle in vielen Fragen der Geometrie auf einer algebraischen Fläche; man verdankt es hauptsächlich Picard, *J. de Math.* (4) **5**, 135 (1889); Picard und Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indépendantes I,* Paris 1897, p. 19, 83; Poincaré, *C. R.* **133**, 969 (1901), *J. de Math.* (5) **8**, 169 (1902), (6) **2**, 135 (1906).

§ 2. Tangentialebene in einem einfachen Punkte. Konjugierte Tangenten.

Die Anzahl der wesentlichen Koeffizienten, die in $f = 0$ enthalten sind, beträgt $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = \frac{n(n^2+6n+11)}{6}$ und wird nach Cremona (*Grundzüge,* S. 19 Anm.) mit $N(n)$ bezeichnet. Durch $N(n)$ gegebene Punkte kann man deshalb immer mindestens eine Fläche von der Ordnung n legen, die im übrigen einfach oder reduzibel ausfallen kann. Durch eine Überlegung, die dem in Band II[1], S. 273 angegebenen Verfahren analog ist, findet man dann, daß man im Raume immer $N(n)$ Punkte in solcher Lage geben kann, daß durch sie nur eine einzige F_n hindurchgeht.

In nicht homogenen Koordinaten x, y, z sei

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = 0$$

die Gleichung von F_n, wo f_i eine ternäre Form der Ordnung i in x, y, z bezeichnet. Wenn $f_0 = 0$ ist, während f_1 nicht identisch verschwindet, ist der Ursprung O ein *einfacher* Punkt der Fläche und $f_1 = 0$ die Gleichung der *Tangentialebene* in O. Diese Ebene ist durch die Eigenschaft charakterisiert, daß alle Geraden, die man in ihr durch O zieht, und nur diese F_n in O berühren oder mit F_n wenigstens ein zweipunktige Begegnung haben: Dupin, *Développements de Géométrie,* Paris 1813, p. 59.

Die Tangentialebene in O schneidet F_n längs einer Kurve von der Ordnung n, die in O wenigstens einen Doppelpunkt hat; um-

gekehrt, wenn der Schnitt von F_n mit einer Ebene in einem einfachen Punkte O von F_n wenigstens einen Doppelpunkt hat, so berührt die Ebene die Fläche in O. Vgl. Plücker, *J. f. Math.* **4**, 359 (1829), *Abhdlgn. I*, S. 113.

Wenigstens zwei der durch O in der Tangentialebene gezogenen Geraden haben in O mit F_n eine mehr als zweipunktige Berührung; sie sind die Erzeugenden des Kegels 2. Ordnung $f_2 = 0$, die in der Ebene $f_1 = 0$ liegen. Sie sind die in O berührenden Tangenten des Schnittes der Fläche mit der Tangentialebene und heißen die *Haupttangenten* von F_n in O. Wenn diese beiden Tangenten zusammenfallen, so heißt der Punkt ein *parabolischer Punkt* der Fläche. Der noch speziellere Fall, in welchem der Schnitt von F_n mit der Tangentialebene in O einen Selbstberührungspunkt hat, ist von Korteweg, *Wien. Sitzungsb.* **98**, 1154 (1889) behandelt und als *Faltenpunkt* bezeichnet worden.

Die Geraden, die in O mit F_n eine mehr als zweipunktige Berührung haben, sind mehr als zwei an der Zahl nur dann, wenn f_1 ein Faktor von f_2 wird, so daß der Kegel $f_2 = 0$ in die Tangentialebene und eine andere Ebene zerfällt. In diesem Falle haben alle Tangenten in O eine wenigstens dreipunktige Berührung, und wenigstens drei von ihnen, welche den Schnitt der Ebene $f_1 = 0$ mit dem kubischen Kegel $f_3 = 0$ bilden, haben in O wenigstens eine vierpunktige Berührung; sie sind die Tangenten in O an die Kurve, in der F_n von der Tangentialebene in O geschnitten wird, welche Kurve im vorliegenden Falle in O einen dreifachen Punkt hat. In diesem Falle sagt man nach Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 501 (1876), daß die Ebene $f_1 = 0$ F_n in O *oskuliert* und der Punkt O heißt ihr *Oskulationspunkt.* Nehmen wir $z = 0$ als Gleichung der Oskulationsebene in O, so hat die Gleichung von F_n die Form $z + \varphi = 0$, wobei alle Glieder von φ in x, y, z von einer höheren als der zweiten Ordnung sind.

Wenn die Geraden, die in O eine vierpunktige Berührung haben, mehr als drei an der Zahl sind, zerfällt der Kegel $f_3 = 0$ in die Tangentialebene und einen quadratischen Kegel, und es gibt unendlich viele solche Geraden. Alle Tangenten in O haben mit F_n eine wenigstens vierpunktige Berührung, und wenigstens vier von ihnen haben eine wenigstens fünfpunktige Berührung usw.

Ist O ein einfacher, nicht parabolischer Punkt von F_n, so heißen *konjugiert* zwei Tangenten in O, die durch die Haupttangenten t_1, t_2 von O harmonisch getrennt werden. Die Paare von konjugierten Tangenten in O bilden daher eine Involution, von welcher t_1, t_2 die Doppelstrahlen sind.

Betrachten wir auf F_n die Umgebung 1. Ordnung von O, so gilt die Eigenschaft, daß *von zwei konjugierten Tangenten a und a' jede der Schnitt der Tangentialebene in O mit der Tangentialebene von F_n in dem Punkte ist, der O auf der anderen Tangente unendlich benachbart ist.* Mit anderen Worten, wenn man auf F_n eine Kurve γ zieht, die durch O hindurchgeht und dort a berührt, und die abwickelbare Fläche betrachtet, die von den Tangentialebenen der Fläche F_n in den Punkten von γ gebildet wird, so ist die Erzeugende dieser abwickelbaren Fläche, die durch O hindurchgeht, a'.

Ist O parabolisch, so artet die betrachtete Involution aus, und die einzige dann existierende Haupttangente t ist jeder anderen in O berührenden Tangente konjugiert. Es besteht in diesem Falle noch die Eigenschaft, daß die Tangentialebene von F_n in einem Punkte, der O in einer von t verschiedenen Richtung unendlich benachbart ist, die Tangentialebene von O in der Geraden t schneidet, und es fällt die Tangentialebene von F_n in dem auf O folgenden Punkte von t mit der Tangentialebene von F_n in O zusammen. Deshalb pflegt man zu sagen, daß die Tangentialebene von F_n in einem parabolischen Punkte eine *stationäre Ebene* ist.

Die Theorie der konjugierten Tangenten, die auch für nicht algebraische Flächen gilt, verdankt man Dupin, *Développements de Géométrie,* Paris 1813, p. 41 und 90. Das auf die parabolischen Punkte bezügliche Theorem stammt von Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **3**, 44 (1848).

Eine Ergänzung zu der Theorie der konjugierten Tangenten hat Segre, *Rom Acc. L. Rend.* (5) **17**², 405 (1908) geliefert, indem er auf einer Fläche auch die Umgebungen 2., 3. usw. Ordnung eines Punktes betrachtete. Dies steht in Beziehung mit den Eigenschaften der Kegelschnitte, die in einem gegebenen Punkte eine gegebene Berührung mit einer gegebenen Fläche haben, vgl. Transon, *J. de Math.* (1) **6**, 191 (1841), *Nouv. Ann.* (2) **9**, 193 (1870); Moutard in Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie II,* Paris 1864, p. 364; *C. R.* **91**, 1055 (1880); Spottiswoode, *C. R.* **70**, 651, 955 (1870), *Phil. Trans.* **160**, 289 (1870); Clifford, *Phil. Trans.* **164**, 705 (1873), *Papers,* London 1882, S. 287; Darboux, *C. R.* **91**, 969 (1880); *Bull. Sc. M.* (2) **4**¹, 348 (1880); Wilczynski, *Trans. Am. M. S.* **10**, 279 (1909).

§ 3. Berührung zweier Flächen.

Die Eigenschaften des vorhergehenden Paragraphen lassen sich verallgemeinern, indem man zwei Flächen F und F' betrachtet, die

einen für beide einfachen Punkt O gemein haben. Man sagt dann, daß F und F' *sich in O berühren*, wenn sie dort dieselbe Tangentialebene haben. Die *Berührungsinvariante* zweier Flächen von den Ordnungen n und n', d. h. die simultane Invariante der linken Seiten ihrer Gleichungen, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, daß die beiden Flächen sich berühren, ist vom Grade

$$n'[(n'-1)^2 + 2(n-1)(n'-1) + 3(n-1)^2]$$

in den Koeffizienten der ersten Gleichung, vgl. Salmon, *Quart. J.* **1**, 339 (1857); Moutard, *Nouv. Ann.* (1) **19**, 58 (1860); de Jonquières, *J. de Math.* (2) **7**, 410 (1862); Bischoff, *J. f. Math.* **61**, 369 (1863); Schubert, *J. f. Math.* **71**, 369 (1870); S. Roberts, *Quart. J.* **12**, 229 (1873).

Damit zwei Flächen F, F' sich in O berühren, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Schnittkurve γ in O einen Doppelpunkt hat. Die Berührung heißt *stationär*, wenn γ in O eine Spitze hat.

Allgemeiner sagt man, daß F und F' in O eine *Berührung von der Ordnung* r haben, wenn ihre Schnitte mit einer allgemeinen Ebene durch O in O eine $(r+1)$-fache Berührung haben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dies eintritt, ist, daß die Schnittkurve γ von F und F' in O einen $(r+1)$-fachen Punkt hat. Die $r+1$ Tangenten von γ in O sind die Achsen von ebensoviel Ebenenbüscheln, deren Ebenen jedesmal die beiden Flächen in zwei Kurven schneiden, die in O eine $(r+2)$-punktige Berührung haben.

Die Berührung zweier Flächen ist ausführlich behandelt worden von Dupin, *Développements de Géométrie*, Paris 1813, und darauf von Plücker, *J. f. Math.* **4**, 349 (1829), *Abhdlgn. I*, S. 103 (einige Ungenauigkeiten sind von dem Herausgeber Schoenflies, S. 598 f. richtiggestellt worden) und Th. Olivier, *J. éc. pol.* **25**, 123, 230 (1837), *J. de Math.* (1) **6**, 297 (1841), der auch eine Verallgemeinerung von der Theorie der Indicatrix geliefert hat. Vgl. auch Cremona, *Grundzüge,* S. 20; ferner Mannheim, *C. R.* **74**, 856, 928 (1872); *Principes et Développements de Géométrie cinématique,* Paris 1894, p. 331; Waelsch, *Wien. Sitzgsber.* **100**, 207 (1891).

Die Aufgabe, diejenigen Flächen F_n von gegebener Ordnung n zu bestimmen, die in einem gegebenen Punkte O mit einer gegebenenFläche S, die algebraisch sein kann oder nicht, eine Berührung von der höchst möglichen Ordnung haben, ist behandelt worden von Olivier, a. a. O., Hermite, *Cours d'analyse de*

l'école polyt., *1. partie*, Paris 1873, p. 139, *Œuvres III*, Paris 1912, p. 484, und von Halphen, *Bull. Soc. M.* **3**, 28 (1874). Ist r die Ordnung dieser Berührung, so werden $F_n \frac{(r+1)(r+2)}{2}$ Bedingungen auferlegt. Damit die Ordnung der Berührung sich auf $r+1$ erhöhen kann, müssen die Koordinaten von O gewisse Bedingungen erfüllen, die nichts anderes sind wie die partiellen Differentialgleichungen der niedrigsten Ordnung, die keine willkürliche Konstante enthalten und denen die Flächen der gegebenen Ordnung n genügen. Im Falle $n = 2$, der von Hermite behandelt worden ist, ergibt sich, daß die Flächen zwei partiellen Differentialgleichungen 3. Ordnung genügen, die wir erhalten, wenn wir die Bedingungen dafür hinschreiben, daß die ganze Funktion dritten Grades von α

$$\alpha^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\alpha^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\alpha \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

durch die Funktion zweiten Grades

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

teilbar ist.

Es könnte scheinen, daß sich über den Punkt O derart verfügen läßt, daß $r = 3$ wird für alle Punkte einer Kurve von S, es ist aber die Anzahl dieser Punkte von S eine endliche, und in jedem von ihnen existiert ein Büschel von Flächen 2. Ordnung, die mit S eine Berührung 3. Ordnung haben.

Halphen hat hinzugefügt, daß eine analoge Ausnahme für $n = 3, 4, 5$ eintritt, aber nicht für $n > 5$. Für $n = 2$ hat er außerdem bemerkt, daß die betrachteten Punkte nicht anderes sind wie die Doppelpunkte der Kurve, auf der die Berührungspunkte von S mit den sie vierpunktig berührenden Tangenten liegen.

Über diesen Gegenstand vgl. auch Spottiswoode, *Phil. Trans.* **162**, 259 (1872), **166**, 227 (1876), *C. R.* **79**, 24, 105 (1874), *Lond. M. S. Proc.* **5**, 70 (1874), *Quart. J.* **14**, 227 (1876); Clifford, *Phil. Trans.* **164**, 713 (1874); *Papers*, S. 298; Pepin, *J. de Math.* (3) **7**, 71 (1881), und für $n = 2$ auch Maschke, *Amer. Math. Soc. Trans.* **3**, 482 (1902); Kommerell, *Arch. Math. Phys.* (3) **15**, 158 (1909). Vgl. auch Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen*, Leipzig 1888, S. 86.

Zwei Flächen können sich auch in allen Punkten einer Kurve berühren. Nach Dupin, *Développements de Géométrie*, Paris 1813,

S. 83, 226 schneidet, wenn zwei algebraische oder nicht algebraische Flächen in allen Punkten einer Kurve γ, die für beide eine einfache Kurve ist, eine Berührung von der Ordnung $r-1$ haben, jede Fläche, welche mit γ in einem Punkte A eine Berührung von der Ordnung $s-1$ hat, die gegebenen Flächen in zwei Kurven, die in A eine Berührung von der Ordnung $rs-1$ haben [vgl. Chasles, *J. de Math.* (1) **2**, 299 (1837)]. Halphen, *Bull. Soc. M.* **2**, 94 (1874) hat bewiesen, daß dann in einem Punkt O, der für beide Flächen einfach, ein s-facher Punkt von γ und ein s'-facher Punkt für den Restschnitt der beiden Flächen ist, die Berührung der Flächen von der Ordnung $rs+s'-1$ wird, und umgekehrt.

Der Inhalt dieses und der vorhergehenden Paragraphen steht in Zusammenhang mit der projektiven Differentialgeometrie der algebraischen oder nicht algebraischen Flächen. Vgl. hierüber namentlich Wilczynski, *Amer. Math. Soc. Trans.* **8**, 233 (1907); **9**, 79, 293 (1808); **10**, 176, 279 (1909).

§ 4. Mehrfache Punkte und Linien einer Fläche.

Wir nehmen wieder die Gleichung von F_n in der Form an

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_n = 0;$$

wenn dann $f_0, f_1, \ldots, f_{s-1}$, aber nicht f_s identisch Null wird, so trifft eine allgemeine Gerade durch O die Fläche in n Punkten, von denen nur $n-s$ von O verschieden sind. Dann nennt man O einen s-fachen Punkt von F_n, und die Erzeugenden des Kegels $f_s = 0$ von der Ordnung s heißen die *Tangenten* in O, weil von ihren n Schnittpunkten mit F_n mindestens $s+1$ nach O fallen. Der Kegel $f_s = 0$ heißt der *Tangentialkegel* von F_n in O.

Wenn für die Werte von x, y, z, die den Punkten einer Tangente entsprechen, zugleich mit f_s auch $f_{s+1}, f_{s+2}, \ldots, f_{s+k}$, aber nicht f_{s+k+1} verschwindet, so hat diese Tangente in O mit F_n eine $(s+k+1)$-punktige Berührung. Insbesondere existieren $s(s+1)$ Gerade, die in O mit F_n eine $(s+2)$-punktige Begegnung haben, und dies sind die gemeinsamen Erzeugenden der beiden Kegel $f_s = 0$, $f_{s+1} = 0$; sie heißen die *Haupttangenten* in dem s-fachen Punkt O. Sind sie in größerer Anzahl vorhanden, so gibt es unendlich viele von ihnen, und sie bilden dann die Erzeugenden eines Kegels Γ, der ein gemeinsamer Teil der Kegel $f_s = 0$, $f_{s+1} = 0$ ist. In diesem Falle existieren Tangenten, die in O mit F_n eine wenigstens $(s+3)$-punktige Begegnung haben, dies sind die gemeinsamen Erzeugenden des Kegels Γ und des Kegels $f_{s+2} = 0$ usw.

Insbesondere findet man für $s = 2$ einen Doppelpunkt, der *konisch, biplanar* oder *uniplanar* heißt, je nachdem der Kegel

2. Ordnung, der von den berührenden Geraden gebildet wird, irreduzibel ist oder in zwei getrennte oder zusammenfallende Ebenen zerfällt. Analytische Kriterien für die verschiedenen Arten von Doppelpunkten findet man bei Biermann, *Arch. Math. Phys.* (3) **5**, 245 (1903), **13**, 23 (1908).

Ist der Doppelpunkt konisch, so sind sechs Erzeugenden des Tangentialkegels Haupttangenten, d. h. haben in O mit F_n eine wenigstens dreipunktige Berührung. Die Schnittkurve der Fläche mit einer allgemeinen Ebene durch O hat dort einen Doppelpunkt, die Schnittkurve mit einer Tangentialebene des Kegels dagegen eine gewöhnliche Spitze. Ist O biplanar, so hat jede der Schnittkurven mit den beiden Ebenen, in die der Tangentialkegel zerfällt, in O einen dreifachen Punkt, und die beiden Tripel von Kurventangenten in O sind die sechs Haupttangenten von F_n in O. Eine allgemeine Ebene durch O schneidet die Fläche in einer Kurve, die in O einen Doppelpunkt hat, eine allgemeine Ebene durch die Schnittlinie der beiden Ebenen (die *singuläre Tangente*) dagegen schneidet die Fläche in einer Kurve, die in O eine gewöhnliche Spitze hat. Ist O uniplanar, so schneidet die Ebene, welche doppelt gezählt den Tangentialkegel bildet, die Fläche in einer Kurve, die in O einen dreifachen Punkt hat, und die drei zugehörigen Tangenten sind die einzigen Haupttangenten in O. Der Schnitt mit einer allgemeinen Ebene durch O hat in O eine gewöhnliche Spitze; die Schnitte mit allgemeinen Ebenen durch die drei Haupttangenten haben in O einen Selbstberührungspunkt, aber durch jede dieser drei Tangenten gehen zwei Ebenen hindurch, deren Schnittkurven in O eine Spitze zweiter Art haben. Vgl. Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 495 (1876).

Eine Fläche, die in einem gegebenen Punkt die Multiplizität s haben soll, ist $\frac{s(s+1)(s+2)}{6}$ linearen Bedingungen unterworfen; ist der Punkt nicht gegeben, so erniedrigt sich die Zahl der Bedingungen um drei. Ein gegebener Doppelpunkt legt also der Fläche vier Bedingungen auf, dagegen fünf, wenn er biplanar sein soll, acht, wenn er uniplanar sein soll.

Die vorstehenden Resultate kann man in allgemeinerer Form auch durch die Methode von Joachimsthal, *J. f. Math.* **33**, 371 (1846), gewinnen, indem man die Gleichung $f(\lambda x_i + \mu y_i) = 0$, welche den Schnitt von F_n mit der Verbindungslinie der Punkte x und y liefert, entwickelt. Man findet, daß *ein Punkt y für die Fläche s-fach ist, wenn seine Koordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 alle Derivierten der Form f von der Ordnung $s - 1$, aber nicht die der Ordnung s zum Verschwinden bringen.*

Die Gleichung des Tangentialkegels in y erhält man, indem man in der vorstehenden Entwickelung den Koeffizienten von $\lambda^s \mu^{n-s}$ gleich Null setzt. Insbesondere hat die Tangentialebene in einem einfachen Punkt y die Gleichung

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0.$$

Hat F_n mehrfache Punkte, so wird für diese

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

woraus durch Elimination der y folgt, daß die *Diskriminante* von f verschwindet, deren Grad in den Koeffizienten von f $4(n-1)^3$ ist.

Eine F_n mit einem n-fachen Punkte ist ein Kegel, der diesen Punkt zur Spitze hat.

Eine F_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkte O heißt nach Cayley, *C. R.* **54**, 56 (1862), *Pap. V*, S. 8, ein *Monoid* mit dem *Scheitel* O. In homogenen Koordinaten wird die Gleichung eines Monoids von der Ordnung n mit dem Scheitel $(0, 0, 0, 1)$:

$$x_4 f_{n-1}(x_1, x_2, x_3) + f_n(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

wo f_{n-1}, f_n Formen von den Ordnungen $n-1$, n in x_1, x_2, x_3 bedeuten. Der Tangentialkegel in O ist $f_{n-1} = 0$; dem Monoid gehören die $n(n-1)$ Schnittlinien der beiden Kegel $f_{n-1} = 0$, $f_n = 0$ an. Diese beiden werden bisweilen der erste der *Unterkegel*, der zweite der *Oberkegel* des Monoids genannt.

Ein Monoid kann auch mehrere Scheitel in endlicher oder unendlicher Anzahl haben, im letzteren Falle ist, wenn das Monoid irreduzibel ist, der Ort der Scheitel notwendigerweise eine gerade Linie.

Eine Kurve γ heißt für F_n s-fach, wenn ein allgemeiner Punkt auf ihr für F_n s-fach ist. *Der Tangentialkegel von F_n in einem beliebigen Punkte O von γ hat jede Tangente der Kurve γ in O zur s-fachen Erzeugenden, so daß der Tangentialkegel von F_n in einem allgemeinen Punkt von γ in s durch die Tangente von γ in diesem Punkte gehende Ebenen zerfällt.* Insbesondere ist ein allgemeiner Punkt einer Doppelkurve biplanar. Diese Eigenschaften werden oft aus der Anschauung entwickelt (vgl. z. B. Cremona, *Grundzüge*, S. 19 Anm.), aber sie lassen sich auch z. B. aus den Sätzen über Polarität (§ 5) ableiten.

Es folgt daraus z. B.: wenn γ für F_n s-fach ist und ein Punkt O von γ der für F_n s-fach ist, auch ein mehrfacher Punkt von γ ist, so liegen die Tangenten von γ in O alle in einer Ebene, die s-mal gezählt den Tangentialkegel von F_n in O bildet. Wenn also O derart ist, daß drei Tangenten von γ in O nicht in einer Ebene liegen, so muß die Multiplizität von F_n in O notwendigerweise größer als s sein. Z. B. wenn es sich um eine Doppelkurve von F_n handelt, die einen dreifachen Punkt O, dessen Tangenten nicht in einer Ebene liegen, besitzt, so muß der Punkt O (wenigstens) dreifach für F_n sein, und der zugehörige Tangentialkegel zerfällt in die drei Ebenen, welche die drei Geraden paarweise verbinden.

§ 5. Polareigenschaften.

Die Polareigenschaften der Flächen sind zum großen Teil denen der ebenen Kurve analog (Bd. II[1], S. 278).

Ist $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine quaternäre Form der Ordnung n, so setzt man

$$\Delta_y f = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} y_4\right).$$

Dann ist $\Delta_y f = 0$ die Gleichung der *ersten Polare* des Punktes y in bezug auf die Fläche $f = 0$.

In dieser Bildung kann man fortfahren, indem man aufs neue die Polare von y in bezug auf die erste Polare sucht usw. So erhält man die zweite, dritte, . . ., allgemein die r-te Polare des Punktes y in bezug auf die Fläche $f = 0$ in der Form dargestellt

$$\Delta_y^r f = 0.$$

Man kann in bezug auf diese die s-te Polare eines neuen Punktes z nehmen. Für diese *gemischten Polaren* hat man entsprechend der Identität

$$\Delta_z^s(\Delta_y^r f) \equiv \Delta_y^r(\Delta_z^s f)$$

den Satz: *Die s-te Polare eines Punktes z bezüglich der r-ten Polare eines Punktes y fällt mit der r-ten Polare von y bezüglich der s-ten Polare von z zusammen* (Plücker).

Außerdem liefert die Identität

$$\Delta_y^r f(x) \equiv \Delta_x^{n-r} f(y)$$

den Reziprozitätssatz: *Wenn x auf der r-ten Polare von y liegt, so liegt y auf der (n — r)-ten Polare von x* (Bobillier).

Die r-te Polare eines Punktes y ist der Ort der r-ten polaren Punktgruppen von y bezüglich der Gruppen von n Punkten, die eine bewegliche Gerade durch y aus F_n ausschneidet, und ebenfalls der Ort der r-ten Polarkurven von y bezüglich der Kurven von der Ordnung n, die aus F_n von den Ebenen durch y ausgeschnitten werden.

Ist y ein s-facher Punkt von $F_n (n \geqq s \geqq 1)$, so werden die Polaren von y, deren Ordnung kleiner als s ist, unbestimmt, und die übrigen haben in y einen s-fachen Punkt mit demselben Tangentialkegel wie F_n. Umgekehrt ist ein Punkt, der für eine seiner nichtverschwindenden Polaren s-fach ist, auch s-fach für F_n.

Damit ein Punkt y für F_n s-fach sei, ist notwendig und hinreichend, daß seine Polare von der Ordnung $s - 1$ unbestimmt wird. Der Tangentialkegel in y hat dann die Gleichung $\Delta_y^{n-s} f(x) = 0$.

Ist y für F_n s-fach, so hat die r^{te} Polare eines anderen Punktes z (für $r < s$) in y einen $(s - r)$-fachen Punkt, und ihr Tangentialkegel in y ist die r-te Polare von z (oder der Geraden yz) bezüglich des Kegels von der Ordnung s, der F_n in y berührt.

Wenn die r-te Polare von y in z einen s-fachen Punkt hat, so hat die Polare der Ordnung $r + s - 1$ von z in y einen s-fachen Punkt, und umgekehrt.

Die ersten Polaren der Punkte einer Geraden bilden einen Büschel (§ 8), dessen Basiskurve, die die Ordnung $(n - 1)^2$ hat, die *erste Polare der Geraden* heißt (Bobillier, Cremona). Ist die Gerade eine allgemeine, so hat in einem s-fachen Punkte von F_n die Polarkurve wenigstens die Multiplizität $(s - 1)^2$ und eine größere Multiplizität nur dann, wenn der Tangentialkegel von F_n in dem Punkte einen mehrfachen Bestandteil hat.

Die ersten Polaren der Punkte einer Ebene bilden ein Netz (§ 8) von besonderer Art, dessen $(n - 1)^3$ Basispunkte die Pole der Ebene sind. Ein s-facher Punkt von F_n absorbiert mindestens $(s - 1)^3$ solche Pole und eine größere Anzahl nur dann, wenn der Tangentialkegel von F_n in dem Punkte mehrfache Erzeugende besitzt.

Die Theorie der Polaren ist für ebene Kurven und Flächen fast gleichzeitig entwickelt worden von Bobillier, *Ann. de Math.* **18**, 89, 157, 253 (1828), **19**, 106, 138, 302 (1829), und mit homogenen Koordinaten von Plücker, *J. f. Math.* **5**, 1 (1830), *Abhdlgn. I*, S. 124; hierauf von Graßmann, *J. f. Math.* **24**, 262, 372 (1842), **25**, 57 (1843), *Werke II*¹, S. 3; für Flächen in geometrischer Form von Cremona, *Grundzüge*, S. 61 und von Bäcklund, *Stockh. Vet. Akad. Handl.* **9**², Nr. 9 (1870); der letztere

hat insbesondere die Hüllfläche der Polarebenen der Punkte einer Fläche bezüglich einer anderen Fläche behandelt. Vgl. auch Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften III* (Leipzig 1909), S. 382, *IV* (1909), S. 477, 480.

Laguerre, *Bull. Soc. M.* **3**, 174 (1875), *Œuvres II*, p. 410, hat einige Sätze über die polare Gerade einer Geraden g bezüglich einer F_n ohne mehrfache Punkte gegeben, d. h. über den Ort der Pole von g bezüglich der als Klassenkurven aufgefaßten Schnittkurven von F_n mit den Ebenen durch g.

Bertini, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) 7², 217, 275 (1898), hat alle Flächensysteme bestimmt, welche dieselben ersten Polaren haben [die gleiche Frage für die Ebene *Torino Atti* **33**, 23 (1897)].

Die zweiten Polaren bezüglich einer allgemeinen F_4 hat R. Schmidt, *Diss.*, Breslau 1908, untersucht.

Eine konstruktive Ableitung der Polareigenschaften mit Hilfe zweier Projektionskegel verdankt man Rodenberg, *Math. Ann.* **26**, 557 (1886).

Veneroni, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **32**, 536 (1900), hat den Komplex vom Grade $2(n-1)^3$ untersucht, den die Polargeraden der Punkte des Raumes für die F_n eines Büschels bilden.

§ 6. Apolarität.

Für die Erweiterung der Polarentheorie, d. h. die *Theorie der Apolarität*, bestehen für die Flächen analoge Sätze wie die für die ebenen Kurven in Bd. II¹, S. 280 angegebenen. Über diese und über die Verknüpfung der Apolaritätstheorie mit der Darstellung einer quaternären Form von der Ordnung n als Summe von n-ten Potenzen linearer Formen vergleiche man insbesondere die Arbeiten von Reye, Palatini, Hilbert, Richmond und Lasker, die in Bd. II¹ auf S. 281 f. zitiert sind. Reye, der Begründer der Apolaritätstheorie, ist von Begriffen der Mechanik ausgegangen und hat im *J. f. Math.* **78**, 114 (1874) auf diesem Wege die Reduzierbarkeit der Gleichung einer F_3 auf die Summe von fünf Kuben (die kanonische Form von Sylvester) bewiesen, ebendort S. 105, daß eine F_4 im allgemeinen nicht durch das Verschwinden der Summe von neun vierten Potenzen dargestellt werden kann, endlich auf S. 123, daß dies durch die Summe von zehn vierten Potenzen immer geschehen kann. Über den Fall der F_4 vgl. noch Sylvester, *C. R.* **102**, 1532 (1886), *Papers IV*, S. 527; Richmond, *Quart. J.* **33**, 331 (1902); Palatini, *Torino Atti* **38**, 45 (1903); Dixon, *London M. S. Proc.* (2) **4**, 227 (1907).

Lindemann, O. Schlesinger und W. F. Meyer haben in den Bd. II[1], S. 281 angeführten Arbeiten gezeigt, wie die Theorie der Apolarität und der Kombinanten in höheren Gebieten sich durch eine Reihe von Übertragungsprinzipen aus der bloßen Betrachtung der gleichen Gebilde im binären Gebiete ableiten läßt. Als Anwendung solcher Übertragungsprinzipe hat man z. B. das beachtenswerte Resultat (W. F. Meyer, *Apolarität und rationale Kurven*, Tübingen 1883, S. 343), daß das Problem der Darstellung einer quaternären kubischen Form als Summe von fünf Kuben dasselbe ist wie das der Darstellung einer binären Form 9. Ordnung als Summe von fünf neunten Potenzen, indem das eine auf das andere sich durch invariante Prozesse zurückführen läßt.

§ 7. Hüllflächen. Klasse einer Fläche. Umschriebener Kegel eines Punktes.

Ist $f = 0$ die Gleichung einer Fläche F_n der Ordnung n, so werden die Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der Tangentialebene im Punkte y durch die Gleichungen geliefert

$$\varrho u_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \varrho u_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \varrho u_3 = \frac{\partial f}{\partial y_3}, \quad \varrho u_4 = \frac{\partial f}{\partial y_4}.$$

Ist die F_n nicht abwickelbar und insbesondere kein Kegel, so hat sie ∞^2 Tangentialebenen, diese bilden ein algebraisches Gebilde, das der Fläche F_n dual entspricht; die Gleichung dieses Gebildes in den Ebenenkoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 kann man erhalten, indem man die y_i und den Proportionalitätsfaktor ϱ aus den vorstehenden Gleichungen und der Gleichung

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

eliminiert. Die Tangentialgleichung einer F_n in symbolischer Form gab Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 55 (1861).

Der *Ordnung* ist dual zugeordnet die *Klasse* und dem Begriff des *mehrfachen Punktes* der Begriff der *mehrfachen Tangentialebene*. Die Fläche heißt von der Klasse n', wenn durch eine allgemeine Gerade des Raumes n' Tangentialebenen der Fläche gehen.

Was die s-fachen Tangentialebenen betrifft, so wollen wir, um die Ideen zu fixieren, nur den Fall $s = 2$ betrachten, d. h. den Fall einer Ebene, in welche zwei der n' durch eine allgemeine Gerade der Ebene selbst gehende Tangentialebenen zusammenfallen. Es können drei Fälle eintreten, entsprechend den drei Arten von

Doppelpunkten, den konischen, biplanaren und uniplanaren. Im ersten Falle berührt die Ebene die F_n in allen Punkten eines irreduzibeln Kegelschnittes, im zweiten Fall in zwei verschiedenen Punkten, im dritten Fall in zwei unendlich benachbarten Punkten, d. h. die Ebene ist eine stationäre Tangentialebene (§ 2).

Da die erste Polare eines Punktes O bezüglich der F_n durch die Berührungspunkte der durch O gelegten Tangenten geht, sind die Berührungspunkte der F_n mit den durch eine allgemeine Gerade gelegten Tangentialebenen die Schnittpunkte von F_n mit der ersten Polaren der Geraden, die mehrfachen Punkte von F_n ausgenommen (§ 5). Es ergibt sich so, daß *eine Fläche von der Ordnung n ohne mehrfache Punkte von der Klasse $n(n-1)^2$ ist.* Dieser Satz findet sich bei Poncelet, *J. f. Math.* **4**, 30 (1829), *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris 1866, II, 84; aber schon Monge, *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, Paris 1801, Nr. 5 und *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris 1807 (5. éd. par Liouville, Paris 1850), p. 16, hatte bemerkt, daß der von einem Punkte aus der F_n umschriebene Kegel sie längs einer Kurve berührt, die auf einer Fläche von der Ordnung $n-1$ liegt. Einen Beweis dieses Satzes gab Hachette, *Corr. sur l'école imp. polyt.* **1**, 188 (1806), einen anderen Cauchy, ebenda, p. 190.

Ein s-facher Punkt von F_n, der nicht auf einer mehrfachen Kurve liegt, erniedrigt die Klasse der Fläche um wenigstens $s(s-1)^2$ Einheiten und erniedrigt sie um mehr nur dann, wenn der Tangentialkegel von F_n in diesem Punkte mehrfache Erzeugende hat. Vgl. Rohn, *Leipz. Ber.* **36**, 2 (1884); Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **24**, 188 (1896); Segre, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 26 (1897).

Die Klasse von F_n kann man auch bestimmen, indem man den F_n umschriebenen Kegel betrachtet, der von einem allgemeinen Punkte des Raumes ausgeht, nämlich den Kegel Γ, der zu Erzeugenden die aus O an F_n gezogenen Tangenten hat und zu Tangentialebenen längs dieser Erzeugenden die Tangentialebenen von F_n in den Berührungspunkten dieser Tangenten. Der Ort der Berührungspunkte ist die Berührungskurve des Kegels mit F_n. Ist A einer der Berührungspunkte, so werden die Tangente OA und die Tangente der Berührungskurve in A konjugierte Tangenten von F_n in A (§ 2).

Die Klasse des Kegels Γ ist immer gleich der Klasse von F_n. Der Kegel selbst ist von der Ordnung $n(n-1)$ und besitzt gewöhnliche doppelte Erzeugende (Knotenlinien) und gewöhnliche stationäre Erzeugende (Kuspidallinien) in den Doppeltangenten

und den Haupttangenten von F_n, die von O ausgehen. Sind die Koordinaten von O y_1, y_2, y_3, y_4 und die Koordinaten des Berührungspunktes einer Haupttangente x_1, x_2, x_3, x_4, so genügen die letzteren den drei Gleichungen

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad \Delta_y f(x) = 0, \quad \Delta_y^2 f(x) = 0.$$

Sind statt dessen x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten eines Berührungspunktes einer Doppeltangente, die durch O geht, so ergibt sich

$$(2) \qquad f(x) = 0, \quad \Delta_y f(x) = 0, \quad D(x) = 0,$$

wo $D(x)$ von der Ordnung $(n-2)(n-3)$ in den x_i und die Diskriminante der Binärform

$$\frac{1}{2!}\lambda^{n-2}\Delta_y^2 f(x) + \frac{1}{3!}\lambda^{n-3}\mu\Delta_y^3 f(x) +$$

ist, zu der man gelangt, indem man in unserem Falle die Schnittpunkte von F_n mit der Verbindungslinie von O und dem Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) sucht. Es folgt daraus, daß, wenn F_n keine singulären Punkte hat, der Kegel $\Gamma \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3)$ Knotenlinien und $n(n-1)(n-2)$ Kuspidallinien besitzt, so daß seine Klasse $n(n-1)^2$ ist. Vgl. Salmon-Fiedler *II*, S. 18; Cremona, *Grundzüge,* S. 64.

Setzt man hingegen voraus, daß F_n zwar keine mehrfachen Linien, aber einen s-fachen Punkt A besitzt, und sei I die Erniedrigung, welche die Klasse von Γ durch die singuläre Erzeugende OA erfährt, sei endlich R resp. $2Q$ die Multiplizität des Schnittes der drei Flächen (1) resp. der drei Flächen (2) in A, dann verringern sich die Anzahlen der Knotenlinien und Kuspidallinien von F_n um Q und R Einheiten, mithin erniedrigt der Punkt A die Klasse $n(n-1)^2$ um $I - 2Q - 3R$ Einheiten.

Ist z. B. A ein gewöhnlicher s-facher Punkt, so findet man

$$I = s(s-1)[s(s-1)-1], \quad 2Q = s(s-1)(s-2)(s-3),$$
$$R = s(s-1)(s-2)$$

und mithin für die Erniedrigung der Klasse die Zahl $s(s-1)^2$.

In jedem Fall erfordert die Berechnung der Erniedrigung, die in der Klasse durch den singulären Punkt A hervorgerufen wird, die Bestimmung der Zahlen I, Q, R. Damit sich ergibt

$$2Q > s(s-1)(s-2)(s-3),$$

ist notwendig und hinreichend, daß der Tangentialkegel von F_n in A eine wenigstens vierfache Erzeugende oder einen nicht ebenen, wenigstens doppelt zählenden Bestandteil besitzt. Damit

$$R > s(s-1)(s-2)$$

wird, ist notwendig und hinreichend, daß der genannte Kegel eine wenigstens dreifache Erzeugende besitzt. Wenn demnach $2Q$ und R diese Grenzen nicht übersteigen, reduziert sich die Berechnung der Erniedrigung der Klasse auf die Berechnung von I. Vgl. Segre a. a. O. p. 27.

Die in der Klasse von F_n durch eine s-fache Linie hervorgebrachte Erniedrigung wird, wenn die Kurve die Ordnung b und den Rang r hat, im allgemeinen

$$(s-1)\,[bn(3s+1) - 2bs(s+1) - rs^2].$$

Sie ist durch Induktion von Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **2**, 73 (1847) gefunden worden, und zwar zunächst für eine Kurve, welche den vollständigen Schnitt zweier Flächen bildet, darauf *Dublin Trans.* **23**, 485 (1859) für den allgemeinen Fall. Vgl. auch Salmon-Fiedler *II*, S. 660.

Wenn insbesondere F_n eine s-fache Gerade besitzt, so gehen durch sie

$$(n-s-1)\,[n(n+s-1) - 2s(s+1)]$$

Tangentialebenen, deren Berührungspunkt außerhalb der Geraden liegt. Vgl. Fouret, *Rend. Circ. Mat.* **8**, 202 (1894); Godeaux, *Nouv. Ann.* (4) **9**, 162 (1909).

Hat F_n keine mehrfachen Punkte, so schneidet der aus einem allgemeinen Punkte O der Fläche umschriebene Kegel die Fläche außer der Berührungskurve γ, die von der Ordnung $n(n-1)$ ist, in einer Kurve γ' von der Ordnung $n(n-1)(n-2)$, welche γ in $n(n-1)^2(n-2)$ Punkten trifft. Zu diesen gehören die

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Berührungspunkte der Doppeltangenten, die von O ausgehen, die übrigen sind die $n(n-1)(n-2)$ Berührungspunkte der Haupttangenten, die von O ausgehen, jede zweimal gezählt. Vgl. Sturm, *J. f. Math.* **72**, 359 (1870). Die Kurve γ' ist der vollständige Schnitt von F_n mit einer Fläche von der Ordnung $(n-1)(n-2)$, die

von Kohn, *Wien. Sitzungsber.* 89, 165 (1884) unter der Bezeichnung „*Satellitfläche* des Pols O in bezug auf die Fläche F_n“ untersucht worden ist.

§ 8. Lineare Flächensysteme.

Für die linearen Flächensysteme gelten viele der Definitionen und Sätze, die in Bd. II[1], S. 276, 334 für die linearen Kurvensysteme aufgestellt sind.

Sind $f_1 = 0, \ldots, f_{k+1} = 0$ Flächen von der Ordnung n, die linear unabhängig sind, d. h. besteht zwischen den f keine Identität von der Form $\sum_{=1}^{k+1} a_i f_i = 0$ mit konstanten und nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten a_i, so bestimmen sie ein *lineares System* von der *Ordnung* n und der *Dimension* oder *Stufe* k, d. h. von ∞^k Flächen. Diesem System gehören alle Flächen an, die durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i = 0$, in der die λ_i veränderliche Parameter bezeichnen, dargestellt werden. Für $k = 1$ ergibt sich ein *Büschel*, für $k = 2$ ein *Netz* oder *Bündel*, für $k = 3$ ein *Gebüsch*. Die dualen Gebilde sind die *Schar*, das *Gewebe* oder die *Scharschar* und das *Geflecht*.

Von einem linearen System der Dimension k geht eine einzige Fläche durch k allgemeine Punkte. Der Satz ist umkehrbar, außer in gewissen Ausnahmefällen. Vgl. Bertini, *Introduzione*, S. 222.

Das lineare System, das durch eine gewisse Anzahl von Flächen eines linearen Systems bestimmt wird, gehört diesem ganz an. Es existieren $\infty^{(k-k')(k'+1)}$ lineare Systeme von der Dimension $k'(k' \leqq k)$, die in einem linearen ∞^k System enthalten sind. Sind zwei lineare Systeme von gleicher Ordnung und den Dimensionen k, k' gegeben, und ist c die Dimension des niedrigsten linearen Systems, das sie enthält, s die Dimension des höchsten ihnen gemeinsamen Systems, so wird $k + k' = c + s$.

Schneiden wir die Flächen eines Systems von der Stufe k und der Ordnung n mit einer Geraden oder einer Ebene, so finden wir eine Involution vom Grade n oder ein lineares Kurvensystem der Ordnung n, deren Dimension $k - h$ beträgt, wenn die Gerade oder Ebene zu h linear unabhängigen Flächen des Systems gehört.

Ein s-facher Punkt von $k + 1$ linear unabhängigen Flächen eines Systems von der Stufe k ist s-fach für die allgemeine Fläche

des Systems und heißt ein s-facher *Basispunkt* oder *Grundpunkt*. Die Berührungskegel in ihm bilden ein lineares System von der Ordnung s, dessen Dimension nur dann $< k$ ist, wenn einzelne Flächen des Systems in diesem Punkte eine Multiplizität $> s$ besitzen. Die Basispunkte können übrigens auch eine oder mehrere *Basislinien* oder *Grundlinien* des Systems erfüllen.

Die Flächen eines gegebenen linearen Systems, die in gegebenen, einfachen oder mehrfachen Punkten von endlicher oder unendlicher Anzahl gegebene Multiplizitäten mit gegebenen einfachen oder mehrfachen Erzeugenden der Tangentialkegel besitzen, bilden, wenn sie existieren, ein lineares System.

Vgl. Sturm, *Die Lehre von d. geom. Verwandtschaften III*, Leipzig 1909, S. 353.

Ein lineares System heißt *irreduzibel* oder *reduzibel*, je nachdem eine allgemeine zu ihm gehörende Fläche von dieser Art ist. Es gelten hier die zwei Sätze von Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **15**, 24 (1882) oder *Introduzione*, p. 227:

Wenn jede Fläche des Systems außerhalb der Basispunkte einen s-fachen Punkt besitzt, so ist der Ort dieser Punkte eine Fläche, die $(s - 1)$*-mal gezählt zu jeder Fläche des Systems gehört. Deshalb kann die allgemeine Fläche eines irreduziblen Systems keine veränderlichen mehrfachen Punkte besitzen.*

Wenn man die Systeme mit einem festen Bestandteil ausschließt, so zerfällt die allgemeine Fläche eines reduziblen Systems in eine gewisse Anzahl t von irreduziblen Flächen eines und desselben Büschels, welche in diesem Büschel eine Involution vom Grade t bilden.

Pieri, *Rivista di Mat.* **3**, 44 (1893), hat alle linearen irreduziblen Systeme von algebraischen Kegeln mit nicht fester Spitze bestimmt und im *Giorn. di Mat.* (1) **31**, 151 (1893) alle irreduziblen linearen Systeme von Monoiden mit nicht festem Scheitel.

Ein lineares System heißt *einfach* oder *zusammengesetzt*, jenachdem die Flächen des Systems, die durch einen allgemeinen Punkt gehen, außer den Basispunkten und Basiskurven nur diesen Punkt gemein haben oder auch noch andere Punkte. Ein System kann auf zwei Arten zusammengesetzt sein; vgl. Bertini, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **10**[1], 73 (1901); *Introduzione*, p. 232. Der erste Fall, der eintreten kann, ist der, daß alle Flächen des Systems, die (außer den Basiselementen) einen Punkt gemein haben, noch durch andere $\mu - 1$ Punkte gehen: dann ist dem System eine *Punktinvolution* vom *Grade* μ im Raum zugeordnet, derart daß jeder Punkt des Raumes zu einer und nur zu einer Gruppe von μ Punkten gehört und eine Fläche des Systems, die durch einen Punkt

einer Gruppe geht, alle Punkte der Gruppe enthält. Man nennt in diesem Falle das System *mit der Involution zusammengesetzt* oder *zu der Involution gehörend.* Der zweite mögliche Fall wird durch *eine lineare Kurvenkongruenz* gegeben; hierunter versteht man ein algebraisches System von ∞^2 Kurven von der Art, daß durch einen allgemeinen Punkt des Raumes eine einzige Kurve geht. Eine solche Kongruenz ist rational nach dem Satz von Castelnuovo (Bd. II[1], S. 370) über die Rationalität der ebenen Involutionen. An sie kann ein lineares Flächensystem geknüpft sein in der Weise, daß alle Flächen des Systems, die durch einen allgemeinen Punkt A gehen, immer die ganze Kurve der Kongruenz enthalten, die durch A geht. Man nennt dann das System *mit der linearen Kongruenz zusammengesetzt.*

Grad eines linearen Systems heißt die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte von drei Flächen des Systems. Der Grad ist immer endlich; außerdem durchlaufen die veränderlichen gemeinsamen Punkte von drei Flächen und auch die veränderliche gemeinsame Kurve von zwei Flächen des Systems immer den ganzen Raum.

Die linearen Systeme vom Grade Null bestehen außer den Büscheln und Bündeln aus den Systemen, die außer einem festen Bestandteil durch eine Involution in einem Büschel gegeben oder mit einer linearen Kongruenz zusammengesetzt sind; sie werden daher algebraisch bis auf einen gemeinsamen Faktor durch lineare Kombinationen von den aus zwei oder drei Quaternärformen gebildeten Formen einer gewissen Ordnung gegeben. Damit ein lineares System von einer Dimension > 2 den Grad Null hat, ist auch notwendig und hinreichend, daß seine Flächen, die durch einen allgemeinen Punkt gehen, dort wenigstens eine gemeinsame Tangente haben (Bertini, a. a. O.).

Ein lineares System dritter Stufe vom Grade 1 heißt *homaloidisch.* Von dieser Art ist notwendigerweise jedes algebraische System von einer Dimension > 2, in dem drei allgemeine Flächen einen einzigen veränderlichen Schnittpunkt haben. Diese Flächensysteme liefern die Cremonaschen (birationalen) Transformationen des Raumes.

Wichtige allgemeine Eigenschaften findet man wie bei der Ebene (Bd. II[1], S. 334), indem man nicht alle Basiselemente des linearen Systems, sondern nur einen Teil von ihnen mit den zugehörigen Multiplizitäten (*Basisgruppe*) ins Auge faßt, wobei im übrigen die Punkte der Basisgruppe von beliebiger Art, insbesondere von endlicher oder unendlicher Anzahl, getrennt oder unend-

lich benachbart sein können. Vgl. Castelnuovo, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 241 (1897); Bertini, *Introduzione,* S. 241; Picard et Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indépendantes II*, Paris 1906, S. 70.

Das lineare System heißt *vollständig* oder *unvollständig* bezüglich der Basisgruppe, je nachdem es aus allen Flächen der Ordnung n besteht, die in den Punkten und Kurven der Basisgruppe die gegebenen Multiplizitäten besitzen oder nicht. Ein unvollständiges System $|F_1|$ bestimmt immer in eindeutiger Weise ein vollständiges System $|F|$, in welchem es *vollständig enthalten* ist, so daß jede Fläche von $|F_1|$ auch eine Fläche von $|F|$ ist. Der Unterschied zwischen der Dimension von $|F|$ und von $|F_1|$ heißt der *Defekt* von $|F_1|$.

Ein lineares Flächensystem, das bezüglich einer gegebenen Basisgruppe vollständig ist, wird von einer allgemeinen Ebene in einem (bezüglich der als Schnitt der gegebenen Basisgruppe gewonnenen Basisgruppe) vollständigen regulären Kurvensystem geschnitten, wenn nur die Ordnung n der Fläche des Systems eine gewisse Grenze, die von der Natur der Basisgruppe abhängt, übersteigt.

Es sei ϱ_n die Dimension eines linearen Systems $|F_n|$ von Flächen der Ordnung n, das für eine gegebene Basisgruppe G vollständig ist, ferner sei l die soeben bezeichnete Grenze, so daß für $n < l$ das Schnittkurvensystem unvollständig oder überschüssig wird. Dann findet man

$$(1) \qquad \varrho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)h_0 - h_1 \quad \text{für } n \geqq l-1,$$

wo h_0 und h_1 zwei Konstanten sind, die von G abhängen. Genauer ausgedrückt, hängt h_0 nur von den Basiskurven des Systems $|F_n|$ ab und ist die Postulation der Basisgruppe, die als Schnitt der Basiskurven mit einer allgemeinen Ebene entsteht, so daß sich die Bestimmung von h_0 auf ein ebenes Problem reduziert, das als gelöst angesehen werden kann. Dagegen hängt h_1 von der ganzen Gruppe G ab, und seiner Bestimmung stehen im allgemeinen eigentümliche Schwierigkeiten entgegen. Enthält z. B. G nur eine einfache Basiskurve, die irreduzibel und von mehrfachen Punkten frei ist, ferner die Ordnung ν und das Geschlecht π hat, so wird

$$h_0 = \nu, \; h_1 = 1 - \nu - \pi.$$

Vgl. Cayley, *Math. Ann.* **3**, 526 (1871), *Papers VIII,* S. 394;

Noether, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 163 (1871), die für viele Fälle die Art, wie sich h_1 durch die Basisgruppe bestimmen läßt, angegeben haben.

Die Zahl $(n+1)h_0 + h_1$, die nach (1) die Zahl der Bedingungen ausdrückt, die für genügend großes n die Basisgruppe den Flächen der Ordnung n auferlegt, heißt die *Postulation* der Basisgruppe, und die Gleichung (1) heißt die *Postulationsformel* oder *charakteristische Formel.*

Für $n < l-1$ wird dagegen der Wert von ϱ_n durch die Formel gegeben

$$(2) \quad \varrho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)h_0 - h_1 + \sum_{n+1}^{l-1} \delta_i - \sum_{n+1}^{l-1} s_i,$$

wo δ_i und s_i den Defekt und den Überschuß des linearen Kurvensystems, in dem $|F_i|$ von einer allgemeinen Ebene geschnitten wird, bezüglich der Basisgruppe, die den Schnitt von G mit der betrachteten Ebene bildet, bezeichnen, wenn $|F_i|$ das bezüglich der Gruppe G vollständige lineare Flächensystem von der Ordnung i bedeutet.

Ist die Dimension eines linearen vollständigen Systems von der Ordnung n (und die aller Systeme höherer Ordnung mit der gleichen Basisgruppe) durch die Postulationsformel (1) gegeben, so nennt man das System *regulär* $(n \geqq l-1)$, im anderen Falle $(n < l-1)$ *überschüssig.* Im zweiten Falle heißt die durch die rechte Seite der Gleichung (1) gegebene Zahl die *virtuelle Dimension* des Systems; bezeichnet man sie mit ϱ'_n und nennt ϱ_n die *effektive Dimension*, die durch (2) gegeben wird, so hat man

$$\varrho_n - \varrho_n = \sum_{n+1} \delta_i - \sum_{n+1} s_i.$$

Diese Differenz $\sigma_n = \varrho_n - \varrho'_n$ heißt der *Überschuß* des Systems $|F_n|$, aber im Gegensatz zu den Verhältnissen, die bei ebenen linearen Kurvensystemen obwalten, kann diese Zahl nicht bloß positiv oder Null, sondern auch negativ sein.

Außerdem kann für einen Wert von $n < l-2$ die virtuelle Dimension des Systems $|F_n|$ gleich der effektiven werden, ohne daß dieselbe Gleichheit auch für das folgende System $|F_{n+1}|$ eintritt.

Wenn ein lineares System von der Ordnung n den Defekt δ_n und den Überschuß σ_n hat, so wird seine Dimension gegeben durch die Formel

$$\varrho_n = \binom{n+3}{3} - 1 - (n+1)h_0 - h_1 + \sigma_n - \delta_n.$$

Es gilt nun ein Satz (Bertini, *Introduzione*, p. 255), der dem in Bd. II^1, S 335 gegebenen analog ist:

Wenn $|F_{n+1}|$ *ein lineares vollständiges System von der Ordnung* $n+1$ *bedeutet und* n *genügend groß ist, so ist das lineare System geringster Dimension, das jede Fläche von* $|F_{n+1}|$ *zusammen mit jeder irreduziblen Fläche der Ordnung* $m-1$ *oder mit jeder* $(m-1)$*-mal gezählten Ebene enthält, das vollständige reguläre System der Ordnung* $n+m$*, das durch die gleiche Basisgruppe bestimmt wird.*

Mannigfache Sätze und Formeln für die linearen Flächensysteme mit beliebigen Singularitäten hat Guccia gegeben, *Rend. Circ. Mat.* **1**, 338 (1887), *C. R.* **105**, 741 (1887), *Rom. Acc. Lincei Rend.* (4) **5**¹, 349, 456, 490 (1889), *Bull. Soc. Math.* **23**, 101 (1895).

Enriques, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **2**², 281 (1893), hat die Klassifikation der einfachen linearen Flächensysteme, deren veränderliche Schnitte rationale ($p=0$) oder hyperelliptische ($p>1$) Kurven sind, bewirkt, indem er alle Typen angab, auf die sich diese Systeme durch Cremonasche Transformationen des Raumes reduzieren lassen; *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **3**¹, 481, 536 (1894) hat er die gleiche Frage für den elliptischen Fall ($p=1$) behandelt, wenn der Grad des Flächensystems >3 ist. Vgl. auch *Math. Ann.* **46**, 179 (1895).

Diese Frage ist eng verknüpft mit dem Problem der projektiven Klassifikation der Flächen, deren ebene Schnitte elliptische oder hyperelliptische Kurven sind oder allgemein ein gegebenes Geschlecht haben. Auf solche und ähnliche Fragen beziehen sich die folgenden Sätze, von denen 2. und 3. Folgerungen aus 1. sind.

1. *Eine irreduzible Fläche, die* ∞^2 *reduzible ebene Schnittkurven enthält, ist entweder eine Regelfläche oder die römische Fläche Steiners* (vgl. Kap. XXXV). Dieser Satz wurde von Kronecker ausgesprochen und von Castelnuovo bewiesen: *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **3**¹, 22 (1894); vgl. Bertini, *Introduzione*, p. 323.

2. *Eine Fläche, die* ∞^2 *Kegelschnitte enthält, ist entweder eine Fläche 2. Ordnung oder eine kubische Regelfläche oder eine Steinersche Fläche.* Dieser Satz wurde zuerst bewiesen von Darboux, *Bull. Sciences Math.* (2) **4**¹, 370 (1880). Vgl. auch Bertini, *Introduzione*, p. 315.

3. *Eine Fläche, deren ebene Schnitte rationale Kurven sind, ist entweder eine rationale Regelfläche oder eine Steinersche Fläche.* Diesen Satz verdankt man Picard, *Bull. Soc. philom.* (7) **2**, 127 (1878), *J. f. Math.* **100**, 71 (1886). Vgl. auch Picard und Si-

mart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indépendantes II*, Paris 1906, p. 59; Picard, *Torino Atti* **36**, 684 (1901); Guccia, *Rend. Circ. Mat.* **1**, 165 (1886); E. H. Moore, *Amer. J.* **10**, 17 (1888); Bertini, *Introduzione*, p. 323. Daß eine solche Fläche notwendig rational ist, folgt aus einem allgemeinen Satz von Noether, *Math. Ann.* **3**, 173 (1871).

4. *Eine Fläche, deren ebene Schnitte elliptische oder hyperelliptische Kurven vom Geschlechte $p > 1$ sind, ist entweder eine Regelfläche oder rational.* Vgl. für $p > 1$ Castelnuovo, *Rend. Circ. Mat.* **4**, 73 (1890); Enriques, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **2**^{2}, 285 (1893), und für den elliptischen Fall del Pezzo, *Rend. Circ. Mat.* **1**, 241 (1887); Castelnuovo, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **3**^{1}, 59 (1894); für alle Fälle vgl. auch Enriques, *Math. Ann.* **46**, 182 (1895).

5. *Eine Fläche von der Ordnung $n > 4$, deren ebene Schnitte Kurven vom Geschlecht 3 sind, ist entweder eine Regelfläche oder rational oder sie läßt sich durch eine Cremonasche Transformation des Raumes auf einen elliptischen Kegel 3. Ordnung reduzieren.* Vgl. Castelnuovo, *Torino Atti* **25**, 695 (1890); Castelnuovo und Enriques, *Ann. di Mat.* (3) **6**, 212 (1901); Scorza, *Ann. di Mat.* (3) **16**, 255 (1909), **17**, 281 (1910).

§ 9. Erzeugung der Raumkurven und Flächen. Rein geometrische Fragen.

Wenn zwei Flächenbüschel von den Ordnungen m, n projektiv aufeinander bezogen sind, so ist der Ort der Schnittkurve entsprechender Flächen eine Fläche von der Ordnung $m + n$, die durch die Basiskurven der beiden Büschel hindurchgeht. Die umgekehrte Frage, ob jede Fläche von der Ordnung $m + n$ sich durch zwei projektive Büschel von den Ordnungen m, n erzeugen läßt, ist im allgemeinen für Flächen von höherer als der dritten Ordnung zu verneinen. Sie läuft darauf hinaus, daß man auf der gegebenen Fläche eine Kurve von der Ordnung m^2 (oder n^2) suchen muß, welche die Basiskurve eines Büschels von F_m (oder F_n) bildet. Vgl. Chasles, *C. R.* **45**, 1066 (1857); Cremona, *Grundzüge*, p. 95; Reye, *Math. Ann.* **2**, 497 (1870); H. Valentiner, *Tidsskr. for Math.* (4) **3**, 22 (1879). Über die Konstruktion von Flächen, die durch gegebene Punkte gehen, durch projektive Büschel vgl. de Jonquières, *C. R.* **105**, 1203 (1887), **106**, 19, 156, 234 (1888), **107**, 430 (1888).

Reye, *Math. Ann.* **1**, 455 (1869), **2**, 475 (1870), hat die Kurve von der Ordnung $(m+n)p$ betrachtet, welche erzeugt wird durch die Schnittpunkte der einander entsprechenden Kurven von den Ordnungen mp und np zweier projektiver Kurvenbüschel auf einer Fläche F_p, d. h. der Kurven, in denen F_p von entsprechenden Flächen zweier projektiven Flächenbüschel von den Ordnungen m, n getroffen wird. Es läßt sich indes nicht jede Kurve von F_p auf diese Weise erzeugen, da eine solche Erzeugung von der Bestimmung einer Gruppe von m^2p (oder n^2p) Punkten auf der Kurve abhängt, welche den Schnitt von F_p mit der Basiskurve eines Büschels von F_m (oder von F_n) bilden.

Reye hat sich a. a. O. auch mit der Erzeugung der Flächen durch *reziproke Flächenbündel* beschäftigt; reziproke Flächenbündel sind dabei solche, zwischen deren Parametern eine bilineare Relation besteht. Zwei solche Bündel von den Ordnungen m, n erzeugen eine Fläche Φ von der Ordnung $m+n$ als Ort der Punkte, in denen die Flächen des einen Bündels von der Basiskurve des dieser Fläche in dem anderen Bündel entsprechenden Flächenbüschels geschnitten werden. Die Fläche geht durch die Basispunkte der beiden Bündel hindurch, und ihre Tangentialebene in einem von diesen Punkten berührt in ihm diejenige Fläche des Bündels, welche der durch diesen Punkt gehenden Kurve des anderen Bündels entspricht. Vgl. Padova, *Giorn. di Mat.* (1) **9**, 148 (1871).

Auch hier reduziert sich die Frage, wie man eine gegebene Fläche Φ von der Ordnung $m+n$ durch zwei reziproke Bündel von den Ordnungen m, n erzeugen kann, auf die Bestimmung einer Gruppe von m^3 (oder n^3) Punkten auf Φ, welche die Basispunkte eines Bündels von F_m (oder F_n) bilden. Insbesondere hat Reye gefunden, daß jede Fläche Φ_n von der Ordnung n sich durch zwei reziproke Bündel, wovon eines aus Ebenen und das andere aus F_{n-1} besteht, erzeugen läßt, wobei man als Mittelpunkt des Ebenenbündels einen beliebigen Punkt von Φ_n wählen kann, oder auch durch zwei Bündel, von denen das eine aus F_2, das andere aus F_{n-2} besteht.

Escherich, *Wien. Sitzungsber.* **75**², 523 (1877), **85**², 526, 893 (1882), **90**², 1036 (1884) hat diese Untersuchungen fortgeführt, indem er durch Abzählung der Konstanten zeigte, daß die Erzeugung einer Φ_n durch reziproke Bündel von den Ordnungen p, $n-p$ sich im allgemeinen nur für $p = 1, 2, \ldots, 7$ durchführen läßt, ausgenommen den Fall $n = 16$, in welchem die Fläche auch durch zwei Bündel 8. Ordnung erzeugt werden kann.

Die Erzeugung einer F_n mittels eines Strahlenbündels und eines zu ihm reziproken Flächenbündels $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben Escherich a. a. O. und F. Schur, *Math. Ann.* **23**, 437 (1884), für eine durch $N(n)$ gegebene Punkte bestimmte F_n behandelt.

Eine Erzeugung algebraischer Flächen durch einen linearen Mechanismus hat H. Graßmann angegeben, indem er diese zuerst aus seiner *Ausdehnungslehre* (Leipzig 1844, § 145, *Werke I*^{1}, S. 245) ableitete und darauf unabhängig begründete: *J. f. Math.* **49**, 1, 10, 21 (1855), *Werke II*^{1}, S. 136, 145, 155; im *J. f. Math.* **49**, 37, 47, *Werke II*^{1}, S. 170, 180 findet sich die Anwendung auf F_2 und F_3. Wenn die Lage eines Punktes x im Raume dadurch beschränkt ist, daß zwei gerade Linien, welche durch lineare Konstruktionen aus x und einer Reihe fester Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der Ort von x eine algebraische Fläche, und zwar ist sie eine Fläche n-ter Ordnung, wenn bei jenen Konstruktionen x im ganzen n-mal benutzt ist. Umgekehrt läßt sich jede algebraische Fläche auf die angegebene Weise erzeugen.

In Verbindung mit der Graßmannschen Erzeugung der algebraischen ebenen Kurven (Bd. II^1, S. 287) und Flächen hat Caspary, *J. f. Math.* **100**, 405 (1887) [vgl. auch Caspary, *Bull. Sciences Math.* (2) **11**^{1}, 222 (1887), (2) **13**^{1}, 202 (1889) und Carvallo, *Bull. Soc. Math.* **15**, 158 (1887)] bewiesen, daß, wenn die Lage eines beweglichen Punktes dadurch beschränkt ist, daß eine aus ihm abgeleitete Gerade entweder durch einen aus ihm abgeleiteten Punkt geht oder in einer aus ihm abgeleiteten Ebene liegt, der erste Punkt eine algebraische Raumkurve beschreibt.

Im Zusammenhang mit der linealen Erzeugung der Flächen, zu der Graßmann mit Hilfe seiner „stereometrischen Multiplikation" gelangt, kann man noch bemerken, daß stereometrische Produkte, die nicht von der nullten Stufe sind und einen variablen Punkt x enthalten, *algebraische Raumkurven* darstellen können. Vgl. Sturm, *Math. Ann.* **14**, 20 (1879) und in Graßmanns *Werken II*^{1}, S. 416 die Bemerkungen des Herausgebers Engel.

Koenigs, *C. R.* **120**, 861, 981 (1895) und *Leçons de Cinématique*, Paris 1897, Chap. 11, hat bewiesen, daß *jede algebraische Relation zwischen mehreren Punkten sich durch ein Gelenksystem verwirklichen läßt,* so daß insbesondere auch *jede algebraische Raumkurve oder Fläche durch ein Gelenksystem beschrieben werden kann.*

Über die Erzeugung einer algebraischen Raumkurve durch die Schnittpunkte entsprechender Schmiegungsebenen dreier in ein-

deutiger Beziehung zueinander stehenden Raumkurven oder der Schmiegungsebenen einer Raumkurve mit den Erzeugenden einer auf sie eindeutig bezogenen Regelschar vgl. Segre, *Math. Ann.* **34**, 1 (1889), *Ann. di Mat.* (2) **22**, 136 (1894); ferner Pagliano, *Ann. di Mat.* (3) **5**, 77 (1901).

Das Problem der Erzeugung der Raumkurven und Flächen führt darauf, ihre Theorie rein geometrisch zu behandeln. Diese Aufgabe ist indessen viel weniger durchgeführt worden wie die analoge Aufgabe für die ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 288). Einen ersten Versuch hat Cremona gemacht (*Grundzüge*), indem er indessen immer algebraische Lehrsätze zugrunde legte. In streng geometrischer Weise hat Thieme (Bd. II[1], S. 288) die Polaritätstheorie begründet und daraus die Definition einer algebraischen Fläche und der linearen Flächensysteme abgeleitet. Einzelne Punkte haben behandelt Guccia, *Rend. Circ. Mat.* **16**, 286 (1902), **21**, 389 (1906), *C. R.* **142**, 1494 (1906); Dominioni, *Giorn. di Mat.* (2) **13**, 376 (1906).

Kapitel XXXI.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

(Weitere Ausführungen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

---

§ 1. Mannigfaltigkeiten, die durch das Verschwinden der Determinanten einer Matrix von Formen dargestellt werden. Jacobische Mannigfaltigkeit. Berührungsprobleme für die linearen Flächensysteme.

Von vielen Seiten sind, insbesondere was die Bestimmung der Ordnung betrifft, die Kurven und Flächen und allgemeiner die mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten untersucht worden, die durch das Verschwinden aller Unterdeterminanten bestimmter Ordnung einer gegebenen Matrix, deren Elemente Formen der Koordinaten sind, dargestellt werden.

Wenn es sich um eine allgemeine Matrix handelt und alle ihre Determinanten höchster Ordnung verschwinden, so wird die Ordnung des Gebildes durch eine Formel gegeben, die auf dem Wege der Induktion von Salmon gefunden wurde, *Higher Algebra*, London, 2. ed. 1866, p. 229 (Salmon-Fiedler, *Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen*, 2. Aufl. Leipzig 1877, S. 361, 381). Vgl. noch Salmon, *Quart. J.* **1**, 246 (1857) und Salmon-Fiedler *II*, S. 584 ff. Die Formel wurde darauf bewiesen von S. Roberts, *J. f. Math.* **67**, 266 (1867). Andere Beweise gaben Severi, *Torino Mem.* (2) **52**, 61 (1902); Nanson, *Messenger* (2) **33**, 33 (1903). Vgl. auch Brill, *Math. Ann.* **5**, 378 (1872), **36**, 321 (1890).

In dem besonderen Falle, wo die Elemente derselben Horizontalreihe von gleicher Ordnung sind, liefert die Formel die Ordnung der *Mannigfaltigkeit von* $r + i - k$ $(\geqq 0)$ *Dimensionen, welche den Ort der Punkte eines r-dimensionalen linearen Raums bildet, in denen k entsprechende Überflächen aus k projektiv aufeinander bezogenen linearen Systemen* i^{ter} *Stufe* $(i < k)$ *von den*

Ordnungen $n_1, \ldots, n_k$ *zusammentreffen.* Diese Ordnung ist gleich der Summe der Produkte, die man findet, wenn man die Ordnungen $n_1, \ldots n_k$, zu je $k - i$ auf alle $\binom{k}{i}$ möglichen Arten genommen, miteinander multipliziert.

Viele Spezialfälle, insbesondere für den gewöhnlichen Raum, wurden untersucht von Cayley, *Cambridge and Dublin Math. J.* **4**, 132 (1849), *Papers I*, S. 457; Cremona, *Grundzüge*, S. 95 bis 136; Stuyvaert, *Liège Mém.* (3) **6** (1904), **7** (1907); R. Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften III*, Leipzig 1909, S. 370, und *J. f. Math.* **134**, 288 (1908). In der letzten Abhandlung hat Sturm gezeigt, daß einige von Cremona a. a. O. S. 125—136 aufgestellte Sätze nicht uneingeschränkt gültig sind. Der allgemeine Fall wurde auf algebraischem Wege behandelt von Vahlen, *J. f. Math.* **113**, 348 (1894), auf geometrischem Wege von Pieri, *Rend. Circ. M.* **11**, 58 (1897). Eine hiermit verwandte Frage behandelt Lorenzola, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **36**, 162 (1903).

Im gewöhnlichen Raume wurde die von drei projektiven Flächenbüscheln erzeugte Kurve, insbesondere wenn zwei der Büschel aus Ebenen bestehen, untersucht von Chasles, *C. R.* **52**, 1103 (1861), **53**, 767, 884 (1861); Cremona, *C. R.* **52**, 1319 (1861), *Ann. di Mat.* (1) **4**, 22 (1861); der letztere hat auch die Kurve von der Ordnung $m + 2$ behandelt, die aus drei projektiven Ebenenbüscheln entsteht, wenn zwei von diesen gewöhnliche Büschel und das dritte involutorische von der Ordnung m ist.

Viel behandelt wurde der Fall, wo alle Elemente der Matrix lineare Formen sind, d. h. der Fall der *Mannigfaltigkeit von* $r + i - k$ *Dimensionen und von der Ordnung* $\binom{k}{i}$, *welche den Ort der gemeinsamen Punkte von* k *entsprechenden Überebenen aus* k *projektiven Grundformen* i^{ter} *Stufe im* r*-dimensionalen Raum bildet.* Mit den so erzeugten Mannigfaltigkeiten hat sich beschäftigt Veronese, *Math. Ann.* **19**, 215 (1882), und was den gewöhnlichen Raum betrifft, Cayley, a. a. O.; F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 1 (1881), **20**, 254 (1882); Stuyvaert, a. a. O.; Reye, *J. f. Math.* **104**, 211 (1889), **106**, 30, 315 (1890), **107**, 162 (1891), **108**, 89 (1891), *Berl. Sitzungsb.* 1889, S. 833; Zindler, *J. f. Math.* **111**, 303 (1893), *Wien. Sitzungsber.* **101**, 215 (1892), **105**, 311 (1896); Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften III*, Leipzig 1909, S. 517. Von der analytischen Seite her vgl. W. Stahl, *J. f. Math.* **107**, 179 (1891); Timerding, *Gött. Nachr.* 1898, S. 317; Guradze, *Diss.*, Breslau 1900.

Unter der Voraussetzung, daß von der Matrix alle Unter-

determinanten einer beliebigen gegebenen Ordnung verschwinden und alle Elemente der Matrix Formen derselben Ordnung sind, wurde die Ordnung der Mannigfaltigkeit für eine allgemeine Matrix und eine symmetrische quadratische Matrix bestimmt von Segre, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **9**², 253 (1900), der von einigen Formeln ausging, die Schubert, *Hamburg. Mitt.* **3**, 12 (1891), *Math.-Ver.* **4**, 158 (1897) ausgesprochen und darauf Giambelli, *Lomb. Ist. Mem.* (3) **10**, 155 (1903) bewiesen und verallgemeinert hatte; sie betreffen das Problem der Korrelation in den Überräumen; außerdem benutzte Segre Formeln, die ebenfalls von Schubert, *Math.-Ver.* **1**, 48 (1892), *Math. Ann.* **45**, 153 (1894), herrühren und sich auf die allgemeinen Anzahlfunktionen für die quadratischen Überflächen beziehen; für eine quadratische halbsymmetrische Matrix wurde die Aufgabe gelöst von Palatini, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **11**¹, 315 (1902) durch Betrachtungen, die sich auf die linearen Strahlenkomplexe in den Überräumen gründen.

In seiner vollen Allgemeinheit wurde das Problem gelöst von Giambelli, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **12**², 294 (1903) und besonders *Lomb. Ist. Mem.* (3) **11**, 101 (1904), der (*Torino Atti* **41**, 102 (1906)) speziell die Fälle weiter untersucht hat, in denen die Matrix quadratisch und symmetrisch oder halbsymmetrisch ist. Vgl. auch Bottasso, *Annães scient. da Acad. Polyt. do Porto* **4**, 193 (1909). Anwendungen seiner Resultate auf die Mannigfaltigkeiten, die durch projektive lineare Systeme von Überflächen erzeugt werden, insbesondere die Jacobische Mannigfaltigkeit mehrerer gegebener Überflächen, die durch das Verschwinden aller Determinanten der aus den ersten Derivierten der linken Seiten in den Gleichungen der gegebenen Überflächen gebildeten Matrix dargestellt wird, hat Giambelli, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **14**², 570, 660 (1905) gegeben. Für diese Mannigfaltigkeiten vergleiche im Falle des gewöhnlichen Raumes Cremona, *Grundzüge*, S. 99—136; Salmon-Fiedler *II*, p. 607 ff.; Bäcklund, *Stockholm Vet. Akad. Handl.* **9**², Nr. 9 (1870); Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften III*, Leipzig 1909, S. 398.

Mit diesem Gegenstand berühren sich verschiedene Untersuchungen über die Kontakte, die bei linearen Flächensystemen eintreten können. Bei einem Flächenbüschel von der Ordnung n wird der Ort der Berührungspunkte aller aus einem Punkte P an die Flächen gelegten Tangenten eine Fläche φ_P von der Ordnung $2n-1$, die durch P hindurchgeht und auch als Ort der Schnittkurven der Flächen des gegebenen Büschels mit denen des hierzu

projektiven, von den ersten Polaren des Punktes P bez. der Flächen des Büschels gebildeten Flächenbüschels erzeugt werden kann. Die Fläche φ_P kann als die *äußere Pampolare* (vgl. Bd. II[1], S. 339) von P bezüglich des Büschels bezeichnet werden; sie wurde untersucht von Pieri, *Giorn. di Mat.* (1) **24**, 16 (1886) und besonders von Guccia in einer lithographierten Abhandlung *Teoria delle superficie* φ_P *e delle curve gobbe* A_E *relative a un fascio di superficie e sue applicazioni,* Palermo 1895. Die Flächen φ_P für alle Punkte des Raumes bilden ein dreifach unendlich lineares System, von welchem die Basiskurve des gegebenen Büschels und die Doppelpunkte desselben Büschels Basiselemente sind. Für jeden Punkt der Basiskurve des Büschels gibt es vier Flächen dieses Büschels, die an dieser Stelle einen parabolischen Punkt haben (de Jonquières, *Nouv. Ann.* (2) **3**, 11 (1864)); die Fläche, welche den Ort aller parabolischen Punkte der Flächen des Büschels bildet, ist von der Ordnung $8(n-1)$ und hat die Basiskurve zur vierfachen Kurve (Doehlemann, *Math. Ann.* **41**, 562 (1893)); sie ist die Jacobische Fläche des dreifach unendlichen linearen Systems, das die Flächen φ_P aller Punkte des Raumes für das gegebene Büschel bilden (Mineo, *Rend. Circ. Mat.* **21**, 211 (1906)).

Allgemeiner hat Dominioni, *Giorn. di Mat.* (2) **12**, 350 (1905), **13**, 370 (1906), die Fläche von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(2n-k)(k+1)$$

untersucht, auf welcher die Punkte liegen, in denen die Flächen eines linearen Systems von der Ordnung n und der Stufe k eine $(k+1)$-punktige Berührung mit den von einem gegebenen Punkt ausgehenden Geraden haben.

Kurven und Flächen, welche den Ort der Berührungspunkte von Flächen zweier linearen Systeme bilden, wurden untersucht auf algebraischem Wege von Spottiswoode, *Phil. Trans.* **167**, 351 (1877) und Stuyvaert, *Rend. Circ. Mat.* **18**, 294 (1904), auf geometrischem Wege von Bäcklund, a. a. O., vgl. auch *Tidsskr. for Math.* (4) **2**, 97 (1878), mit Hilfe der Flächen φ_P von Lo Monaco-Aprile, *Rend. Circ. Mat.* **12**, 141 (1898), **18**, 1, 164 (1904); Mineo, ebenda **17**, 297 (1903); Aguglia, ebenda **20**, 304 (1905), **21**, 307 (1906).

Für einen r-dimensionalen Raum wurde der Ort der Berührungspunkte von zwei Überflächen aus zwei linearen Systemen untersucht von Lorenzola, *Giorn. di Mat.* (2) **12**, 213 (1905)

für den Fall, wo eines der beiden Systeme aus Überebenen besteht, für den allgemeinen Fall von Giambelli, *Rend. Circ. Mat.* **23**, 302 (1907), der die Ordnung und die Singularitäten der erzeugten Mannigfaltigkeit bestimmt hat.

Wir wollen nun einige von den Resultaten der angeführten Untersuchungen angeben.

Die *Jacobische Gruppe zweier Flächen* von den Ordnungen n_1, n_2, d. h. die Gruppe der Punkte, die für die beiden Flächen dieselbe Polarebene haben, besteht aus

$$(n_1 + n_2 - 2)\left[n_1^2 + n_2^2 - 2\,(n_1 + n_2) + 2\right]$$

Punkten: de Jonquières, *J. de Math.* (2) **7**, 410 (1862).

Ist $n_1 = n_2 = n$, so ergibt sich, daß die *Jacobische Gruppe eines allgemeinen Büschels von der Ordnung* n *aus* $4(n-1)^3$ *Punkten besteht; es sind dies die Doppelpunkte seiner Flächen, die außerhalb seiner Basiskurve liegen.* In jedem Falle wird, wenn P die Zeuthen-Segresche Invariante einer allgemeinen Fläche des Büschels und p das Geschlecht der Basiskurve bedeutet, die Anzahl der Doppelpunkte $2\,(P + p + 1)$; vgl. Segre, *Torino Atti* **31**, 500 (1896); Pannelli, *Giorn. di Mat.* (2) **11**, 223 (1904). Insbesondere ergibt sich, daß, *wenn die Flächen des Büschels einen s-fachen Punkt gemein haben, dieser wenigstens* $(s-1)^2\,(4s+2)$ *von jenen Doppelpunkten absorbiert.* Vgl. Pieri, a. a. O., p. 22; allgemeinere Resultate finden sich bei Guccia, *C. R.* **120**, 896 (1895) und Pannelli, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **20**¹, 405 (1911).

Die *Jacobische Kurve dreier Flächen* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, d. h. der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen für die Flächen sich in derselben Geraden schneiden, wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \end{matrix} \right\Vert = 0;$$

sie ist von der Ordnung

$$n_1^{\,2} + n_2^{\,2} + n_3^{\,2} + n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 - 4(n_1 + n_2 + n_3) + 6$$

und dem Geschlecht

$$(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(n_1 + n_2 + n_3 - 8) - 10(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(n_1 + n_2 + n_3)(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2) + 22(n_1 + n_2 + n_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2} n_1 n_2 n_3 - 25.$$

Ist $n_1 = n_2 = n_3 = n$, so wird die Kurve eine *Kombinante* des durch die drei Flächen festgelegten Bündels und ist der Ort der Doppelpunkte von Flächen des Bündels, ebenso wie der Ort der Berührungspunkte von Flächen des Bündels, endlich auch der Ort aller Punkte, deren Polarebenen für alle Flächen des Bündels durch dieselbe Gerade gehen. Für ein allgemeines Flächenbündel wurde sie untersucht von Guccia in der angeführten lithographierten Abhandlung und Lo Monaco-Aprile, *Rend. Circ. Mat.* **12**, 141 (1898); für ein Bündel mit gewöhnlichen mehrfachen Basispunkten und Basiskurven von Pannelli, *Giorn. di Mat.* (2) **10**, 97 (1903), **11**, 197 (1904), der (*Rend. Circ. Mat.* **20**, 160 (1905)) die hauptsächlichen abzählerischen Aufgaben über diese Bündel gelöst hat.

Die *Jacobische Fläche J von vier Flächen* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$ von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{vmatrix} = 0$$

und ist von der Ordnung $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$; sie ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen für alle vier Flächen durch denselben Punkt gehen, und auch der Ort eines Punktes, in dem sich die ersten Polaren desselben Punktes für die vier Flächen begegnen. *Ein Punkt A, der für diese Flächen die Multiplizitäten* s_1, s_2, s_3, s_4 *besitzt, ist wenigstens* $(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - 3)$*-fach für J.* Vgl. A. Levi, *Giorn. di Mat.* (2) **3**, 215 (1896); Gerbaldi, *Rend. Circ. M.* **10**, 158 (1896), die alle Fälle angegeben haben, in denen die Multiplizität von J in A die vorstehende um eine Einheit übersteigt. Der erstere hat auch die Fälle bestimmt, in denen sie die vorstehende Zahl um zwei Einheiten übersteigt, und außerdem gefunden, daß, wenn die gegebenen Flächen eine Kurve gemeinsam haben, die für sie der Reihe nach die Multiplizitäten r_1, r_2, r_3, r_4

besitzt, diese Kurve für die Fläche J wenigstens die Multiplizität $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 2$ hat.

Wenn die vier gegebenen Flächen dieselbe Ordnung n haben, so ist J eine *Kombinante* des durch sie bestimmten Gebüschs (∞^3-fachen linearen Systems). *In diesem Fall ist J dann und nur dann unbestimmt, wenn das lineare System mit einer linearen Kongruenz oder einem Büschel zusammengesetzt ist.* Vgl. Bertini, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **10**[1], 73 (1901), *Introduzione*, p. 235. Über die Formensysteme, deren Funktionaldeterminante identisch verschwindet, vgl. noch O. Töplitz, *Diss.* Breslau 1905.

J ist von der Ordnung $4(n-1)$ und der Ort der Doppelpunkte von Flächen des Gebüschs, ebenso wie der Ort eines Punktes, in dem sich die sämtlichen Flächen des Gebüschs, die durch ihn hindurchgehen, berühren, endlich auch der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen für alle Flächen des Gebüschs durch denselben Punkt gehen. Der Ort S dieser letzteren Punkte ist die *Steinersche Fläche* des Gebüschs und von der Ordnung $4(n-1)^3$. Die Flächen J und S sind so aufeinander eindeutig bezogen und liefern durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine bestimmte Strahlenkongruenz.

Hat das Gebüsch einen s-fachen Basispunkt $(s > 1)$, *so hat in diesem J mindestens die Multiplizität* $4s - 2$: Doehlemann, *Math. Ann.* **41**, 568 (1893); A. Levi, a. a. O., S. 226; Gerbaldi, a. a. O., S. 159. *Eine s-fache Basiskurve des Gebüschs ist wenigstens* $(4s-1)$*-fach für J.* Vgl. A. Levi, a. a. O., S. 238, der auch alle Fälle bestimmte, in denen J doppelte oder dreifache Punkte hat.

Die *Jacobische Kurve von fünf Flächen* der Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, d. h. der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen für jene Flächen durch denselben Punkt gehen, ist von der Ordnung

$$n_1 n_2 + \cdots + n_4 n_5 - 4(n_1 + \cdots + n_5) + 10$$

und dem Geschlecht

$$\tfrac{1}{2}(n_1 n_2 n_3 + \cdots + n_3 n_4 n_5) + \tfrac{1}{2}(n_1 + \cdots + n_5)(n_1 n_2 + \cdots + n_4 n_5)$$
$$-2(n_1 + \cdots + n_5)^2 + 26(n_1 + \cdots + n_5) - 6(n_1 n_2 + \cdots + n_4 n_5) - 49.$$

Die *Jacobische Punktgruppe von sechs Flächen* der Ordnungen $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$, d. h. die Gruppe der Punkte, deren Polarebenen bezüglich jener Flächen durch denselben Punkt gehen, besteht aus

$$n_1 n_2 n_3 + \cdots + n_4 n_5 n_6 - 4(n_1 n_2 + \cdots + n_5 n_6)$$
$$+ 10(n_1 + \cdots + n_6) - 20$$

Punkten.

Die Kurve, welche den Ort der Berührungspunkte von Flächen zweier allgemeinen Büschel von den Ordnungen n_1, n_2 bildet, ist von der Ordnung (de Jonquières, *J. de Math.* (2) **7**, 411 (1862))

$$3(n_1^2 + n_2^2 + 2) + 4(n_1 n_2 - 2n_1 - 2n_2)$$

und dem Geschlecht

$$(n_1 + n_2 - 2)[5(n_1^2 + n_2^2 + n_1 n_2) - 4(4n_1 + 4n_2 - 3)] + 2n_1 n_2 - 1.$$

Die Fläche, welche den Ort der Berührungspunkte von Flächen eines Büschels von der Ordnung n mit Flächen eines Bündels von der Ordnung n' bildet, ist von der Ordnung $2n + 3n' - 4$.

Die Kurve, welche den Ort stationärer Berührung von Flächen eines Büschels von der Ordnung n mit Flächen eines Bündels von der Ordnung n' bildet, ist von der Ordung $4[3(n+n'-2)^2 - 1]$.

Mineo hat a. a. O. auch die Anzahl der Flächenpaare zweier allgemeinen Büschel angegeben, die eine doppelte Berührung oder stationäre Berührung haben. Lo Monaco-Aprile und Aguglia geben a. a. O. die Anzahl der Flächen eines Bündels an, die mit einer gegebenen F_n eine stationäre Berührung haben, Bischoff, *J. f. Math.* **61**, 369 (1863); Bäcklund, a. a. O., p. 39, 41; Severi, *Torino Atti* **37**, 643 (1902) außerdem die der Flächen, die mit F_n eine doppelte Berührung haben. Diese Formeln sind als besondere Fälle in anderen enthalten, die von Zeuthen herrühren und die wir in Kap. XXXII, § 1 noch behandeln werden.

§ 2. Kovariante Gebilde einer Grundfläche. Parabolische Kurve einer Fläche.

Wenn man voraussetzt, daß ein Flächengebüsch aus den ersten Polaren einer F_n besteht und für die das Gebüsch bestimmenden Flächengleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_4 = 0$ mithin annimmt

$$f_1 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad f_2 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad f_3 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_3},\quad f_4 = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_4},$$

so werden die Flächen J und S kovariante Gebilde der Grundfläche F_n, die durch $f = 0$ dargestellt wird. In diesem Falle heißt die Jacobische Fläche die Hessesche Fläche der Grundfläche. Sie ist auch der Ort der Punkte, deren quadratische Polaren Kegel sind, und der Ort der Spitzen dieser Kegel ist die Steinersche

Fläche S. Zwei entsprechende Punkte x, y der beiden Flächen genügen den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} y_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3} y_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_4} y_4 = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

aus denen durch Elimination der y_i oder x_i die Gleichungen der Hesseschen und der Steinerschen Fläche hervorgehen. Die erstere wird

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right| = 0.$$

Für $n = 3$ fallen die Hessesche und die Steinersche Fläche zusammen.

Die Ordnungen der beiden Flächen und andere auf sie bezügliche Zahlen hat Zeuthen, *Ann. di Mat.* (2) **4**, 331 (1871) abgeleitet, indem er die Charakteristikentheorie auf das System der quadratischen Polaren von F_n anwandte. Die Ordnung der Hesseschen Fläche war auf derselben Grundlage schon vorher bestimmt worden von Schubert, *Zschr. Math. Phys.* **15**, 126 (1870).

Die Gleichung der Hesseschen Fläche ist dann und nur dann unbestimmt, wenn F_n ein Kegel ist: Hesse, *J. f. Math.* **42**, 117 (1851), **56**, 263 (1859), *Abhdlgn.* S. 289, 481; vgl. auch Gordan und Noether, *Math. Ann.* **10**, 547 (1876).

In einem s-fachen Punkte A von F_n ($s < n$) hat die Hessesche Fläche wenigstens die Multiplizität $4s - 6$, und der Tangentialkegel zerfällt in den Kegel von der Ordnung s, der F_n in A berührt, und in einen Kegel von der Ordnung $3(s-2)$, welcher der Hessesche Kegel des vorhergehenden ist. Die Multiplizität der Hesseschen Fläche in A ist dann und nur dann größer, also mindestens $4s - 5$, wenn der Tangentialkegel von F_n in A in s Ebenen eines Büschels zerfällt. Insbesondere *ist eine s-fache Kurve von F_n wenigstens $(4s-5)$-fach für die Hessesche Fläche*, und s von den Tangentialebenen der Hesseschen Fläche in einem Punkte der Kurve fallen mit den s Ebenen zusammen, die dort F_n berühren, eine s-fache Gerade von F_n dagegen ist mindestens $(4s-4)$-fach für die Hessesche Fläche. Ein s-facher Punkt von F_n, für den der Tangentialkegel sich auf eine s-fach gezählte Ebene reduziert, ist $(4s-4)$-fach für die Hessesche Fläche. So ist ein uniplanarer Punkt und eine Kuspidallinie von F_n vierfach für die Hessesche Fläche.

Diese Eigenschaften fand Rohn, *Math. Ann.* **23**, 82 (1884); für die letzte, welche die Kuspidallinien betrifft, vgl. auch Cayley, *Quart. J.* **12**, 197 (1873), *Papers IX*, S. 93. Sätze über die Berührungen der Hesseschen Fläche mit den Tangenten von F_n in mehrfachen Punkten hat Segre gegeben, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **4**[2], 143 (1895).

Ist F_n eine *abwickelbare* Fläche mit der Rückkehrkante γ, so zerfällt ihre Hessesche Fläche in F_n selbst und eine andere Fläche von der Ordnung $3n - 8$, die Cayley die *Prohessiana* der gegebenen Fläche genannt hat: sie hat γ zur Rückkehrkurve und berührt F_n längs γ. Vgl. Cayley, *Quart. J.* **6**, 108 (1864), *Papers V*, S. 267; Salmon-Fiedler *II*, S. 278; Rohn, *Math. Ann.* **23**, 108 (1884). Die Gleichung der Prohessiana hat Cayley für die abwickelbaren Flächen der Ordnungen 4 und 5 und eine besondere Fläche 6. Ordnung berechnet.

Ist A ein parabolischer Punkt von F_n, so wird seine quadratische Polare ein Kegel, der die zugehörige stationäre Ebene berührt, wobei die Berührungslinie die einzige Haupttangente wird, die F_n in A besitzt; deshalb liegt A auf der Hesseschen Fläche. Umgekehrt ist ein einfacher Punkt von F_n, der auf der Hesseschen Fläche liegt, ein parabolischer Punkt von F_n. Der Ort dieser Punkte ist eine Kurve, welche die *parabolische Linie* von F_n heißt. Die Fläche F_n und ihre Hessesche Fläche schneiden sich in den mehrfachen Linien von F_n und der parabolischen Linie; *wenn daher die F_n keine mehrfachen Kurven hat, so ist ihre parabolische Linie von der Ordnung $4n(n-2)$*. Dieser Satz stammt von Hesse, *J. f. Math.* **28**, 104 (1844), *Abhdlgn.* S. 132.

Damit die Tangente der parabolischen Linie in einem für F_n einfachen Punkte A mit der Haupttangente von F_n in A zusammenfalle, ist notwendig und hinreichend, daß diese Haupttangente mit F_n in A eine wenigstens vierpunktige Berührung hat. Daraus folgt, daß, wenn eine Gerade g auf F_n liegt und keinen mehrfachen Punkt von F_n enthält, sie die parabolische Linie berührt, wo sie sie trifft, d. h. in $2(n-2)$ Punkten. Vgl. Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **4**, 255 (1849); Clebsch, *J. f. Math.* **58**, 106 (1861); Cremona, *Grundzüge*, S. 143. Hieraus und aus einem Satz, der in § 4 angeführt werden wird, hat Clebsch a. a. O. gefolgert, daß *eine nicht geradlinige F_n nicht mehr als $n(11n - 24)$ Gerade enthalten kann.* Vgl. auch Salmon-Fiedler *II*, S. 32 und 634. Für $n = 3$ wird die Grenze erreicht, für $n = 4$ ist die größte Anzahl von Geraden, die wirklich auf den bis jetzt bekannten Flächen enthalten sind, 64. Vgl. F. Schur, *Math. Ann.*

20, 254 (1882). Nicht geradlinige Flächen, die Gruppen von geraden Linien enthalten, wurden untersucht von Sturm, *Math. Ann.* **4**, 249 (1871); Affolter, ebenda **27**, 277 (1886), **29**, 1 (1887) und J. de Vries, *Arch. Teyler* (2) **8**, 235 (1902).

Wenn hingegen g durch mehrfache Punkte von F_n geht, aber selbst als Punktort aufgefaßt eine einfache Linie der Fläche ist, so trifft eine allgemeine Ebene π durch g die Fläche außerdem in einer Kurve von der Ordnung $n-1$, die g außer jenen mehrfachen Punkten in einer gewissen Anzahl h $(h < n-1)$ von einfachen Punkten der Fläche schneidet, die sich, wenn man π um g dreht, verändern und die Berührungspunkte von π mit F_n bilden. So ist g für die Fläche, wenn man sie als Achse eines Ebenenbüschels auffaßt, h-fach, und sie berührt die parabolische Linie in $2(h-1)$ einfachen Punkten von F_n.

Wenn eine Ebene die Fläche F_n in allen Punkten einer Linie berührt, so liegt diese auf der Hesseschen Fläche; ist die Linie gerade, so berühren sich F_n und die Hessesche Fläche längs dieser Geraden, deshalb löst diese sich zweimal von der parabolischen Linie ab: Cayley, *Phil. Trans.* **159**, 208 (1869), *Papers VI*, S. 336; Salmon-Fiedler *II*, S. 33. Eine Gerade von F_n, längs der sich die Tangentialebene nicht ändert, wurde von Cayley a. a. O., S. 205, *Papers VI*, p. 334, eine *Torsallinie* genannt.

Damit ein einfacher Punkt von F_n ein Doppelpunkt der parabolischen Linie wird, ist notwendig und hinreichend, daß für die Schnittkurve von F_n mit der Tangentialebene in dem Punkte dieser ein *symmetrischer Selbstberührungspunkt* (wie er sich für $a = 0$ aus der Gleichung in Bd. II¹ S. 274 oben ergibt) oder ein dreifacher Punkt ist. Vgl. Segre, *Rom. Accad. Linc. Rend.* (5) **6²**, 173 (1897), wo noch ein allgemeinerer Satz gegeben ist.

Das Verhalten der parabolischen Kurve in einem mehrfachen Punkte von F_n wurde für viele besondere Fälle untersucht von Zeuthen, *Math. Ann.* **9**, 321 (1876), **10**, 446 (1876); allgemein von Rohn, *Math. Ann.* **23**, 82 (1884), der fand, daß *in einem Punkte A, der für F_n s-fach ist, die parabolische Linie wenigstens die Multiplizität $s(4s-5)$ besitzt, die zugehörigen Tangenten werden gebildet von den $s(s+1)$ Haupttangenten von F_n in diesem Punkte und den $3s(s-2)$ Inflektionslinien des Tangentialkegels von F_n in A.*

Rohn hat auch die Zweige der parabolischen Linie, die durch A hindurchgehen, untersucht und gezeigt, daß, wenn der Tangentialkegel von F_n in A eine λ-fache Erzeugende besitzt, die diese berührenden Zweige der parabolischen Linie aus λ superlinearen Zweigen

von der Ordnung $\lambda + 1$ und $2\lambda - 4$ superlinearen Zweigen von der Ordnung λ bestehen. *Wenn der Tangentialkegel von F_n in A in s durch eine Gerade gehende Ebenen zerfällt, so hat der Punkt A für die parabolische Linie die Multiplizität $4s(s-1)$*. Es folgt daraus, daß *eine Linie (auch eine Gerade), die für F_n s-fach ist, sich wenigstens $4s(s-1)$-fach von der parabolischen Linie ablöst, eine Doppelkurve also mindestens achtmal.*

Ein uniplanarer Punkt ist für die parabolische Linie wenigstens zehnfach, eine Kuspidallinie löst sich wenigstens elffach von der parabolischen Linie ab.

In Verbindung mit der Polarentheorie sind viele Eigenschaften der Hesseschen Fläche H und der Steinerschen Fläche S einer allgemeinen F_n auf geometrischem Wege entwickelt worden von Cremona, *Grundzüge*, p. 137ff. und Bäcklund, *Svenska Vet. Akad. Handlingar* **9**² (1871), Nr. 9; auf algebraischem Wege von Clebsch, a. a. O. und Voß, *Math. Ann.* **27**, 357 (1886); dieser leitete sie ab aus den Eigenschaften zweier Flächen, die durch vier biquaternäre Gleichungen eindeutig aufeinander bezogen sind (vgl. hierüber auch Krey, *Math. Ann.* **18**, 82 (1881)).

Die Polarebene eines Punktes von H bezüglich F_n ist die Tangentialebene von S in dem entsprechenden Punkte.

Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 18 (1864) hat bewiesen, daß die Polarebene eines Punktes P von F_n bezüglich der Fläche H mit der Tangentialebene von F_n in P diejenige Gerade gemein hat, welche die Wendepunkte der Schnittkurve der Tangentialebene mit der kubischen Polarfläche von P enthält. Vgl. auch Salmon-Fiedler II, S. 416ff.; Bäcklund, a. a. O. S. 27.

Die Haupttangenten von F_n in den Punkten der parabolischen Kurve bilden eine abwickelbare Fläche, deren Tangentialebenen die stationären Ebenen von F_n sind und die der Fläche S umschrieben ist längs der Kurve von der Ordnung $6n(n-2)^2$, die in der Korrespondenz zwischen H und S der parabolischen Kurve von F_n entspricht (Cremona, *Grundzüge*, S. 144).

Die Hessesche Fläche H besitzt $10(n-2)^3$ Doppelpunkte; jedem von diesen entspricht auf S statt eines Punktes eine Gerade. Die quadratische Polare eines solchen Punktes P bezüglich F_n zerfällt in zwei Ebenen, die durch die entsprechende Gerade hindurchgehen, und die Polarebene von P berührt S in allen Punkten dieser Geraden. Diese $10(n-2)^3$ singulären Ebenen von S sind Pinch-Ebenen besonderer Art von S. Vgl. Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 196 (1861); Cremona, *Grundzüge*, S. 137—141; Bäcklund, a. a. O., p. 23 und 62.

Abgesehen von diesen $10(n-2)^3$ Geraden, die jede zweimal gezählt einen Teil der parabolische Kurve von S bilden, enthält S noch eine eigentliche parabolische Kurve P_S von der Ordnung $\sigma' = 6(n-2)^2(3n-7)$ und dem Rang

$$20(n-2)(10n^2-48n+57),$$

deren Punkte durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, daß jeder von ihnen auf der Tangentialebene von H in dem entsprechenden Punkte liegt (Voß).

Die wichtigsten anderen Zahlen für S werden in derselben Bezeichnung wie im folgenden Paragraphen:

$$\begin{aligned}
a &= 6(n-1)(n-2)^2,\\
n' &= 4(n-1)^2(n-2),\\
b &= 2(n-2)^2(n-3)(4n^3-20n^2+36n-45),\\
c &= 30(n-2)^2(n-3),\\
\sigma &= 10(n-1)(n-2)(3n-8),\\
c' &= 2(n-1)(n-2)(11n-24),\\
r &= 20(n-2)(6n^2-30n+37),\\
\beta &= 40(n-2)(6n^2-35n+50),\\
\varkappa &= 4(n-1)(n-2)(7n-18),\\
\varrho &= 4(n-1)(n-2)[6(n-2)^4-25n+64],\\
r' &= 4(n-2)(21n^2-94n+105),\\
\beta' &= 4(n-2)(31n^2-142n+162),\\
i &= \chi = j = 0,\quad j' = 10(n-2)^3.
\end{aligned}$$

Sie finden sich bei Voß a. a. O., n', b, c, c', σ', $\varkappa$ aber auch schon bei Bäcklund, a. a. O. S. 61ff.

Die Kurven von H, die der Doppelkurve und der Kuspidalkurve von S entsprechen, sind von den Ordnungen

$$4(n-2)(6n^4-48n^3+144n^2-217n+160),$$
$$10(n-2)(3n-8);$$

vgl. Bäcklund und Voß, a. d. a. O., S. 64 und S. 391.

Jede der $10(n-2)^3$ Geraden von S trifft P_S in drei (einfachen) Punkten, berührt die Kuspidalkurve R_S von S in drei Punkten und trifft die Doppelkurve von S in $4(n-2)^3-10$ einfachen Punkten dieser Kurve (Bäcklund, S. 63, Voß, S. 388 und S. 390).

Die Kurve P_S berührt R_S in $20(n-2)(n-3)(6n-13)$ einfachen Punkten dieser Kurve (Voß).

Voß, *Math. Ann.* **30**, 227 (1887), hat auch auf algebraischem Wege die Strahlenkongruenz der Ordnung $2(n-2)(2n^2-5n+4)$ und der Klasse $6(n-2)^2$ untersucht, welche die Verbindungslinien entsprechender Punkte von H und S bilden (für $n=3$ wird jedoch die Ordnung 7 und die Klasse 3, wie schon Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung*, Leipzig 1867, S. 139, 145, und Cremona, *Grundzüge*, S. 158f., gefunden haben), insbesondere hat Voß die Brennfläche der Kongruenz und das Verhalten in den Knotenpunkten von H untersucht und die Anzahlen der Singularitäten der Brennfläche sowohl direkt wie auch als besondere Fälle der gleichen Zahlen für die Brennfläche der Kongruenz, welche die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier durch vier biquaternäre Gleichungen eindeutig aufeinander bezogenen Flächen bilden, bestimmt. So findet sich für die Brennfläche die Ordnung

$$4(n-2)(9n^2-32n+27),$$

die Klasse

$$4(n-1)(n-2)(7n-17),$$

der Rang

$$4(n-2)(31n^2-135n+147),$$

und sie besitzt eine Rückkehrkurve von der Ordnung

$$4(n-2)(82n^2-367n+408).$$

Sie berührt weiter H längs der Kurve, längs welcher H auch von der Salmonschen Fläche Φ (§ 4) berührt wird, und S längs der Kurve, welche der parabolischen Kurve von F_n entspricht, außerdem geht sie durch die Knotenpunkte von H und durch die Rückkehrkurve von S hindurch.

§ 3. Theorie der Reziprokalflächen.

Es heißen *gewöhnlich* alle Singularitäten, welche eine durch eine allgemeine Punktgleichung dargestellte Fläche darbietet, und

ebenso die, welche eine durch eine allgemeine Tangentialgleichung dargestellte Fläche zeigt.

Zwischen den Anzahlen dieser Singularitäten bestehen Beziehungen, welche den Plückerschen Formeln für die ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 286) analog sind. Die Aufsuchung dieser Beziehungen, insbesondere des Einflusses, den die Singularitäten auf die Klasse der Fläche ausüben, bildet das sogenannte *Problem der Reziprokalflächen.* Es wurde insbesondere behandelt von Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **2**, 65 (1847), **4**, 188 (1849), welcher zuerst die Erniedrigung um 2, 3 und 6 Einheiten bestimmte, die ein gewöhnlicher konischer, biplanarer und uniplanarer Knotenpunkt in der Klasse der Fläche bewirkt, und später jene allgemeinen Beziehungen mitteilte in *Dublin Trans.* **23**, 461 (1859) (wiederholt im *Treatise on the analytic geometry of three dimensions*, 2. ed., Dublin 1865, p. 450) mit Ausnahme von einer Formel, die darauf von Cayley angegeben wurde: *Phil. Trans.* **159**, 201 (1869), **162**, 83 (1872), *Papers VI*, p. 329, 577, wobei die Theorie durch die Betrachtung einzelner außergewöhnlicher Singularitäten erweitert wird. Eine weitere Ausdehnung gab ihr Zeuthen, *Math. Ann.* **4**, 1, 633 (1871), der *Math. Ann.* **10**, 446 (1876) diese Untersuchungen wieder aufgegriffen und vervollständigt hat. Vgl. Salmon-Fiedler *II*, S. 649 ff., außerdem die Zusätze von Cayley zu der 4. Auflage (Dublin 1882, S. 592) der englischen Ausgabe der angeführten Salmonschen Werke (Cayley, *Papers VI*, S. 583), ferner Cayleys Bemerkungen *Papers VI*, S. 596—601.

Die Singularitäten, die Zeuthen den Flächen F von der Ordnung n zuschreibt, sind zunächst eine Doppellinie (Knotenlinie) N von der Ordnung b, dem Range q, der Klasse s, mit t (gewöhnlichen) dreifachen Punkten und γ (gewöhnlichen) Spitzen, und eine Kuspidallinie K von der Ordnung c, dem Range r, der Klasse m, mit β Spitzen.

Betrachten wir F als Punktort, so wird die Kurve N eine gewisse Anzahl j von Punkten enthalten, für welche die beiden Tangentialebenen von F zusammenfallen und die keine weiteren Besonderheiten zeigen. Ein solcher Punkt wurde von Cayley, *Quart. J.* **9**, 332 (1868), *Papers VI,* S. 123 als *pinch-point* (von Zeuthen als *point-pince*) bezeichnet. Die Gerade, die einen allgemeinen Punkt P mit einem pinch-point J verbindet, ist eine einfache Seitenlinie des aus P der Fläche F umschriebenen Kegels, oder mit anderen Worten, die pinch-points sind die Schnittpunkte von N mit der Berührungskurve eines beliebigen der Fläche umschriebenen Kegels. Es gibt deshalb in J unendlich viele Tangen-

tialebenen von F, und diese gehen alle durch eine Gerade hindurch, welche die *singuläre Tangente* in J heißt. Diese Gerade ebenso wie die Tangente von N in J, aber keine anderen Geraden, haben mit F in J vier zusammenfallende Schnittpunkte gemein. Eine allgemeine ebene Schnittkurve, die durch J geht, hat in J eine Spitze erster Art, der Schnitt mit einer Ebene durch die Tangente von N hat in J eine Spitze zweiter Art, der Schnitt mit der singulären Ebene einen dreifachen Punkt, der Schnitt mit einer allgemeinen Ebene durch die singuläre Tangente ein Selbstberührungspunkt, nur zwei besondere Ebenen durch die singuläre Tangente liefern eine Schnittkurve, die in J eine Spitze zweiter Art hat.

Die zu dem pinch-point duale Singularität ist die *pinch-plane* (*plan-pince*): sie berührt F längs einer Geraden (singulären Geraden) usw.

Ebenso enthält die Kuspidalkurve K eine gewisse Anzahl χ von sogenannten *Close-points* (*points-clos*), welche die Eigenschaft haben, daß in ihnen ein allgemeiner ebener Schnitt durch sie, statt wie die anderen Punkte von K eine gewöhnliche Spitze, einen Selbstberührungspunkt besitzt. Auch in einem Close-point A bilden die Tangentialebenen von F einen Büschel, dessen Achse wieder die *singuläre Tangente* in A heißt. Die durch sie und die Tangente von K in A bestimmte Ebene heißt die *singuläre Tangentialebene* und ist der Ort der in A an die beiden einander berührenden Zweige der verschiedenen ebenen Schnitte durch A gelegten Tangenten. Die Schnitte durch die singuläre Tangente und durch die Tangente von K in A haben in A Spitzen zweiter Art, der Schnitt mit der singulären Tangentialebene einen vierfachen Punkt. Eine einzige Ebene durch die singuläre Tangente liefert einen Schnitt, der in A einen *Schmiegungsknoten* hat.

Die dual entsprechende Singularität ist die *Close-plane* (*plan-clos*).

Zeuthen setzt außerdem voraus, daß F Doppelpunkte D mit einer einzigen (doppelten) Tangentialebene besitzt, die den Ort aller F bei D in vier zusammenfallenden Punkten treffenden Geraden bildet und im übrigen nur einen einzigen Berührungspunkt, nämlich D, besitzt. Er nennt dabei f und g die Anzahlen der Doppelpunkte von N und K, d und e die Anzahlen ihrer Spitzen und i die Anzahl der Schnittpunkte dieser Kurven, die in diese Punkte von F fallen. Diese singulären Punkte, die im allgemeinen *Selbstberührungspunkte* von F, d. h. Berührungspunkte zweier Mäntel der Fläche sind, untersuchte Zeuthen, *Math. Ann.* **9**, 321 (1876) und wies nach, daß die Tangentialebene in einem solchen

Punkte die dual entsprechenden Eigenschaften wie der Punkt selbst besitzt, daß somit die vorstehenden Zahlen f, g, d, e, i sich selbst dual entsprechen.

Zeuthen hat auch die Zweige der parabolischen Kurve und des Ortes der Berührungspunkte aller der doppelt berührenden Ebenen, die durch solche singulären Punkte hindurchgehen, untersucht, indem er u. a. bewies, daß in einem einfachen Schnittpunkt von N und K die Kurve K eine einfache Berührung mit der parabolischen Kurve hat, und daß in einem Doppelpunkte von K jeder der beiden Kurvenzweige mit der parabolischen Kurve eine Berührung 2. Ordnung besitzt.

Schließlich schreibt Zeuthen der Fläche B biplanare Punkte, U uniplanare Punkte, O Schmiegungsebenen (Kap. XXX, § 2) zu, eine gewisse Anzahl von konischen Punkten und die zu allen vorstehenden dual entsprechenden Singularitäten.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein: Indem wir den aus einem allgemeinen Punkte der Fläche umschriebenen Kegel betrachten, sei a die Ordnung dieses Kegels, δ die Anzahl seiner Doppellinien, $\varkappa$ die Anzahl seiner Rückkehrlinien. Außerdem seien k und h die Plückerschen Zahlen der Doppellinien eines Kegels, der N oder K projiziert. Was die konischen Punkte von F betrifft, so sollen die Tangenten in einem von ihnen einen Kegel von der Ordnung μ, der Klasse ν, mit $y + \eta$ Doppellinien, von denen y Zweige von N berühren, mit $z + \zeta$ Rückkehrlinien, von denen z Zweige von K berühren, mit u doppelt berührenden Ebenen und v stationären Tangentialebenen bilden. Wir nennen endlich ϱ und σ die Klassen der von den Tangentialebenen der Fläche F in den Punkten von N und K gebildeten abwickelbaren Flächen.

Durch dieselben mit Akzenten versehenen Buchstaben sollen die Anzahlen der dual entsprechenden Singularitäten bezeichnet werden. Setzen wir noch

$$\nu + 2\eta + 3\zeta = x$$

und nehmen an, daß die Zeichen Σ und Σ' Summen bezeichnen, die sich auf alle konischen Punkte und dual entsprechend auf alle längs einer Kurve berührenden Ebenen beziehen, so gelten die Formeln:

$$n(n-1) = a + 2b + 3c,$$

$$a(a-1) = n + 2\delta' + 3\varkappa',$$

$$
\begin{aligned}
c - \varkappa' &= 3(n - a),\\
b(b-1) &= q + 2k + 3\{\gamma + \Sigma'[\eta'(\nu' - 4) + 2\eta'\zeta'] + d\},\\
3(b-q) &= \gamma + d - s + \Sigma'[\eta'(\nu' - 4) + 2\eta'\zeta' - \zeta'],\\
c(c-1) &= r + 2h + 3(\beta + 2O' + e),\\
3(c-r) &= \beta + 2O' + e - m - \Sigma'\zeta',\\
a(n-2) &= \varkappa - B + \varrho + 2\sigma + \Sigma[x(\mu - 2) - \eta - 2\zeta],\\
b(n-2) &= \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t + 9O' + \Sigma[y(\mu - 2)],\\
c(n-2) &= 2\sigma + 4\beta + \gamma + 8\chi' + 16B' + 12O'\\
&\qquad + \Sigma[z(\mu - 2)],\\
a(n-2)(n-3) &= 2(\delta - 3U) + 3(ac - 3\sigma - \chi)\\
&\quad + 2(ab - 2\varrho - j) + \Sigma[x(-4\mu + 7) + 2\eta + 4\zeta],\\
b(n-2)(n-3) &= 4(k - 3t - f) + ab - 2\varrho - j\\
&\quad + 3(bc - 3\beta - 2\gamma - i) - 39O' + \Sigma[y(-4\mu + 8)]\\
&\quad - \Sigma'(4u' + 3v' + 8\zeta'v' + 6\eta'^2 + 4\eta'\zeta' + 12\zeta'^2\\
&\qquad + 6\eta' - 24\zeta'),\\
c(n-2)(n-3) &= 6(h - 6\chi' - 12B' - U' - g) + ac - 3\sigma - \chi\\
&\quad + 2(bc - 3\beta - 2\gamma - i) - 30O' + \Sigma[z(-4\mu + 9)]\\
&\quad - 2\Sigma'(v' + 4\eta' + 7\zeta'),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma + m - r - \beta - 4j' - 3\chi' - 14U' - \Sigma'(2\mu' + x' + 6\eta' + 7\zeta')\\
&= \sigma' + m' - r' - \beta' - 4j - 3\chi - 14U - \Sigma(2\mu + x + 6\eta + 7\zeta),
\end{aligned}
$$

außerdem die Formeln, die sich aus den vorstehenden ergeben, wenn man an alle Buchstaben (außer a, d, e, f, g, i) Akzente setzt und diese umgekehrt, wo sie stehen, wegläßt, wobei die erste und die letzte Formel ungeändert bleiben.

Die letzte Formel ist der Ausdruck für die Tatsache, daß die Punkte von K, für welche die Tangentialebene mit der Schmiegungsebene zusammenfällt und die deshalb die sämtlichen gemeinsamen Punkte von K und der parabolischen Kurve bilden, die Eigenschaften haben, die denen der zugehörigen Tangentialebenen dual entsprechen.

Mit den vorstehenden Zahlen läßt sich auch der Ausdruck für das *arithmetische Geschlecht (Flächengeschlecht)* der Fläche bilden. Nennen wir es p_a, so ergibt sich

$$24(p_a + 1) = c' - 12a + 24n + \beta + 3r - 15c + 2\sigma$$
$$+ 6\chi + 12\chi' + 8B + 24B' + 18U + 6U' + 6O'$$
$$+ 6g + 9e + \Sigma(3\nu + 3z + 8\eta + 13\zeta) + \Sigma'(6\zeta').$$

Vgl. Cayley, *Phil. Trans.* **159**, 227 (1869), *Math. Ann.* **3**, 526 (1871), *Papers VI*, p. 356, *VIII*, p. 394; Zeuthen, *Math. Ann.* **4**, 41 (1871), **10**, 545 (1876).

Die Eigenschaften der obigen singulären Punkte hat Zeuthen gefunden, indem er die umschriebenen Kegel untersuchte, deren Spitzen in den Punkten selbst oder in ihren Tangentialebenen oder auf den singulären Tangenten in ihnen liegen, und er hat so auch das Verhalten verschiedener Linien (wie der parabolischen Linie von F, der Rückkehrkante der von den stationären Tangentialebenen gebildeten abwickelbaren Fläche usw.) in diesen Punkten bestimmt.

Wenn die Spitze O des Kegels in einem gewöhnlichen oder singulären Punkt von F liegt, so setzt der umschriebene Kegel sich zusammen aus einem Teil, der die in O berührenden Tangenten enthält, und einem Restteil, der die anderswo berührenden Tangenten enthält. Dieser letzte Teil heißt der umschriebene *Restkegel*. Wir nennen a_1, n_1', δ_1, $\varkappa_1$, b_1', c_1' seine Plückerschen Charaktere, und wollen uns darauf beschränken, in verschiedenen Fällen die Werte von a_1, n_1', c_1' anzugeben, da man daraus δ_1, $\varkappa_1$, b_1' durch die Plückerschen Formeln ableiten kann.

Ist O ein gewöhnlicher Punkt von F, so löst sich die Tangentialebene zweimal von dem umschriebenen Kegel ab, und man hat

$$a_1 = a - 2,\ n_1' = n',\ c_1' = c'.$$

Ist O ein gewöhnlicher Punkt von N, so hat man

$$a_1 = a - 4,\ n_1' = n',\ c_1' = c'.$$

Ist O einer der t dreifachen Punkte von N, so hat man

$$a_1 = a - 6,\ n_1' = n',\ c_1' = c'.$$

Ist O ein gewöhnlicher Punkt von K, so hat man

$$a_1 = a - 3,\ n_1' = n',\ c_1' = c' + 1.$$

Ist O eine der γ Spitzen von N, so hat man

$$a_1 = a - 5,\ n_1' = n',\ c_1' = c' + 1.$$

Ist O ein Pinch-point, so hat man

$$a_1 = a - 4,\ n_1' = n' - 2,\ c_1' = c' - 6.$$

Liegt O auf der singulären Tangente in einem pinch-point, so hat man

$$a_1 = a,\ n_1' = n' - 1,\ c_1' = c' - 4.$$

Ist O ein Close-point, so hat man

$$a_1 = a - 5,\ n_1' = n' - 2,\ c_1' = c' - 11.$$

Liegt O auf der Tangente in einem close-point:

$$a_1 = a,\ n_1' = n' - 1,\ c_1' = c' - 6.$$

Ist O einer der B biplanaren Punkte:

$$a_1 = a - 6,\ n_1' = n' - 3,\ c_1' = c' - 16.$$

Liegt O auf der singulären Tangente in einem biplanaren Punkte:

$$a_1 = a,\ n_1' = n' - 1,\ c_1' = c' - 8.$$

Ist O einer der U uniplanaren Punkte:

$$a - 6,\ n_1' \quad\quad 6,\ c_1' = c' - 24.$$

Liegt O auf der singulären Tangente in einem uniplanaren Punkte:

$$a_1 = a,\ n_1' = n' - 1,\ c_1' = c' - 6.$$

Ist O der Berührungspunkt einer Schmiegungsebene:

$$a_1 = a - 3,\ n_1' = n',\ c_1' = c' - 3.$$

Ist O ein konischer Punkt:

$$a_1 = a - 2\mu - x,\ n_1' = n' - 2\nu - 3\eta - 4\zeta,$$
$$c_1' = c' - 2v - 3(2\mu + x) - 10\eta - 12\zeta.$$

Für eine *allgemeine Fläche F* von der Ordnung n liefern die vorstehenden Formeln, wenn wir nennen: n' die Klasse, a die Ordnung eines umschriebenen Kegels, δ die Anzahl seiner Doppel-

linien (d. h. die Anzahl der von einem Punkte des Raumes ausgehenden Doppeltangenten von F), $\varkappa$ die Anzahl seiner Rückkehrkanten (die Anzahl der von einem Punkte ausgehenden Haupttangenten), a' die Klasse einer ebenen Schnittkurve von F, δ' die Anzahl ihrer Doppeltangenten, $\varkappa'$ die Anzahl ihrer Wendetangenten, b' die Klasse der von den doppelt berührenden Ebenen gebildeten abwickelbaren Fläche, q' ihren Rang, γ' die Anzahl ihrer stationären Tangentialebene, ϱ' die Ordnung ihrer Berührungskurve mit F, t' die Anzahl ihrer dreifach berührenden Ebenen, s' die Ordnung ihrer Rückkehrkante, k' die Plückersche Anzahl der Doppeltangenten einer ebenen Schnittkurve derselben abwickelbaren Fläche, c' die Klasse der von den stationären Tangentialebenen gebildeten abwickelbaren Fläche, r' ihren Rang, β' die Anzahl ihrer stationären Tangentialebenen, σ' die Ordnung ihrer Berührungskurve mit F, d. h. der parabolischen Kurve von F, m' die Ordnung ihrer Rückkehrkante, h' die Plückersche Anzahl der Doppeltangenten einer ebenen Schnittkurve derselben abwickelbaren Fläche, folgende Werte:

$$a = a' = n(n-1),$$

$$n' = n(n-1)^2,$$

$$\delta = \tfrac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

$$\varkappa = n(n-1)(n-2),$$

$$\delta' = \tfrac{1}{2} n(n-2)(n^2-9),$$

$$\varkappa' = 3n(n-2),$$

$$b' = \tfrac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

$$q' = n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4),$$

$$s' = \tfrac{1}{2} n(n-2)(5n^4-12n^3+12n^2-221n+348),$$

$$k' = \tfrac{1}{8} n(n-2)(n^{10}-6n^9+16n^8-54n^7+164n^6-288n^5 + 547n^4-1058n^3+1068n^2-1214n+1464),$$

$$\gamma' = 4n(n-2)(n-3)(n^3+3n-16),$$

$$\varrho' = n(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

$$t' = \tfrac{1}{6} n(n-2)(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-111n^2 + 548n-960),$$

$$c' = 4n(n-1)(n-2),$$
$$r' = 2n(n-2)(3n-4),$$
$$m' = 4n(n-2)(7n-15),$$
$$h' = \tfrac{1}{2}n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156),$$
$$\beta' = 2n(n-2)(11n-24),$$
$$\sigma' = 4n(n-2),$$

endlich

$$p_a = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3).$$

Außer in der angeführten Arbeit von Salmon, *Dublin Trans.* **23**, 461 (1859), wurden die Werte a, n', δ, b', γ', c', r', β' angegeben von Schläfli, *Quart. J.* **2**, 62 (1858); die von b', t', β', γ' von de Jonquières, *Nouv. Ann.* (2) **3**, 5 (1864). Was die Anzahlen bezüglich der von den doppeltberührenden Ebenen gebildeten abwickelbaren Fläche betrifft, vgl. auch Bischoff, *J. f. Math.* **57**, 278 (1859).

Verschiedene Untersuchungen über die mehrfachen Punkte und Linien einer Fläche lieferte Basset, *Quart. J.* **38**, 63, 159 (1907), **39**, 1, 250, 334 (1908), **40**, 210 (1909), **41**, 21 (1910), *Rend. Circ. Mat.* **26**, 329 (1908), vgl. auch *A treatise on the Geometry of surfaces*, Cambridge 1910.

§ 4. Gerade Linien und Kegelschnitte, die eine Fläche berühren.

Die Berührung von geraden Linien mit einer allgemeinen F_n wurde, besonders nach der abzählenden Seite hin, auf algebraischem Wege behandelt von Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **4**, 258 (1849), *Quart J.* **1**, 329 (1857), der die Ordnung des Ortes vierpunktiger Berührung und die Anzahlen für die drei-zweipunktigen und dreifachen Tangenten bestimmte. Mit den vierpunktigen Tangenten beschäftigte sich darauf Clebsch, *J. f. Math.* **58**, 93 (1861), **63**, 14 (1864), dessen (algebraische) Methode bei Salmon-Fiedler II, S. 622 wiedergegeben ist. Viele der im vorstehenden angegebenen Zahlen wurden auf geometrischem Wege von Sturm, *J. f. Math.* **72**, 350 (1870) abgeleitet. Diese und alle anderen abzählerischen Aufgaben über die Tangentensingularitäten hat in einheitlicher Weise gelöst Schubert, *Math.*

Ann. **11**, 347 (1877), einiges schon vorher *Math. Ann.* **10**, 98 (1876), alles zusammen vereinigt in Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig 1879, S. 228; vgl. auch die Besprechung von Cayley, *Quart. J.* **17**, 244 (1881), *Papers XI*, p. 281; J. de Vries, *Amsterdam Verslagen* **13**, 753 (1905), **14**, 50 (1905); Basset, *Quart. J.* **42**, 225 (1911).

Es gibt $5n(n-4)(7n-12)$ Tangenten mit fünfpunktiger Berührung (Schubert).

Die vierpunktigen Tangenten bilden eine Regelfläche vom Grade $2n(n-3)(3n-2)$ *und ihre Berührungspunkte eine Kurve* γ *von der Ordnung* $n(11n-24)$, *welche der Schnitt von* F_n *mit einer Fläche* Φ *von der Ordnung* $11n-24$ *ist* (Salmonscher Satz). Von dieser Fläche gab Salmon, *Quart. J.* **1**, 336 (1857) und darauf in übersichtlicher Form Clebsch a. a. O. und ohne Beweis Salmon, *Phil. Trans.* **150**, 239 (1860) die Gleichung an, auf kürzerem Wege erhielt dieselbe Gleichung mit Hilfe der symbolischen Bezeichnung Gordan, *Zschr. Math. Phys.* **12**, 495 (1867). *Die Kurve* γ *berührt die parabolische Kurve von* F_n, *wo sie sie trifft, nämlich in den* $2n(n-2)(11n-24)$ *parabolischen Punkten von* F_n, *die vierpunktige Haupttangenten besitzen* (Clebsch).

Die Fläche Φ, welche dreifache Punkte in den $10(n-2)^3$ Doppelpunkten der Hesseschen Fläche H von F_n besitzt (§ 2) und außerdem noch $\beta' = 4(n-2)(31n^2-142n+162)$ Doppelpunkte in einfachen Punkten von H (Voss, *Math. Ann.* **27**, 395 (1886)), berührt H längs einer Kurve von der Ordnung

$$2(n-2)(11n-24),$$

dies ist die Kurve, die in der Korrespondenz zwischen der Hesseschen Fläche H und der Steinerschen Fläche S der parabolischen Kurve P_S von S entspricht (Voss, a. a. O. S. 388).

Es gibt

$$2n(n-4)(n-5)(n+6)(3n-5)$$

vierpunktige Tangenten, die F_n noch anderswo berühren,

$$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n^3+3n^2+29n-60)$$

Tangenten, die in zwei Punkten eine dreifache Berührung haben,

$$\tfrac{1}{2}n(n-4)(n-5)(n-6)(n^3+9n^2+20n-60)$$

Tangenten, die eine dreipunktige und zwei zweipunktige Berührungen haben,

$$\tfrac{1}{12}n(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n^3+6n^2+7n-30)$$

vierfache Tangenten.

Die dreifach berührenden Geraden bilden eine Regelfläche vom Grade $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2)$, und ihre Berührungspunkte eine Kurve von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12).$$

Die oben angeführte Kurve γ besitzt Doppelpunkte in den Punkten von F_n, in denen beide Haupttangenten mit F_n eine vierpunktige Berührung haben, die Anzahl dieser Punkte, die von Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 261 (1864) nicht richtig angegeben war, wurde gefunden von Schubert, *Math. Ann.* **11**, 347 (1877), *Kalkül,* S. 246, sie ist

$$5n(7n^2-28n+30).$$

Krey, *Math. Ann.* **15**, 211 (1879) hat die Reduktionen angegeben, die man in den Schubertschen Formeln anbringen muß, wenn man die Fläche F_n mit gewöhnlichen Singularitäten behaftet (§ 3) voraussetzt. Das Resultat, daß die Ordnung $n(11n-24)$ der Kurve γ sich um $22b$ und $27c$ Einheiten durch eine Doppelkurve von der Ordnung b und eine Kuspidalkurve von der Ordnung c verringert, war schon durch Induktion gefunden worden von Cayley, *Phil. Trans.* **159**, 213 (1869), *Papers VI*, p. 342, und bewiesen von Voss, *Math. Ann.* **9**, 483 (1876).

Mit analogen Untersuchungen über berührende *Kegelschnitte* hat sich nur Bottasso, *Ann. di Mat.* (3) **8**, 233 (1903) beschäftigt, indem er die Anzahlen der Kegelschnitte bestimmte, die mehrere gegebene allgemeine Flächen in zwei Punkten berühren.

§ 5. Zusammensetzung der singulären Punkte und Linien einer Fläche.

Jede algebraische Fläche F, die von mehrfachen Bestandteilen frei ist, läßt sich birational auf eine andere Fläche Φ beziehen, die keine anderen Singularitäten besitzt als eine Knotenlinie, auf dieser eine endliche Anzahl von Punkten, die für die Linie einfach und für Φ gewöhnliche uniplanare Punkte sind (d. h. gewöhnliche Spitzen für die durch sie hindurchgehenden allgemeinen ebenen Schnittkurven),

und außerdem eine endliche Anzahl von Punkten, die für die Kurve dreifache Punkte mit verschiedenen und nicht in einer Ebene liegenden Tangenten sind und auch für Φ dreifach und triplanar sind. Diese Beziehung läßt sich auch so herstellen, daß den singulären Punkten von F auf Φ nur einfache Punkte entsprechen, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von allgemeinen Punkten auf mehrfachen Linien von F und einer endlichen Anzahl von Richtungen, die von den isolierten mehrfachen Punkten (oder von den Punkten der mehrfachen Linien, die eine größere Singularität besitzen) ausgehen; diesen Punkten und Richtungen können allgemeine Punkte der Knotenlinie von Φ entsprechen.

Zum genaueren Verständnis des Wortes *allgemein* bei diesen Ausnahmen muß man hinzufügen, daß die genannten Punkte und Richtungen an sich keinen Ausnahmecharakter besitzen, indem man es so einrichten kann, daß unter den Ausnahmepunkten nicht die Punkte einer willkürlich auf den mehrfachen Linien von *F* festgelegten endlichen Punktgruppe enthalten sind und daß unter den Ausnahmerichtungen sich nicht eine ebenfalls willkürlich festgelegte endliche Gruppe von Richtungen, die von den mehrfachen Punkten von *F* ausgehen, befindet.

Der vorstehende Satz erscheint als die natürliche Erweiterung des Satzes in Bd. II^1, S. 291 über die ebenen Kurven und wurde zum erstenmal direkt ausgesprochen von Noether, *Berl. Sitzungsber.* 1888, S. 123, unmittelbar darauf von del Pezzo, *Rend. Circ. Mat.* **2**, 139 (1888), **3**, 236 (1889), **6**, 139 (1892), wenn auch mit nicht ganz vollständigen Beweisen (man vgl. die Bemerkungen von Segre; *Ann. di Mat.* (2) **25**, 36 (1897) und die daraufhin zwischen Segre und del Pezzo entstandene Polemik: Segre, *Torino Atti* **32**, 521, 781; **33**, 19 (1897); del Pezzo, *Atti Acc. Pontaniana* (2) **2**, Nr. 4 u. 10 (1897)). Andere Beiträge zur sicheren Begründung des Satzes verdankt man Segre, a. a. O. und Picard und Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes I*, Paris 1897, p. 71 (den dort gegebenen Beweis haben die Verfasser selbst im II. Bande, 1906, p. 523 für unvollständig erklärt), ferner B. Levi, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 219 (1897). Schließlich wurde ein vollständiger Beweis gegeben von B. Levi, *Torino Atti* **33**, 66 (1897), *C. R.* **134**, 222 (1902).

Es ist noch zu bemerken, daß der Satz gleichbedeutend ist mit dem anderen: *F läßt sich immer birational auf eine Fläche in einem linearen Raum von d Dimensionen* ($d \geqq 5$) *ohne mehr-*

fache Punkte beziehen, und zwar so, daß von dieser Fläche im Überraum die Fläche F selbst eine Projektion ist.

Aus dem Satze folgt, daß *die Umgebung eines beliebigen Punktes der Fläche F sich analytisch darstellen läßt, indem man die Koordinaten x, y, z ihrer Punkte durch eine endliche Anzahl von Systemen von Potenzreihen ebenso vieler Variablenpaare ausdrückt (wobei immer ein bestimmtes System von Potenzreihen für einen bestimmten Teil der Umgebung des betrachteten Punktes gilt), derart, daß die Variabeln selbst rationale Funktionen von den Koordinaten der genannten Punkte, d. h. Funktionen des durch die Fläche F bestimmten algebraischen Körpers sind.*

Für diese Reihendarstellung hat einen analytischen Beweis gegeben Black, *Amer. Acad. Proc.* **37**, 281 (1902). Über den gleichen Gegenstand s. auch Kobb, *J. de Math.* (4) **8**, 385 (1892), *Bull. Soc. M.* **21**, 76 (1893) (und die Kritik von Black, a. a. O.; B. Levi, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 219 (1897)); Geck, *Diss.* Tübingen 1900; H. W. E. Jung, *J. f. Math.* **133**, 289 (1908).

Der Satz selbst erlaubt auch weiter auszusprechen, daß *die ganze Fläche F sich darstellen läßt, indem man die Koordinaten x, y, z ihrer Punkte durch eine endliche Anzahl von Potenzreihen ebenso vieler Parameterpaare ausdrückt, die wie oben rationale Funktionen der Koordinaten x, y, z selbst sind.*

Hensel, *Acta Math.* **23**, 339 (1900), *Math.-Ver.* **8**, 221 (1900) hat gezeigt, daß man die ganze durch die Gleichung von F

$$f(x, y, z) = 0$$

dargestellte Funktion z durch eine endliche Anzahl von gebrochenen Potenzreihen von der Form

$$z = e_0(\xi) + e_1(\xi)\,\eta^{\frac{1}{b}} + e_2(\xi)\,\eta^{\frac{2}{b}} + \cdots,$$

wo $\xi = (x - \alpha_0)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\eta = y - y_0(\xi)$, $\alpha_0 =$ const. und $y_0(\xi)$, $e_0(\xi), \cdots$ ganze Potenzreihen von ξ sind, darstellen kann, indem man zu dem Zweck auf Reihen zurückgreift, welche die einzelnen Mäntel der Fläche darstellen, die von einer endlichen Anzahl auf der Fläche selbst gezogener Kurven (darunter notwendigerweise auch die Verzweigungskurven von F) ausgehen. Mit solchen Entwicklungen hatte sich schon Halphen, *Ann. di Mat.* (2) **9**, 68 (1878) beschäftigt. Diese Reihen können aber in einer endlichen Anzahl von Punkten divergieren, deren Umgebung trotzdem in gleicher Weise, wenn auch mit einer gewissen Irregularität, durch sie dargestellt

wird. Vgl. B. Levi, *C. R.* **134**, 642 (1902); H. W. E. Jung, a. a. O. Über das Vorstehende vgl. auch Jung, *Math.-Ver.* **18**, 267 (1909).

Wölffing, *Diss.* Dresden 1896, *Zschr. Math. Phys.* **42**, 14 (1897), hat auf die Flächen den Begriff des *Newtonschen Polygons* ausgedehnt und es angewendet, um die durch Reihenentwicklungen gegebene Darstellung der Schnittkurve zweier Flächen und die Konstruktion der „Näherungsflächen" zu erhalten. Vgl. auch Pilgrim, *Math. naturw. Mitt.* (2) **7**, 19 (1905). Ebenfalls durch eine Erweiterung des Newtonschen Polygons hat Dumas, *C. R.* **152**, 682 (1911), **154**, 1495 (1912) ein Element der Fläche in der Nachbarschaft eines singulären Punktes dargestellt.

Die Zusammensetzung eines singulären Punktes A einer algebraischen Fläche F von der Ordnung n läßt sich auf analytischem Wege entweder direkt durch Betrachtung der sukzessiven Differentiale der Koordinaten oder durch die genannten Entwicklungen nach Potenzreihen untersuchen. Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 446 (1876) und Rohn, *Math. Ann.* **22**, 124 (1883), *Leipzig. Ber.* **36**, 1 (1884) greifen auch auf die Betrachtung des der Fläche von einem Punkte aus umschriebenen Kegels zurück, indem sie die in ihm durch A hervorgerufene Singularität untersuchen.

Noether, *Gött. Nachr.* 1871, S. 267, *Math. Ann.* **29**, 356 (1887), **33**, 551 (1889) und in systematischerer Weise Segre, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 1 (1897) lösen die Singularität auf durch Anwendung birationaler (Cremonascher) Transformationen des Raumes, insbesondere durch eine Folge von quadratischen Transformationen. Ist A für F s-fach, so wende man z. B. eine quadratische Transformation an, die zu Grundelementen im ersten Raume den Punkt A und einen (eigentlichen oder zerfallenden) Kegelschnitt γ hat, der nicht durch A geht und in einer Ebene ω liegt. Es seien O' der Punkt und γ' der Kegelschnitt, welche die Grundelemente im zweiten Raum bilden, und ω' die Ebene von γ'. Bei der Transformation entsprechen den zu A in den verschiedenen Richtungen unendlich benachbarten Punkten des ersten Raumes die Punkte von ω' in kollinearer Weise, so daß auf der Fläche F' von der Ordnung $2n - s$, die F entspricht, dem Punkte A eine ganze Linie a', die in ω' liegt und dem Tangentialkegel $\varDelta$ von F in A kollinear verwandt ist, entsprechen wird. Man kann demnach sagen, daß, wenn g eine beliebige Seitenlinie des Kegels $\varDelta$ und A' der ihr entsprechende Punkt von a' ist, der Punkt A' von F dem Punkte von F entspricht, der zu A auf g unendlich benachbart ist. Wenn man, wie es erlaubt ist, voraussetzt, daß g den Kegelschnitt γ

nicht trifft, so daß A' nicht auf γ' liegt, und s' die Multiplizität von A' für F' nennt, so kann man sagen, daß s' die Multiplizität des zu A in der Richtung g unendlich benachbarten Punktes von F ist. Man findet $s' \leqq s$ und $s' = s$ nur dann, wenn $\varDelta$ in s (verschiedene oder nicht verschiedene) Ebenen durch g zerfällt.

Für jeden der irreduzibeln Bestandteile von $\varDelta$ (d. h. für jede der Kurven, aus denen sich die Kurve a' zusammensetzt), finden wir einen Wert von s', der einer allgemeinen Lage der Seitenlinie g von $\varDelta$ entspricht (dies ist dann die Multiplizität des entsprechenden Bestandteils der Kurve a' auf F'), und können noch andere Werte von s' finden, die größer sind und besonderen Lagen von g entsprechen. Insgesamt haben wir eine endliche Anzahl Werte von s', von denen einige zu unendlich vielen Tangenten g, andere zu einzelnen besonderen Tangenten gehören. Wir sagen, daß *die zu A unendlich benachbarten Punkte von F eine oder mehrere irreduzible infinitesimale, zu A unendlich benachbarte Linien bilden, von denselben Ordnungen und mit denselben Multiplizitäten, wie sie für F' die einzelnen irreduzibeln Bestandteile von a' besitzen.* Auf einer beliebigen von diesen Linien muß man den allgemeinen Punkten dieselbe Singularität zuschreiben, aber es können auf ihr auch Ausnahmepunkte von einer größeren Singularität liegen, die entweder in einer Erhöhung der Multiplizität oder in einer Besonderheit der zu den Punkten gehörenden infinitesimalen Umgebung bestehen kann, z. B. in dem Zusammenfallen von Tangentialebenen, die für einen allgemeinen Punkt der Linie verschieden sind.

Wendet man eine neue quadratische Transformation an, von der A' ein Fundamentalpunkt ist, und fährt so fort, so *gelangt man dazu, den Punkt A von F als zusammengesetzt anzusehen aus einem s-fachen Punkte und diesem in den von A ausgehenden Richtungen unendlich benachbarten Punkten mit den Multiplizitäten*

$$s_1', s_2', \ldots,$$

die eine oder mehrere infinitesimale Linien bilden und von denen jeder wieder unendlich benachbarte Punkte von den Multiplizitäten s_{i1}'', s_{i2}'', ... besitzt, die aufs neue eine oder mehrere infinitesimale Linien bilden und denen Punkte mit den Multiplizitäten

$$s_{ik1}''', s_{ik2}''', \ldots$$

folgen, usw.

Die Zahlen s, s_i', s_{ik}'', s_{ikl}''', ... heißen nach Segre die *Kompositionscharaktere* des Punktes A von F. In bezug auf sie bieten sich nun zwei grundlegende Fragen dar:

1. Es ist kurz vorher gesagt worden, daß zur Auflösung eines mehrfachen Punktes die Fläche F einer Folge von Cremonaschen, z. B. quadratischen, Transformationen unterworfen werden sollte. Es entsteht dann naturgemäß die Frage, ob die erhaltenen Kompositionscharaktere dieselben bleiben für einen gegebenen Punkt einer gegebenen Fläche, gleichgültig wie die Folge der Cremonaschen Transformationen (insbesondere der quadratischen Transformationen), von denen der aufzulösende singuläre Punkte einen Fundamentalpunkt bildet, gewählt wird.

2. Ist für jeden mehrfachen Punkt die Folge der mehrfachen Punkte, die ihn zusammensetzen, immer endlich, d. h. ist die Zahl seiner von 1 verschiedenen Kompositionscharaktere endlich?

Die beiden Probleme stehen miteinander in Zusammenhang; fast alle Autoren, die sich mit dem zweiten Problem beschäftigt haben, wurden dazu geführt, sich nicht allein auf die quadratischen Transformationen zu beschränken.

Auf die erste Frage lautet die Antwort bejahend, wenn die verwendeten Cremonaschen Transformationen immer die aufzulösenden singulären Punkte zu isolierten Fundamentalpunkten besitzen und außerdem die Grundelemente der Transformation, die durch sie hindurchgehen, in ihnen eine allgemeine Lage bezüglich der Fläche F haben. Die Multiplizitäten der sukzessiven transformierten Punkte würden aber nicht mehr dieselben sein, wenn man, statt in die aufzulösenden Punkte isolierte Fundamentalpunkte zu legen, durch sie Fundamentallinien der Transformation hindurchgehen ließe, indessen hängen auch in diesem Falle die neuen Multiplizitäten nicht von der besonderen verwendeten Transformation ab, sondern nur von dem Verhalten der Fundamentallinien und der durch diese gehenden Fundamentalflächen bezüglich der infinitesimalen Elemente von F. Vgl. B. Levi, *Torino Atti* **33**, 66 (1897), **35**, 20 (1899).

Mit der zweiten Frage hat sich zuerst Kobb, *J. de Math.* (4) **8**, 385 (1892) befaßt und darauf mit größerer Exaktheit B. Levi, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 219 (1897), (3) **2**, 127 (1899), der bewiesen hat, daß, *wenn A für die Fläche F ein s-facher Punkt ist und A', A'', A''', . . . auf ihn folgende unendlich benachbarte Punkte von F und alle diese s-fach sind, diese Folge von Punkten sicher endlich ist, wenn die Punkte A', A'', . . . so gewählt sind, daß man, von einem derselben ausgehend, niemals einen unter ihnen findet, der einer endlichen oder infinitesimalen s-fachen Linie von F angehört, welche durch den vorhergehenden Punkt hindurchgeht. Hingegen kann die Folge unbegrenzt sein, wenn diese Bedingung*

nicht erfüllt ist, auch wenn man den Fall ausschließt, wo die Punkte A', A'', ... von einem bestimmten ab einander auf derselben endlichen oder infinitesimalen s-fachen Linie von F folgen.

Diese Tatsache hat zur Folge, daß sich die Auflösung der Singularitäten, die zu den im Anfang ausgesprochenen Sätzen führt, nicht mit quadratischen Transformationen allein ausführen läßt, sondern man muß zu diesen auch andere Transformationen hinzufügen, deren Fundamentallinien in die endlichen oder infinitesimalen singulären Linien von F zu legen sind. Zu diesem Zweck wurden häufig monoidale Transformationen verwendet (del Pezzo, B. Levi, vgl. auch Noether, Segre a. d. a. O.).

Wie bei den ebenen Kurven genügen die Charaktere

$$s, s_i', s_{ik}'', \ldots$$

nicht, um alle Singularitäten zu charakterisieren. Sie genügen indessen z. B., um die Multiplizität des Schnittes von F mit einer algebraischen Kurve in A auszudrücken (Segre a. a. O.). Diese Multiplizität wird nämlich die Summe der Multiplizitäten des Schnittes von F mit den durch A gehenden Zweigen der Kurve. Hat ein vollständiger Zweig mit der Fläche außer dem Punkte A die sukzessiven Punkte A', A'', ... gemein und sind die Multiplizitäten des Zweiges und der Fläche in A, A', A'', ... der Reihe nach ν und s, ν' und s_i', ν'' und s_{ik}'', ..., so wird die gesuchte Multiplizität des Schnittes

$$\nu s + \nu' s_i' + \nu'' s_{ik}'' + \cdots,$$

wobei man indes zu beachten hat, daß man zu den Charakteren ν und s eventuell auch Charaktere rechnen muß, die zum Wert die Einheit haben, also nicht mehr zu mehrfachen Punkten gehören, sondern zu einfachen Punkten der Umgebung von A, die eventuell dem Zweig und der Fläche gemeinsam sind.

Damit die Fläche F mit der Gleichung

$$f_s(x, y, z) + f_{s+1}(x, y, z) + \qquad 0,$$

wo f_i eine Form von der Ordnung i in x, y, z bedeutet, in unendlicher Nachbarschaft des Ursprungs (der s-fach ist) einen s'-fachen Punkt in der Richtung der z-Achse besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß in den Formen $f_s, f_{s+1}, \ldots f_{s+s'-1}$ alle Glieder x und y zusammen wenigstens der Reihe nach zu den Ordnungen $s', s'-1, \cdots 1$ enthalten.

Dem Ursprung ist eine (infinitesimale) Doppellinie von der Ordnung h benachbart, wenn f_s und f_{s+1} von der Form sind

$$f_s = \alpha_h^2 \varphi_{s-2h}, \quad f_{s+1} = \alpha_h \varphi_{s-h+1},$$

wo α_h, φ_i Formen von x, y, z, deren Ordnungen den Indizes gleich sind, bedeuten. Die Fläche enthält dann im allgemeinen in unendlicher Nachbarschaft von $2h(s-h+1)$ Punkten der genannten Linie noch ebensoviel Doppelpunkte (Segre, a. a. O., p. 13—16).

In diesem letzten Satz hat man ein erstes Beispiel für die bemerkenswerte Tatsache (für die es bei den Kurven kein Analogon gibt), daß die sukzessiven Charaktere, welche die Zusammensetzung eines singulären Punktes einer Fläche liefern, nicht voneinander unabhängig sind, sondern eine gegebene Zusammensetzung für einen allgemeinen Zweig einer auf der Fläche gezogenen Kurve eine andere kompliziertere Zusammensetzung längs besonderer Zweige zur Folge haben kann. In dem angeführten Beispiel hat F längs eines allgemeinen vom Ursprung ausgehenden Zweiges die Zusammensetzung $s, 2, 1$ und längs singulärer Zweige, deren Existenz in jedem Fall festzustellen ist, die Zusammensetzung $s, 2, 2$. Diese Verhältnisse wurden vollständig untersucht für die Doppelpunkte, worauf wir noch zu sprechen kommen.

B. Levi, *Ann. di Mat.* (3) **2**, 137 (1899) hat eine analoge Tatsache für die allgemeinen Punkte der mehrfachen Linien angegeben. Wenn z. B. A ein allgemeiner Punkt einer s-fachen Linie ist, dem eine einfache (infinitesimale) Gerade unendlich benachbart ist, wodurch längs eines allgemeinen Zweiges durch A die Zusammensetzung $s, 1$ wird, und wenn A' der auf A folgende Punkt der s-fachen Linie ist, so wird A' offenbar s-fach, aber außer ihm ist eine infinitesimale Doppelgerade unendlich benachbart, auf welcher ein Punkt dreifach ist, sobald $s > 2$, während, wenn $s = 2$, einem Punkte der Geraden noch ein Doppelpunkt unendlich benachbart ist (die Zweige durch A, auf denen diese sukzessiven Punkte von größerer Singularität liegen, sind von der zweiten Ordnung).

Die Zusammensetzung der Doppelpunkte wurde untersucht von Segre, a. a. O., B. Levi, *Torino Atti* **40**, 139 (1904); Geck, *Math. naturw. Mitt.* (2) **6**, 65 (1904), **7**, 1 (1905); Pfeiffer, *Atti del IV. Congresso intern. dei Matematici* (Roma 1908) *II*, 309 (1909), *Bull. de l'Univ. de Kief* 1909, p. 1, *Recueil Mathém. de Moscou* **27**, 228 (1909), von denen die letzten beiden insbesondere den Gesichtspunkt der Reihenentwicklung verfolgt haben.

Die Verbindung zweier sukzessiver Doppelpunkte ($s = 2, s' = 2$) ohne andere Besonderheiten wird durch den biplanaren Punkt gegeben, dessen Achse eine vierpunktige Tangente ist. Im übrigen *kann ein biplanarer Punkt aus einer beliebigen Anzahl von Doppelpunkten zusammengesetzt sein, die sich indessen immer durch einen linearen Zweig einer algebraischen Kurve verbinden lassen:* Rohn, *Math. Ann.* **22**, 124 (1883); Segre, a. a. O., p. 16—17.

Wenn einem Doppelpunkt in verschiedenen Richtungen zwei andere Doppelpunkte unendlich benachbart sind, so ist es im allgemeinen noch ein dritter, und wir erhalten den uniplanaren Punkt. *Ein uniplanarer Punkt läßt sich demnach ansehen als ein Doppelpunkt, dem in verschiedenen Richtungen drei andere Doppelpunkte unendlich benachbart sind* ($s = 2, s_1' = s_2' = s_3' = 2$).

Ein uniplanarer Doppelpunkt heißt Knotenpunkt von der k^{ten} Art oder Spitze von der k^{ten} Art, je nachdem die allgemeine Schnittkurve der Fläche mit einer durch den Punkt gehenden Ebene in ihm einen Knotenpunkt der k^{ten} Art oder eine Spitze der k^{ten} Art (Bd. II[1], S. 295) darbietet; für $k = 2, 3$ heißen die Knoten *Berührungsknoten (Tacnodes, Selbstberührungspunkte)* und *Schmiegungsknoten.*

Die Zusammensetzung eines *Knotens A* von der k^{ten} Art ist folgende: *der Doppelpunkt A, auf ihn folgend auf einem allgemeinen linearen Zweig $k - 1$ konsekutive Doppelpunkte, die natürlich konsekutiven infinitesimalen Doppelgeraden angehören, und die alle Knoten von den Arten $k - 1, k - 2, \ldots, 2, 1$ sind; auf jedem Zweig folgen dann auf den letzten Doppelpunkt zwei infinitesimale einfache Gerade.*

Durch den Punkt A gehen im allgemeinen $2k$ lineare Zweige der Verzweigungskurve der Fläche (d. h. der Berührungskurve von F mit einem allgemeinen umschriebenen Kegel) hindurch, die $2k$ Tangenten dieser Zweige bestimmen $2k$ Richtungen, längs welchen auf den Punkt A eine Spitze $(k - 1)^{\text{ter}}$ Art folgt (statt eines Knotens $(k - 1)^{\text{ter}}$ Art, wie es bei den allgemeinen Richtungen der Fall ist). Unter den Richtungen, die von diesem Punkte ausgehen, ist noch ausgezeichnet die Richtung des genannten Zweiges der Verzweigungskurve: nimmt man auf diesem Zweige l auf A folgende Punkte, so wird der l^{te} ein Knoten von der Art $k - \frac{l}{2}$, wenn l gerade ist, und eine Spitze von der Art $k - \frac{l+1}{2}$, wenn l ungerade ist, insbesondere folgen auf A, wenn man beständig dem Zweig der Verzweigungskurve nachgeht, von A aus $2k - 1$ Doppelpunkte.

Die Zusammensetzung einer *Spitze* A von der k^{ten} Art ist die folgende: *der Doppelpunkt* A, *ihm benachbart auf einem allgemeinen linearen Zweig* $k-1$ *konsekutive Doppelpunkte, die natürlich konsekutiven infinitesimalen Doppelgeraden angehören und die alle Spitzen von den Arten* $k-1, k-2, \cdots, 2, 1$ *sind; auf jedem Zweig ist der letzte Doppelpunkt eine gewöhnliche Spitze, und deshalb folgt auf ihn eine einzige einfache infinitesimale Gerade.*

Durch den Punkt A *gehen im allgemeinen* $2k+1$ *lineare Zweige der Verzweigungskurve der Fläche, die Richtungen ihrer* $2k+1$ *Tangenten sind dabei ausgezeichnet bezüglich der Zusammensetzung, insofern längs jeder von ihnen auf den Punkt* A *ein Knoten von der Art* k *folgt. Auch für diesen Punkt ist die Richtung des Zweiges der Verzweigungskurve ausgezeichnet: nimmt man auf diesem Zweige* l *auf* A *folgende Punkte, so wird der* l^{te} *eine Spitze von der Art* $k-\frac{l}{2}$, *wenn* l *gerade ist, und ein Knoten von der Art* $k-\frac{l-1}{2}$ *wenn* l *ungerade ist, insbesondere folgen auf* A, *wenn man beständig dem Zweig der Verzweigungskurve nachgeht,* $2k$ *Doppelpunkte.*

Vgl. B. Levi, *Torino Atti* **40**, 139 (1904); für die Knoten $k=2, 3$ und die Spitzen $k=1, 2$ Segre, a. a. O., p. 12, 17ff.

So ist z. B. *einem auf einer Doppellinie liegenden Pinch-point, außer den Punkten dieser Linie ein Doppelpunkt der Fläche unendlich benachbart in einer Richtung, welche von derjenigen der an die Doppellinie gelegten Tangente verschieden ist, nämlich in der Richtung der singulären Tangente der Fläche.*

Ein gewöhnlicher Berührungsknoten setzt sich zusammen aus einem Doppelpunkt und einer diesem unendlich benachbarten infinitesimalen Doppelgeraden, welche außerdem noch vier neue sukzessive Doppelpunkte besitzt.

Ein besonderer Fall ist der *Close-point* auf einer Kuspidallinie; für ihn fallen drei der vier singulären Tangenten mit der Tangente der Kuspidallinie zusammen, so daß *einem solchen Punkte außer den Punkten der Kuspidallinie eine infinitesimale Doppelgerade und dann noch, auf diese folgend, ein Doppelpunkt unendlich benachbart ist.*

In den ausgesprochenen allgemeinen Sätzen ist die allgemeine Zusammensetzung der uniplanaren Doppelpunkte enthalten; in besonderen Fällen kann die Zusammensetzung verwickelter sein; vgl. z. B. für die Spitze erster Art Segre a. a. O. S. 18f., für allgemeinere Fälle B. Levi, a. a. O., S. 156f. Levi zeigt, wie man

diese Zusammensetzung berechnen kann, wenn man die Zusammensetzung des Punktes als Punktes der Verzweigungskurve der Fläche kennt, und außerdem, daß diese letztere Zusammensetzung eine beliebige sein kann, vorausgesetzt daß sie einer auf einem linearen Mantel der Fläche gezogenen Kurve angehören kann.

Levi gibt auch die analytische Form der Gleichung einer Fläche an, die im Ursprung einen Knoten oder eine Spitze k^{ter} Art besitzt; sie lautet

$$(x + \chi_2 + \chi_3 + \cdots + \chi_{\mu-2})^2 + \pi_\mu + \pi_{\mu+1} + \cdots = 0,$$

wo χ_i und π_i Formen in x, y, z von der Ordnung i sind, von denen π_μ nicht durch x teilbar ist, und wo $\mu = 2k$ für einen Knoten und $\mu = 2k + 1$ für eine Spitze zu setzen ist.

Halphen, *Ann. di Mat.* (2) **9**, 68 (1878) (vgl. auch del Pezzo, *Rend. Circ. Mat.* **6**, 139 (1892)) hat auf die Flächen den Begriff des Zweiges einer algebraischen Kurve ausgedehnt, indem er bewies, daß in der Umgebung jeder algebraischen Kurve L von F die Fläche F selbst eine Gesamtheit von *Mäntelzykeln (cycles de nappes)* ist, von denen jeder die Eigenschaft hat, daß ein allgemeiner ebener Schnitt eines solchen Zykels in dem Punkt, den er mit L gemein hat, aus einem einzigen Zweig besteht, so daß ein Mäntelzykel durch die Bewegung eines ebenen Zweiges erzeugt werden kann, dessen Anfangspunkt die Kurve L beschreibt. Diese Kurve L heißt die *Anfangslinie* des Zykels; Ordnung und Klasse des Zykels ist die Ordnung und die Klasse des Zweiges, die ein allgemeiner ebener Schnitt des Zykels in einem Schnittpunkte mit L besitzt (Bd. II^1, S. 293).

In jedem Punkte von L haben alle Mäntel desselben Zykels dieselbe Tangentialebene, die durch die Tangente von L hindurchgeht. Wenn diese Ebene für die verschiedenen Punkte von L verschieden ist, so übersteigt die Klasse des Zykels nicht die Ordnung. Einem Zykel entspricht als korrelatives Gebilde wieder ein Zykel; zwei korrelative Zykel haben dieselbe Klasse, mit anderen Worten, die Summe der Ordnungen aller Berührungen einer Geraden mit einer Fläche wird durch eine korrelative Transformation nicht geändert. Wenn hingegen die Tangentialebene längs L unveränderlich ist, so ist L eine ebene Kurve, und ihr ist als dual entsprechendes Gebilde ein singulärer Punkt zugeordnet.

Halphen hat die Beziehungen zwischen zwei korrelativen Zykeln näher untersucht. Auf jeden Zykel, dessen Ordnung seiner Klasse gleich ist, ist die Theorie der Indikatrix anwendbar, und wenn diese nicht für jeden Punkt von L parabolisch ist, so ist zu dem

Zykel ein Zykel derselben Ordnung korrelativ. Bei den anderen Fällen muß man drei Hauptgruppen unterscheiden, je nachdem die Tangentialebene in jedem Punkte von L diese Kurve oskuliert oder nicht, oder L eine Gerade ist. Besonders einfach ist das Resultat, zu dem man im letzten Falle gelangt: *ein Zykel, dessen Anfangslinie eine Gerade ist und dessen Tangentialebene von Punkt zu Punkt dieser Geraden wechselt, hat zum korrelativen Gebilde einen Zykel von derselben Ordnung.*

Zwischen den Elementen der verschiedenen singulären Linien von F, der Ordnung und dem Rang von F besteht eine Beziehung, die Halphen gegeben hat und die die Ordnung der parabolischen Kurve einer Fläche mit beliebigen Singularitäten liefert.

Aus der Arbeit von Halphen geht hervor, daß die Singularität einer Linie von F in einem allgemeinen Punkte A und damit die Zusammensetzung dieses Punktes für F (die wie oben durch eine Folge von quadratischen Transformationen festgelegt sei) bestimmt ist, wenn die Zusammensetzung des Punktes für die Schnittkurve von F mit einer allgemeinen Ebene durch A bekannt ist. B. Levi, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 245 (1897), (3) **2**, 127 (1899) hat bewiesen, daß, wenn A für F s-fach ist und nach A auf der allgemeinen ebenen Schnittkurve von F (die durch A hindurchgeht) ν s-fache Punkte folgen, jede allgemeine Punktfolge von F, deren erster Punkt A ist, genau νs-fache Punkte enthält.

Die Singularitäten, die sich auf eine mehrfache Gerade einer Fläche beziehen, hat Zeuthen, *Math. Ann.* **4**, 1 (1871) geometrisch untersucht.

Anwendungen auf die Klasse, das Flächengeschlecht und das Doppelgeschlecht.

Die Kenntnis der Zusammensetzung eines singulären Punktes kann dazu dienen, die Erniedrigung zu berechnen, die er in der Klasse der Fläche F hervorruft. Die Bestimmung der Zahl I im Ausdruck $I-2D-R$ des § 7 in Kap. XXX ist eine Aufgabe der ebenen Geometrie, die durch die Formel (2) von Noether auf S. 298 in Bd. II[1] gelöst wird; zu ihrer Anwendung genügen die ternären quadratischen Transformationen, die in den quaternären Transformationen der Fläche F enthalten sind.

Man findet so z. B., daß, wenn F einen s-fachen Punkt enthält, dem unendlich viele Doppelpunkte auf den Seitenlinien eines Kegels von der Ordnung h unendlich nahe benachbart sind, die Formel gilt (Segre, a. a. O., p. 33):

$$I=(s^2-s+2h)(s^2-s+2h-1)+h(s-2).$$

Ein *konischer Doppelpunkt* erniedrigt die Klasse um zwei Einheiten. Ein *biplanarer Doppelpunkt* A, der k sukzessiven Doppelpunkten äquivalent ist, erniedrigt die Klasse um $2k$ oder um $2k + 1$ Einheiten, je nachdem der aus einem allgemeinen Punkte O der Fläche umschriebene Kegel in OA eine Selbstberührung oder eine Rückkehrkante besitzt: Rohn, *Math. Ann.* 22, 127 (1883); Segre a. a. O., S. 31f. Die Erniedrigung der Klasse beträgt wenigstens drei Einheiten, und zwar gerade drei, wenn die singuläre Tangente in A mit F nicht eine mehr als dreipunktige Berührung hat.

Ein *uniplanarer Doppelpunkt* A von der Art, daß die allgemeinen ebenen Schnittkurven, die durch ihn gehen, in ihm einen Doppelpunkt haben, der die Klasse der ebenen Kurven um i Einheiten erniedrigt (wobei $i = 2k$, wenn A für F ein Knotenpunkt k^{ter} Art ist, und $i = 2k + 1$, wenn A für F eine Spitze k^{ter} Art ist), erniedrigt die Klasse von F im allgemeinen um $i(i - 1)$ Einheiten. Nur wenn unter den *i singulären Tangenten* (die von der Art sind, daß für die Schnittkurven, deren Ebene durch eine von ihnen hindurchgeht, der Punkt A die Klasse um $i + 1$ Einheiten erniedrigt) i' zusammenfallen, so wird die Erniedrigung der Klasse von F gleich $i(i - 1) + i' - 1$. Die Erniedrigung beträgt sonach $2k(2k - 1)$ oder $2k(2k + 1)$ Einheiten, je nachdem A ein Knotenpunkt oder eine Spitze von der k^{ten} Art ist. Im allgemeinen Fall eines uniplanaren Doppelpunktes ist die Erniedrigung zunächst 6, und 7 oder 8 nur dann, wenn von den drei singulären (vierpunktigen) Tangenten nur zwei verschieden sind oder alle zusammenfallen, usw. Vgl. Rohn a. a. O., S. 134; Segre a. a. O., p. 32.

Ähnlich läßt sich die Erniedrigung bestimmen, die eine Singularität in den invarianten Charakteren der Fläche hervorruft. So erniedrigt ein isolierter s-facher Punkt, dem weder mehrfache Punkte noch infinitesimale mehrfache Linien unendlich benachbart sind, das Flächengeschlecht p_a um $\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$ Einheiten: Noether, *Gött. Nachr.* 1871, S. 272.

Allgemeiner wird die Erniedrigung von p_a, wenn bei der Zusammensetzung eines s-fachen Punktes keine mehrfachen infinitesimalen Linien, sondern nur einzelne mehrfache Punkte von den Multiplizitäten s', s'', ... auftreten,

$$s-1)(s-2) + \sum s^{(i)}(s^{(i)}-1)(s^{(i)}-2)$$

Wenn hingegen der s-fache Punkt eine unendlich benachbarte s'-

fache infinitesimale Linie von der Ordnung h besitzt, so wird die Erniedrigung von p_a

$$\tfrac{1}{6}s(s-1)(s-2)+\tfrac{1}{12}s'(s'-1)h[6(s-1)-(h-1)(2s'-1)].$$

Ein isolierter Berührungsknoten, ebenso wie ein isolierter Rückkehrpunkt zweiter Art, verringert p_a um eine Einheit, ein isolierter Schmiegungsknoten um 3 Einheiten. Vgl. über alles dies Pensa, *Ann. di Mat.* (3) **6**, 249 (1901), der auch für einige Fälle die Erniedrigung berechnet hat, die ein singulärer Punkt in dem Doppelgeschlecht von F hervorruft.

Kapitel XXXII.

Allgemeine Theorie der algebraischen Flächen.

(Besondere Fragen.)

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

§ 1. Algebraische Systeme von algebraischen Raumkurven und Flächen.

Die Charakteristikentheorie (Bd. II[1], S. 289) ist wenigstens teilweise auf die algebraischen Systeme von Raumkurven und algebraischen Flächen ausgedehnt worden. Ist ein algebraisches System von ∞^1 Flächen gegeben, so hat de Jonquières, *C. R.* **58**, 567 (1864), **61**, 440 (1865) die Anzahlen μ, ν, ϱ der Flächen des Systems eingeführt, die durch einen gegebenen Punkt gehen oder eine gegebene Ebene oder eine gegebene Gerade berühren, und hat gefunden, daß in dem System im allgemeinen $m\varrho + r\mu$ Flächen existieren, die eine gegebene Kurve von der Ordnung m und dem Range r berühren, und daß es in ihm $m\nu + n\mu + r\varrho$ Flächen gibt, die eine gegebene Fläche von der Ordnung m, der Klasse n und dem Range r berühren.

Brill, *Math. Ann.* **8**, 534 (1875) hat bewiesen, daß diese Sätze ausnahmslos gültig sind, und hat ferner gefunden, daß in einem algebraischen System von ∞^1 Raumkurven, von denen μ eine gegebene Gerade treffen und ϱ eine gegebene Ebene berühren, $m\varrho + r\mu$ Kurven enthalten sind, die eine gegebene Fläche mit den Charakteristiken (m, n, r) berühren.

Sind zwei Systeme von ∞^2 Raumkurven gegeben von der Art, daß durch einen gegebenen Punkt a bzw. a' von ihnen hindurchgehen und b bzw. b' einen Strahl eines gegebenen Büschels berühren, endlich c bzw. c' eine gegebene Ebene in einem Punkte einer gegebenen Geraden berühren, so bilden die Punkte, in denen sich zwei Kurven der beiden Systeme berühren, eine Kurve von der Ordnung $ab' + a'b + aa' + cc'$, und die gemeinsamen Tangenten in diesen Punkten bilden eine Regelfläche vom Grade $ab' + a'b + bc' + b'c$.

Unter den Kurven eines ∞^3-fachen algebraischen Systems, von denen φ eine gegebene Gerade und χ eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte berühren, gibt es $m\varphi + r\chi$, die eine gegebene Kurve von der Ordnung m und dem Range r berühren.

Sind zwei Systeme von ∞^1 Flächen gegeben mit den Charakteristiken μ, ν, ϱ und μ', ν', ϱ', so ist die Kurve, auf der die Berührungspunkte von zwei Flächen der Systeme liegen, von der Ordnung $\mu\varrho' + \mu'\varrho + \mu\nu' + \mu'\nu + \nu\nu'$.

Betreffs dieser und verwandter Sätze vgl. Schubert, *Math. Ann.* **10**, 109 (1876), *Gött. Nachr.* 1877, S. 401, *Kalkül*, S. 54, 55, 296, 297, 301, 302; außerdem Fouret, *C. R.* **80**, 805 (1875), **82**, 1497 (1876), **84**, 436 (1877). Andere Sätze findet man bei Halphen, *Bull. Soc. M.* **5**, 10 (1877), **6**, 10 (1878). Vgl. auch Salmon-Fiedler, *II*, S. 612; R. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verw. IV*, Leipzig 1909, S. 133. Betreffs der Flächen zweiter Ordnung eines algebraischen Systems, die eine gegebene Kurve berühren, s. Zeuthen, *Nouv. Ann.* (2) **7**, 385 (1868).

Über die Verknüpfung dieser Fragen mit der Theorie der algebraischen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln (vgl. Bd. II[1], S. 290) handeln eine Reihe Arbeiten von Fouret, *C. R.* **79—86**; Loria, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **44**, 643 (1911).

In einem algebraischen ∞^2 Flächensystem sei (μ^2) die Anzahl der Flächen, die durch zwei gegebene Punkte gehen, $(\mu\nu)$ die Anzahl der Flächen, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren, $[\mu\nu]$ die Anzahl der Flächen, die eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt berühren, B und C die Anzahlen der Flächen, deren Doppelkurve oder Kuspidalkurve durch einen gegebenen Punkt geht, D und E die Anzahlen der Flächen, die eine doppelte oder dreipunktige Berührung mit einer gegebenen Geraden haben. Dieselben Buchstaben mit einem Akzent versehen sollen die dual entsprechenden Anzahlen bezeichnen, so daß a', D', E' mit a, D, E zusammenfallen und die Symbole ν und ν' dieselbe Bedeutung haben. Ist dann eine Fläche F_n von der Ordnung n und dem Range a, mit einer Doppelkurve von der Ordnung b und einer Kuspidalkurve von der Ordnung c gegeben und wird gesetzt

$$2r = 3a + c, \qquad 2r' = 3a + c',$$

so findet Zeuthen, *C. R.* **89**, 899 (1879), daß in dem Systeme

$$\frac{n'(n'-1)}{2}(\mu^2)+nn'(\mu\mu')+\frac{n(n-1)}{2}(\mu'^2)+an'(\mu\nu)+an(\mu'\nu)$$
$$+\frac{a(a-1)}{2}(\nu^2)+n'B+nB'+aD-3r'[\mu\nu]-3r[\mu'\nu]$$

Flächen enthalten sind, die mit F_n eine doppelte Berührung haben, und

$$2r'[\mu\nu]+2r[\mu'\nu]+n'C+nC'+aE,$$

die mit F_n eine stationäre Berührung haben.

Zeuthen, *C. R.* **89**, 946 (1879) hat auch die Anzahlen der Paare von Flächen zweier algebraischen ∞^1 Systeme bestimmt, die sich doppelt oder stationär berühren. Sei n die Ordnung und a der Rang der Flächen eines ∞^1 Systems mit den Charakteristiken μ, μ', ϱ und seien B und Γ die Ordnungen der von den Doppelkurven und Kuspidalkurven erfüllten Flächen, Δ und E die Ordnungen der von den Doppeltangenten und den Haupttangenten gebildeten Komplexe. Dieselben Buchstaben mit Akzenten versehen sollen die dual entsprechenden Anzahlen bezeichnen, und wir unterscheiden durch die Indizes 1 und 2 die auf die beiden Systemen bezüglichen Anzahlen. Dann sind die beiden obengenannten Anzahlen

$$n_1'n_2'\mu_1\mu_2+(n_1-1)(n_2'-1)\mu_1\mu_2'+(n_1'-1)(n_2-1)\mu_1'\mu_2$$
$$+n_1n_2\mu_1'\mu_2'+(a_1n_2'-4)\mu_1\varrho_2+(n_1'a_2-4)\varrho_1\mu_2$$
$$+(n_1a_2-4)\varrho_1\mu_2'+(a_1n_2-4)\mu_1'\varrho_2+(a_1-1)(a_2-1)\varrho_1\varrho_2$$
$$+\Delta_1\varrho_2+\Delta_2\varrho_1+B_1\mu_2'+B_2\mu_1'+B_1'\mu_2+B_2'\mu_1$$

und

$$3\mu_1\varrho_2+3\varrho_1\mu_2+3\varrho_1\mu_2'+3\mu_1'\varrho_2+E_1\varrho_2+E_2\varrho_1$$
$$+\Gamma_1\mu_2'+\Gamma_2\mu_1'+\Gamma_1'\mu_2+\Gamma_2'\mu_1.$$

S. Kantor, *Amer. J.* **23**, 1 (1901) hat alle Typen bestimmt, auf die man durch birationale Transformationen die linearen Systeme von rationalen Kurven (auch in einem mehrdimensionalen Raume) reduzieren kann, d. h. die algebraischen Systeme, bei denen durch eine gewisse Anzahl von allgemeinen Punkten eine einzige Kurve des Systems geht. Vgl. auch Enriques, *Math. Ann.* **49**, 20 (1897).

Die Typen der linearen Systeme von elliptischen Kurven hat ebenfalls S. Kantor bestimmt, *Amer. J.* **24**, 205 (1902).

Enriques, *Ann. di Mat.* (3) **20**, 109 (1913) hat gefunden, daß jede lineare Kongruenz (d. h. ∞^2 System) von rationalen Raumkurven aus einem Strahlenbündel durch eine rationale Transformation des Raumes (welche im allgemeinen nicht umkehrbar ist) erhalten werden kann.

Godeaux, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) **10**, 28 (1912), *Rend. Circ. mat.* **34**, 288 (1912), hat alle Typen der linearen Kongruenzen von ebenen Kurven bestimmt, welche eine einzige singuläre Kurve besitzen.

Kurvensysteme erster und zweiter Stufe hat R. Sturm, *Math. Ann.* **28**, 277 (1887) betrachtet bei seinen Untersuchungen über höhere räumliche Nullsysteme, indem er u. a. zeigte, daß *in jedem algebraischen System erster Stufe der Bündelgrad (die Ordnung) der Tangentenkongruenz das Doppelte von dem Grad des Sehnenkomplexes ist.*

Andere Sätze über Kurven und Flächensysteme finden sich bei Schubert, *Kalkül,* S. 27f., 34f., 254, 305.

§ 2. Gestaltliche Eigenschaften der Raumkurven und Flächen.

Eine Raumkurve läßt sich erzeugen durch die Bewegung eines Punktes P auf einer Geraden t (der Tangente), während gleichzeitig t sich um P in einer Ebene π (der Schmiegungsebene) und diese Ebene sich um t dreht. Diese Bewegungen lassen sich beziehen auf einen festen Punkt auf t, auf eine feste Gerade in π und auf eine Ebene, die durch die augenblickliche Tangente und einen im Raum außerhalb aller Tangenten festgelegten Punkt hindurchgeht.

Der Sinn der drei Bewegungen läßt sich nur in einzelnen singulären Lagen der beweglichen Elemente umkehren, welche Rückkehrelemente heißen, und indem man alle Kombinationen betrachtet, die in dieser Beziehung das Tripel $Pt\pi$ darbietet, muß man *acht Fälle* unterscheiden.

Vgl. hierüber v. Staudt, *Geometrie der Lage,* Nürnberg 1847, § 15; Ch. Wiener, *Zschr. Math. Phys.* **25**, 95 (1880), *Lehrbuch der darstellenden Geometrie I*, Leipzig 1884, S. 214; Meder, *Monatsh. f. Math.* **20**, 186 (1909). Analytische Kriterien, auch in bezug auf die Krümmung, Torsion, Evolute, Evolvente, Polarfläche, die Projektionskurven, die ebenen Schnitte der Tangentenfläche, die rektifizierende Fläche usw. findet man bei Möller, *Acta Univ. Lund.*

21, 1 (1884); Fine, *Amer. J.* 8, 156 (1886); Björling, *Arch. Math. Phys.* (2) 8, 83 (1889), *Bihang Svenska Vet. Akad. Stockholm* **15**, 1889, Nr. 8; Peano, *Torino Atti* **26**, 299 (1890); Kneser, *J. f. Math.* **113**, 89 (1894); Brunn, *Math. Ver.* **3**, 84 (1894); Staude, *Amer. J.* **17**, 359 (1895); Meder, *J. f. Math.* **116**, 50, 247 (1896), **121**, 230 (1900), **137**, 83 (1909), *Monatsh. f. Math.* **22**, 303 (1911); Ramorino, *Torino Atti* **32**, 471 (1897); Wölffing, *Archiv Math. Phys.* (2) **15**, 146 (1897), *Math. Naturwiss. Mitt.* (2) **5**, 70 (1903); Burali-Forti, *Torino Atti* **36**, 935 (1901); Mehmke, *Zschr. Math. Phys.* **49**, 62 (1903); Biermann, *Archiv Math. Phys.* (3) **11**, 314 (1907); v. Lilienthal, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*, Leipzig 1908, S. 242.

Die gestaltlichen Eigenschaften eines nirgends singulären Raumkurvenbogens, der im projektiven Sinne stetig ist, keine Doppeltangenten oder doppelten Schmiegungsebenen besitzt, ferner in jedem Punkte eine bestimmte Tangente und bestimmte Schmiegungsebene hat, die sich mit dem Punkte stetig ändern, sind auf synthetischem Wege von Kneser, *Math. Ann.* **31**, 507 (1888), **34**, 204 (1889) näher untersucht worden, insbesondere bezüglich der scheinbaren Singularitäten, d. h. der Schmiegungsebenen und Sehnen, die sich von einem Punkte P aus an die Raumkurve legen lassen (d. h. der Wendepunkte und Doppelpunkte ihrer ebenen Projektionen). Die Anzahlen solcher Ebenen und Sehnen können nur dann wechseln, wenn P gewisse bestimmte Flächen überschreitet, so z. B. die von den Tangenten der Kurve gebildete abwickelbare Fläche. Der ganze Raum wird derart in verschiedene Bereiche abgeteilt, für deren jeden die angeführten Zahlen gleichen Wert haben. Kneser hat nun untersucht, wie die Zahlen sich ändern, wenn P aus einem Bereich in einen anderen tritt, insbesondere für die Kurven mit nicht mehr als drei scheinbaren Wendepunkten und die Kurven auf dem einschaligen Hyperboloid.

Ein *Flächenmantel* ist ein geschlossener (d. h. von keiner Linie begrenzter) Flächenteil, der von reellen Punkten gebildet wird und im projektiven Sinne zusammenhängt (d. h. derart, daß irgend zwei Punkte auf ihm durch einen kontinuierlichen Weg, der auf ihm liegt und eventuell die unendlich ferne Ebene durchsetzt, verbunden werden können). Der Flächenmantel kann sich demnach auch durch das Unendliche hindurch erstrecken, wie es beim zweischaligen Hyperboloid der Fall ist.

Wie bei den ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 304) heißt nach v. Staudt, *Geom. der Lage*, § 12, auch ein geschlossener Raumkurvenzug *paar* oder *unpaar*, je nachdem er von einer Ebene, die

keinen Teil von ihm enthält, in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Ebenso heißt ein geschlossener Flächenmantel *paar* oder *unpaar*, je nachdem er von einer Geraden, von welcher kein Teil auf ihm liegt, in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Ein paarer Mantel, der keinen Knoten besitzt und durch eine kontinuierliche Transformation sich auf eine Kugel zurückführen läßt, heißt ein *Oval*.

Ein unpaarer Mantel enthält nicht bloß unpaare, sondern auch paare Kurvenzüge. Hingegen scheiden sich die paaren Mäntel weiter nach Klein, *Math. Ann.* **6**, 578 (1873), in zwei Arten, je nachdem sie außer paaren auch unpaare Kurvenzüge enthalten oder nicht. Zeuthen nennt diese zwei Arten *Mäntel vom Typus der Geraden* und *Mäntel vom Typus des Punktes*, weil sie sich bzw. in eine Gerade oder einen Punkt transformieren lassen. Rohn sagt dagegen in dem einen Falle, daß der Mantel *endlich* oder *paar*, im anderen Falle, daß er *unendlich* oder *halbpaar* ist. Z. B. enthält ein Mantel, der ganz im Endlichen liegt, keine unpaaren Züge, und wenn ein paarer Mantel einen unpaaren Zug enthält, so erhält man, indem man ihn mit Mänteln, die durch diesen Zug hindurchgehen, schneidet, auf ihm unendlich viele unpaare Züge. Beispiele von unpaaren Mänteln und von paaren Mänteln der ersten und der zweiten Art sind der Reihe nach die Ebene, das einschalige Hyperboloid, das Ellipsoid oder das zweischalige Hyperboloid.

Ein Mantel und ein Kurvenzug, der nicht auf dem Mantel liegt, schneiden sich eine gerade oder ungerade Anzahl Male, je nachdem wenigstens einer von beiden paar ist oder beide unpaar sind.

Zwei unpaare Mäntel oder auch ein unpaarer Mantel und ein paarer der ersten Art schneiden sich notwendigerweise. Zwei Mäntel ohne gemeinsame Teile schneiden sich in einer ungeraden Anzahl von unpaaren Kurvenzügen nur dann, wenn sie beide unpaar sind.

Drei Mäntel, die keine Linie gemein haben, schneiden sich in einer geraden oder ungeraden Anzahl von Punkten, je nachdem wenigstens einer von ihnen paar ist oder alle drei unpaar sind.

Ein Raumkurvenzug hat eine gerade oder ungerade Anzahl von Rückkehrpunkten (und dual entsprechend eine gerade oder ungerade Anzahl von stationären Schmiegungsebenen), je nachdem seine Tangentenfläche paar oder unpaar ist. Diese Fläche hat eine gerade oder ungerade Anzahl von Rückkehrerzeugenden, je nachdem der Kurvenzug und die Hüllfläche der Schmiegungsebenen beide paar oder beide unpaar oder eines paar, das andere unpaar sind. Vgl. v. Staudt, a. a. O. Nr. 211 f.

Alle diese Sätze haben projektiven Charakter, so daß für sie das Prinzip der Dualität gilt und das Unendlichferne nur einen besonderen Fall bildet.

Aus dem Satze von Harnack (Bd. II[1], S. 304) und dem Satz in Kap. XXXVI über die irreduzibeln Raumkurven vom höchsten Geschlecht folgt durch Projektion, daß *die reellen Züge einer irreduzibeln algebraischen Raumkurve von der Ordnung n höchstens*

$$\tfrac{1}{4}(n-2)^2+1 \quad \textit{oder} \quad \tfrac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$$

an Zahl sind, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Raumkurven, bei welchen diese Höchstzahl erreicht wird, gibt es wirklich für jeden Wert von n, sie gehören einer Fläche zweiter Ordnung an und haben keine mehrfachen Punkte.

Hilbert, *Math. Ann.* **38**, 114 (1891), dem man diese Eigenschaften verdankt, hat auch alle Fälle bestimmt, die sich in dieser Hinsicht bei den Kurven von gegebener Ordnung n mit der Höchstzahl von reellen Zügen darbieten können, indem er bewies, daß je nachdem

$$n = 4\nu, \quad 4\nu+1, \quad 4\nu+3,$$

höchstens

$$2\nu-2, \quad 2\nu-1, \; 2\nu-1$$

unpaare Züge existieren, während für $n = 4\nu + 2$ alle Züge paar sind; eine Ausnahme bilden die Kurven von den Ordnungen 3, 4, 5, für welche die Annahme von bzw. 1, 2, 3 unpaaren Zügen freisteht. Er hat außerdem bewiesen, daß es immer Kurven von der Ordnung n mit der Höchstzahl von reellen Zügen und einer in den angegebenen Grenzen enthaltenen Anzahl von unpaaren Zügen gibt.

W. Fr. Meyer, *Gött. Nachr.* 1891, S. 88, *Math. Ver.* **2**, 62 (1893), *Monatsh. f. Math.* **4**, 229, 331 (1893), *Math. Ann.* **43**, 286 (1893) hat die Realitätseigenschaften der algebraischen Raumkurven untersucht und auf sie die Realitätsgleichung von Klein für die ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 302) auszudehnen versucht. Es ergibt sich aber nur eine „Realitätskongruenz" mod 4, und es scheint unwahrscheinlich, daß eine allgemeingiltige Gleichung überhaupt existiert.

Beispiele von (rationalen) algebraischen Raumkurven mit Verschlingungen hat Brill, *Math. Ann.* **18**, 95 (1881) angegeben.

Über die Beziehungen der Fragen nach der Gestaltung der Flächen zu der Analysis situs und die damit verknüpfte Unter-

scheidung der Flächen in *einseitige* und *zweiseitige* oder *Doppelflächen* (Bd. II[1], S. 180) vgl. Klein, *Math. Ann.* **6**, 578 (1873), **7**, 549 (1874), **9**, 476 (1876), außerdem Picard und Simart, *Th. des fonctions alg. de deux var. indép. I*, Kap. II.

Was die reellen Punkte betrifft, so besteht eine reelle algebraische Fläche von der Ordnung n außer eventuellen isolierten Punkten und isolierten Linien aus einer gewissen Anzahl von Mänteln. Setzt man die Fläche als frei von mehrfachen Punkten voraus und ist n gerade, so enthält sie keinen unpaaren Mantel; sie enthält einen und nur einen, wenn n ungerade ist. Paare Mäntel der ersten Art existieren nur, und zwar in beliebiger Zahl, für gerades n; paare Mäntel der zweiten Art können in beliebiger Anzahl vorhanden sein, gleichgiltig ob n gerade oder ungerade ist. Vgl. Klein, *Math. Ann.* **6**, 578 (1873).

Es fehlt im übrigen an allgemeinen Untersuchungen über diesen Gegenstand, z. B. kennt man keinen Satz, der dem Harnackschen Satz analog wäre und die Anzahl der Mäntel, die im Höchstfalle eine reelle Fläche besitzt, bestimmte. Aus diesem Grunde haben um so größeren Wert die insbesondere auf die Flächen 3. und 4. Ordnung bezüglichen Resultate, ebenso wie die für die rationalen Flächen gewonnenen, von denen wir gleich sprechen werden.

Rohn, *Leipz. Ber.* **36**, 1 (1884) hat die gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche in der Umgebung eines mehrfachen Punktes untersucht; ferner hat er *Math. Ann.* **22**, 124 (1883) die Fälle eines biplanaren oder uniplanaren Doppelpunktes betrachtet. Betreffs der biplanaren Punkte vgl. auch Klein, *Math. Ann.* **6**, 551 (1873), betreffs der uniplanaren B. Levi, *Torino Atti* **40**, 166 (1904).

Die reellen Punkte einer reellen F_n bilden zwei Bereiche, im einen von diesen ist die Krümmung positiv, im anderen negativ; der Übergang von dem einen Bereich zum anderen tritt ein beim Überschreiten sowohl der parabolischen Kurve als auch der Kuspidalkurve, bei der letzteren dann, wenn durch den Übergangspunkt ein Zug der parabolischen Kurve geht, ohne daß er eine andere Singularität besitzt. Vgl. Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 458 (1876).

In gewissen ausgezeichneten Punkten der parabolischen Kurve bietet das doppelte System der Haupttangentenkurven ein besonderes Verhalten dar, das von Dyck, *Math. Ver.* **1**, 60 (1892) (vgl. auch *Münch. Ber.* **21**, 23 (1891), **22**, 101 (1892)) untersucht wurde; in geometrischer Hinsicht lassen sich diese singulären Stellen der Haupttangentenkurven dadurch charakterisieren, daß in ihnen die parabolische Kurve einen Wendeberührungspunkt

hat, für den die Schmiegungsebene der parabolischen Kurve mit der Tangentialebene von F_n zusammenfällt.

Die verschiedenen Typen, welche eine F_4 bezüglich der Gestaltung darbieten kann, wurden von Rohn, *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung*, Preisschrift der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft Leipzig 1886, Auszug *Math. Ann.* **29**, 81 (1887), untersucht mit Hilfe eines stetigen Deformationsprozesses, durch den man von gewissen Grenzfällen zum allgemeinen Fall übergeht. Ebenso hat er die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche untersucht, *Math. Ann.* **18**, 99 (1881), und die des Monoids 4. Ordnung, *Math. Ann.* **24**, 55 (1884).

Die Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt hat vom Gesichtspunkte der Gestaltung untersucht und eingeteilt Zeuthen, *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit*, *Festskrift*, Kjöbenhavn 1879, italienische Übersetzung von Loria, *Ann. di Mat.* (2) **14**, 31 (1886).

Indem man in der üblichen Weise sagt, daß ein Mantel das Geschlecht p und die Rangzahl $p + 1$ besitzt, wenn sich auf ihm p und nicht mehr als p getrennte in sich zurückkehrende Schnitte ziehen lassen, die den Mantel nicht zerstücken, nennt man *Rang* einer algebraischen Fläche die Summe der Rangzahlen ihrer Mäntel. Für die F_4 hat Rohn in der angeführten Preisschrift gefunden, daß der Rang 12 nicht übersteigen kann. Hilbert, *Gött. Nachr.* 1909, S. 308, hat darauf nachgewiesen, daß wirklich singularitätenfreie F_4 mit dem Maximalrang 12 existieren (sie bestehen aus zwei Mänteln, von denen der eine den Rang 1, der andere den Rang 11 hat).

Klein, *Math. Ann.* **18**, 160 (1881) hat die Existenz einer F_4 bemerkt, die aus neun Mänteln besteht, von denen einer ringartigen Zusammenhang aufweist.

Rohn, *Leipz. Ber.* **63**, 423 (1911), *Math. Ann.* **73**, 177 (1913) hat gezeigt, daß eine F_4 höchstens aus 10 Ovalen bestehen kann, und daß solche Flächen wirklich existieren.

Torelli, *Atti Acc. Napoli* (2) **14**, Nr. 4 (1910) hat durch Erweiterung eines von Severi, *Ist. Ven. Atti* **62**², 863 (1903) auf die kubischen Regelflächen angewendeten Verfahrens, mit Hilfe der Abbildung auf eine Ebene, die Zusammenhangseigenschaften der Monoide untersucht, insbesondere, wie man durch die Abbildung erkennen kann, ob die Mäntel einseitige oder zweiseitige sind.

Commessatti, *Math. Ann.* **73**, 1 (1913), Auszug *Rom. Accad. Linc. Rend.* (5) **20**², 597 (1911), hat die reellen ratio-

nalen Flächen, insbesondere hinsichtlich ihrer Klassifikation vom Standpunkt der *reellen* birationalen Transformationen, behandelt und die Anzahl ihrer Mäntel ebenso wie die Verknüpfung dieser Anzahl mit der Zeuthen-Segreschen Invariante, ferner die (reellen) Moduln einer Klasse von rationalen Flächen, die hinsichtlich *reeller* birationaler Transformationen äquivalent sind, bestimmt. Ein erstes Kriterium für die genannte Klassifikation wird durch die Betrachtung der *reellen* linearen Kurvensysteme, die auf der Fläche liegen, geliefert, da sich ergibt, daß auf ihr immer irgend ein reelles lineares System einer der folgenden drei Gattungen enthalten ist: 1. Büschel von rationalen Kurven, 2. Bündel des Grades 2 von elliptischen Kurven, die sich auf ein Bündel von ebenen Kurven 3. Ordnung mit sieben Grundpunkten beziehen lassen, 3. Komplexe des Grades 4 von Kurven des Geschlechtes 2, die sich auf ein System von ebenen Kurven 6. Ordnung mit acht doppelten Basispunkten beziehen lassen.

Commessatti benutzt weiter, daß die Realität eines algebraischen Gebildes der Fläche dadurch charakterisiert ist, daß dieses Gebilde durch die *konjugierte* Transformation der Fläche (Vertauschung von i mit $-i$) in sich übergeht. Wenn man von der Fläche zur Bildebene übergeht, so liefert diese Transformation eine *involutorische antibirationale Transformation*, d. h. das Produkt einer birationalen Transformation mit der konjugierten Transformation der Ebene. Commessatti bestimmt so alle irreduzibeln Typen mit einer Mindestzahl von Grundpunkten, auf die sich die Transformationen durch quadratische Transformationen reduzieren lassen, indem er eine Einteilung in fünf Typen gibt, die viele Analogien mit der Einteilung der involutorischen ebenen birationalen Transformationen zeigt (Bd. II[1], S. 370).

Die ebene Abbildung einer reellen rationalen Fläche läßt sich nicht immer auf reelle Weise erreichen. Enriques, *Bologna Acc. Rend.* (2) **16**, 70 (1912) hat den Fall untersucht, in welchem dies eintritt, d. h. in welchem die Fläche sich durch Formeln

$$\varrho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

darstellen läßt, wobei die φ_i Ternärformen mit reellen Koeffizienten bedeuten. Eine solche Fläche besteht aus einem einzigen Mantel, und ihr Geschlecht ist gleich der Anzahl der Basispunkte des linearen Kurvensystems

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0,$$

vermindert um die Anzahl der ausgezeichneten Fundamentalkurven (denen auf der Fläche ein Punkt entspricht) und vermehrt um eine Einheit. Wenn die Fläche von gerader Ordnung ist, so ist eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dafür, daß sie einseitig ist, die, daß die Summe der Ordnungen aller ausgezeichneten Fundamentalkurven eine gerade Zahl (die Null einbegriffen) ist.

§ 3. Regelflächen.

Bei einer nicht abwickelbaren Regelfläche geht die Tangentialebene in einem ihrer Punkte durch die den Punkt enthaltende Erzeugende hindurch und ändert sich, wenn der Punkt sich auf der Erzeugenden bewegt. Umgekehrt ist jede durch eine Erzeugende gelegte Ebene eine Tangentialebene der Fläche in einem Punkte der Erzeugenden. *Die Punkte der Erzeugenden bilden so eine Punktreihe, die zu dem Büschel der in diesen Punkten berührenden Tangentialebenen projektiv ist.* Dieser Satz, der auch für nicht algebraische Regelflächen gilt, stammt von Chasles, *Corr. math. et phys.* **11**, 50 (1839).

Eine Regelfläche läßt sich deshalb auf zwei verschiedene, einander dual entsprechende Arten auffassen, einmal als Ort der unendlich vielen Lagen einer Punktreihe, deren Träger die Erzeugenden der Fläche durchläuft, und das andere Mal als die Hüllfläche der unendlich vielen Lagen eines Ebenenbüschels, dessen Achse die Erzeugenden der Fläche durchläuft.

Ist die Fläche algebraisch, so ist ihre Ordnung n gleich ihrer Klasse, deswegen sagt man, die Regelfläche sei vom *Grade* n.

Die Klasse eines ebenen Schnittes ist gleich der Ordnung des der Fläche aus einem Punkte umschriebenen Kegels und heißt der *Rang* der Regelfläche. Der Rang ist nichts anderes wie der Grad der Flächengleichung in Linienkoordinaten.

Eine allgemeine Ebene durch eine Erzeugende g schneidet die gegebene Fläche F noch in einer Kurve von der Ordnung $n-1$ und von den $n-1$ Schnittpunkten dieser Kurve mit g ist einer der Berührungspunkt der Ebene, die anderen sind Doppelpunkte von F, d. h. Schnittpunkte von g mit einer anderen Erzeugenden. Der Ort dieser Doppelpunkte ist eine *Doppelkurve* von F, die von jeder Erzeugenden in $n-2$ Punkten geschnitten wird. Dual entsprechend bilden die Ebenen, welche diese Paare von Erzeugenden enthalten, eine F doppelt berührende abwickelbare Fläche, deren Klasse der Ordnung der Doppelkurve gleich ist. Diese Sätze stam-

men von Cayley, *Cambr. and Dublin Math. J.* 7, 171 (1852), *Papers II*, p. 33.

Zwei beliebige ebene Schnitte von F sind durch die Erzeugenden eindeutig aufeinander bezogen, mithin nach dem Riemannschen Satze (Bd. II[1], S. 297) vom selben Geschlecht p. Die Zahl p heißt das *Geschlecht* der Regelfläche. Sie ist gleich dem Flächengeschlecht von F (S. 694) mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen: Cayley, *Math. Ann.* **3**, 528 (1871), *Papers VIII*, p. 396.

Eine Regelfläche kann eine endliche Anzahl von *Doppelerzeugenden* enthalten (die sich, zweimal gezählt, von jedem durch sie gelegten ebenen Schnitt ablösen); eine solche Erzeugende trifft $n-4$ andere Erzeugende, und die Treffpunkte sind dreifache Punkte von F. Ist g eine Doppelerzeugende von F, so besitzt F in jedem Punkte A von g zwei Tangentialebenen, die durch g gehen und, wenn A auf g wandert, zwei projektive Büschel beschreiben. Es gibt demnach zwei Punkte auf g, für welche die beiden Tangentialebenen zusammenfallen. Nur wenn die projektive Beziehung die Identität ist, fallen für jeden Punkt von g die beiden Tangentialebenen zusammen; g heißt dann eine *stationäre Erzeugende.*

Es kann auch eine endliche Anzahl Male eintreten, daß die projektive Beziehung zwischen den Punkten einer Erzeugenden g und den zugehörigen Tangentialebenen von F ausartet, d. h. daß auf g ein Punkt P liegt, dem alle Ebenen durch g entsprechen, und durch g eine Ebene π geht, der alle Punkte von g entsprechen. Die Linie g ist dann von der Art, daß in allen ihren Punkten π die Tangentialebene ist, dual entsprechend berührt jede Ebene durch g die Fläche in P; g trifft die unendlich benachbarte Erzeugende von F, P ist der Treffpunkt, π die Verbindungsebene.

Nach der Bezeichnung Cayleys (s. S. 686) heißt eine solche Erzeugende eine *Torsallinie* von F, P der *Torsalpunkt* und π die *Torsalebene* von g. Diese Torsalpunkte sind im allgemeinen die einzigen Kuspidalpunkte von F und die Torsalebenen die einzigen stationären Tangentialebenen. Die Torsallinien bilden zusammen mit den mehrfachen Kurven von F den vollständigen Schnitt der Fläche F mit ihrer Hesseschen Fläche (Salmon-Fiedler II, S. 666f.). Über die singulären Erzeugenden vgl. auch Björling, *Stockholm Öfversigt* 1888, p. 587; Zindler, *Liniengeometrie mit Anwendungen II*, Leipzig 1906, S. 41.

Zu den singulären Erzeugenden gelangt man auch durch folgende Betrachtung: Ist g eine allgemeine Erzeugende von F,

so bestimmt sie mit den zwei unendlich benachbarten Erzeugenden ein Hyperboloid, dessen g schneidende Erzeugende die Haupttangenten von F in den Punkten von g sind. Dieses Hyperboloid nennt man das *Schmiegungshyperboloid* von F längs g, es wurde zuerst von Plücker, *Ann. di Mat.* (2) **1**, 163 (1867), *Abh. I*, S. 579 untersucht; betreffs seiner Gleichung vgl. Voss, *Math. Ann.* **8**, 100 (1875); Painvin, *Nouv. Ann.* (2) **14**, 432 (1875). Vgl. ferner, auch über die projektive Differentialgeometrie der algebraischen und nicht algebraischen Regelflächen Wilczynski, *Amer. M. Soc. Trans.* **2**, 343 (1901), **3**, 60, 423 (1902), **4**, 185 (1903), **5**, 226, 438 (1904), **6**, 75 (1905), **9**, 293 (1908), *Projektive differential geom. of Curves and ruled Surfaces*, Leipzig 1906, S. 126 ff.

Es existieren nun auf F Erzeugende von der Art, daß irgendeine g von ihnen die Eigenschaft besitzt, daß längs ihr das Schmiegungshyperboloid in zwei Strahlenbüschel zerfällt, von welchen einer g enthält: diese Erzeugende sind eben die Torsallinien.

Ausnahmsweise kann die Regelfläche eine Erzeugende g enthalten, derart, daß das Schmiegungshyperboloid längs ihr *stationär* wird, d. h. auch die drei zu g benachbarten Erzeugenden enthält, so daß die der anderen Regelschar angehörenden Erzeugenden von ihm F in den Punkten von g vierpunktig berühren. Diese Erzeugenden wurden zuerst untersucht von Voss, *Math. Ann.* **8**, 94 (1875), welcher sie *hyperbolische Erzeugende* nannte.

Eine Regelfläche vom Grade n und Range r besitzt

$$\sigma = 2(r - n)$$

Torsallinien: R. Sturm, *Math. Ann.* **6**, 255 (1873); Schubert, ebenda **17**, 575 (1880); Severi, *Torino Mem.* (2) **52**, 71 (1902). Die Formel selbst fällt unter die Formel (22) bei Schubert, *Kalkül* S. 60.

Wenn F θ stationäre Erzeugende hat, so folgt aus (5) in Bd. II[1], S. 287

$$\sigma = 2n + 4(p - 1) - 2\theta.$$

Enthält F keine anderen mehrfachen Kurven als eine Doppelkurve, so hat diese das Geschlecht

$$\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4) + (n-5)p$$

und besitzt

$$(n-2)(n-3)(n-4) - (n-4)p$$

dreifache Punkte (in denen sich je drei Erzeugende von F begegnen, die also auch dreifache Punkte für F sind). Es folgt daraus

$$p \leqq \tfrac{1}{6}(n-2)(n-3).$$

In betreff dieser und anderer Eigenschaften der Doppelkurven s. Wiman, *Acta Math.* **19**, 63 (1895); in betreff der Anzahl der dreifachen Punkte vgl. auch Castelnuovo, *Rend. Circ. mat.* **3**, 33 (1889).

Die Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Tangenten liegen auf einer Kurve von der Ordnung

$$5n + 12(p-1) - 3\theta.$$

Vgl. Voss, *Math. Ann.* **9**, 485f. (1876).

Plücker, *Ann. di Mat.* (2) **1**, 160 (1867), *Abh. I*, S. 576 hat die Untersuchung der Regelflächen begonnen, welche den vollständigen Schnitt dreier Strahlenkomplexe von den Graden m, n, p bilden, und hat ihren Grad $2mnp$ bestimmt. Diese Untersuchung wurde auf algebraischem Wege fortgeführt von Lüroth, *J. f. Math.* **67**, 130 (1867) und besonders von Voß, *Math. Ann.* **8**, 54 (1875). Die Regelfläche hat den Rang

$$2mnp(m+n+p-2),$$

das Geschlecht

$$mnp(m+n+p-4)+1,$$

und besitzt

$$4mnp(m+n+p-3)$$

Torsallinien, ferner eine Doppelkurve von der Ordnung

$$mnp[2mnp-(m+n+p)+1].$$

Betreffs der Anzahl der Torsallinien vgl. auch Klein, *Math. Ann.* **5**, 292 (1872).

Eine doppelte Erzeugende erniedrigt den Rang um zwei Einheiten, das Geschlecht um eine Einheit, die Anzahl der Torsallinien um vier Einheiten und läßt die Ordnung der Doppelkurve ungeändert (in der Formel (10) auf S. 136 in der Arbeit von Lüroth muß das Glied $-d$ gestrichen werden).

Voß hat a. a. O. auch die vierpunktigen Tangenten betrachtet und gefunden, daß sie eine Regelfläche vom Grade

$$4mnp[6(m+n+p)-19]$$

bilden, während ihre Berührungspunkte auf einer Kurve von der Ordnung

$$2mnp[6(m+n+p)-19]$$

liegen, welche in

$$8mnp[3(m+n+p)-10]$$

Punkten von einer Erzeugenden der Fläche berührt wird.

Königs, *C. R.* **106**, 51 (1888) hat in explizierter Form alle algebraischen und nicht algebraischen Regelflächen bestimmt, deren Haupttangentenkurven algebraisch sind.

Ein besonderes Interesse haben die Regelflächen, deren Erzeugende in einem linearen Strahlenkomplex enthalten sind, insbesondere in bezug auf ihre Haupttangentenkurven. Man verdankt Lie, *Math. Ann.* **5**, 179 (1872) den allgemeinen Satz, daß *auf jeder Regelfläche, die in einem linearen Strahlenkomplex enthalten ist, eine Haupttangentenkurve liegt, deren Tangenten dem Komplex angehören und die immer ohne eine Integration gefunden werden kann.* Einen geometrischen Beweis dafür hat Klein, *Math. Ann.* **5**, 274 (1872) geliefert; vgl. auch Rosati, *Rend. Circ. mat.* **35**, 343 (1913). Da nach Clebsch, *J. f. Math.* **68**, 151 (1868), wenn auf einer Regelfläche eine von den Erzeugenden verschiedene Haupttangentenkurve bekannt ist, die Bestimmung aller anderen sich auf eine Quadratur zurückführen läßt, folgt aus dem Lieschen Satz, daß für die einem linearen Strahlenkomplex angehörenden Regelflächen die Aufsuchung der Haupttangentenkurven von einer Quadratur abhängt. Vgl. darüber auch Picard, *Ann. éc. norm.* (2) **6**, 346 (1877), *C. R.* **84**, 229 (1877).

Wenn demnach eine algebraische Regelfläche einem linearen Komplex angehört, so enthält sie immer eine algebraische Haupttangentenkurve, die sich auf folgende Weise konstruieren läßt: die Haupttangenten der Fläche, die dem linearen Komplex angehören, bilden eine abwickelbare Fläche, und deren Rückkehrkante ist die gesuchte Haupttangentenkurve. Ist die Regelfläche von der Ordnung n, hat sie eine Doppelkurve von der Ordnung b, d doppelte und θ stationäre Erzeugende, so daß ihr Geschlecht

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - b - \theta$$

ist, dann wird die algebraische Haupttangentenkurve von der Ordnung und Klasse

$$n(n-1) - 2b - 2d - 3\theta,$$

von dem Range

$$6n(n-2)-12b-12d-16\theta,$$

von dem Geschlecht

$$4p+n-\theta-3,$$

mit $28p+10n-8\theta-28$ stationären Tangenten, und es existieren $8(n-3)+6(4p-\theta)$ Erzeugende, welche die Kurve der vierpunktigen Berührungen tangieren.

Vgl. darüber Voss, *Math. Ann.* **8**, 77 (1875), der auch die Regelflächen mit einer oder zwei (getrennten oder zusammenfallenden) geraden Leitlinien und die Regelflächen vom Geschlecht Null behandelt hat. Über die Regelflächen mit zwei zusammenfallenden geraden Leitlinien vgl. auch Cremona, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **1**, 109 (1868).

Aus dem Lieschen Satz folgt, daß auf einer algebraischen Regelfläche mit zwei geraden Leitlinien alle asymptotischen Kurven algebraisch sind. Vgl. darüber auch Picard, a. a. O.; Halphen, *Bull. Soc. Math.* **5**, 134 (1877); Bioche, ebenda **19**, 39 (1891); Mohrmann, *Math. Ann.* **73**, 571 (1913).

Damit für eine Regelfläche eine reziproke Transformation existiert, welche jede Erzeugende in sich selbst transformiert, ist notwendig und hinreichend, daß die Regelfläche einem nicht speziellen linearen Strahlenkomplexe angehört. Vgl. Wilczynski, *Math. Ann.* **58**, 249, 584 (1904), *Amer. M. Soc. Bull.* (2) **11**, 8 (1904); Sisam, *Amer. M. Soc. Bull.* (2) **10**, 440 (1904).

Eine Regelfläche vom Geschlecht Null und dem Grad n hat im allgemeinen den Rang $2(n-1)$, eine Doppelkurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, welche von $2(n-2)(n-3)$ Erzeugenden berührt wird, sie besitzt außerdem

$$\tfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$$

dreifach berührende Ebenen und ebenso viele dreifache Punkte, endlich $2(n-2)$ singuläre Erzeugende. Die Ordnung der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten Regelfläche ist $8(n-3)$, ihr Geschlecht $4n-13$; die Kurve der vierpunktigen Berührungen ist von der Ordnung $5n-12$ und berührt $8(n-3)$ Erzeugende; es gibt endlich $10(n-4)$ Tangenten mit fünfpunktiger Berührung.

Wenn eine Regelfläche vom Geschlecht Null in einem linearen Komplex enthalten ist, so ist ihre algebraische Haupttangentenkurve im allgemeinen hyperelliptisch: Voß, a. a. O., S. 110.

Über die Haupttangentenkurven der Regelflächen, insbeson-

dere der in einem linearen Komplexe enthaltenen Regelflächen vom Geschlecht Null, s. noch Voß, *Math. Ann.* **12**, 485 (1877).

Cremona, *Ann. di Mat.* (2) **1**, 248 (1868) hatte schon die Regelflächen vom Geschlecht Null und der Ordnung $m+n$ mit zwei geradlinigen Leitlinien, einer m-fachen und einer n-fachen, untersucht und durch direkte Integration den algebraischen Charakter ihrer Haupttangentenkurven nachgewiesen. Vgl. auch Pittarelli, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) 7^1, 391, 452 (1891), (5) 3^2, 111, 148, 229, 264 (1894).

Über die Knotenkurve einer rationalen Regelfläche vgl. auch Sisam, *Amer. J.* **28**, 43 (1906).

Die Regelflächen vom Grade n mit einer $(n-1)$-fachen Geraden wurden, insbesondere bezüglich ihrer Abbildung auf eine Ebene, untersucht von Noether, *Math. Ann.* **3**, 194 (1871).

Die Abbildungsaufgabe wurde allgemein für die rationalen Regelflächen behandelt von Armenante, *Ann. di Mat.* (2) **4**, 50 (1870) und vollständiger von Clebsch, *Math. Ann.* **5**, 1 (1872), der ihre Einteilung in Gruppen je nach der Minimalordnung der auf ihnen enthaltenen *Leitkurven* (die alle Erzeugenden schneiden) durchgeführt hat. Mit Hilfe der Projektion aus höheren Räumen wurden sie untersucht von Veronese, *Math. Ann.* **19**, 224 (1882) und Segre, *Torino Atti* **19**, 355 (1884), der so u. a. auf geometrischem Wege alle Resultate wiedergewann, die Clebsch auf analytischem Wege gefunden hatte.

Analoge Untersuchungen hat Segre für die elliptischen Regelflächen (in einem Raum von beliebiger Dimensionenzahl) angestellt, *Torino Atti* **21**, 868 (1886), ebenso für die Regelflächen von beliebigem Geschlecht, *Math. Ann.* **30**, 203 (1887), **34**, 1 (1889), indem er die Unterscheidung in verschiedene Typen, die Leitkurven von niedrigster Ordnung und einzelne Spezialfälle, z. B. die Kegel, untersuchte.

Wir wollen noch den Ausdruck für das *Geschlecht einer Raumkurve* angeben, *die auf einer algebraischen Regelfläche (insbesondere einem algebraischen Kegel) verläuft.* Eine irreduzible Kurve von der Ordnung m und dem Geschlecht p verlaufe auf einer Regelfläche vom Grade n und dem Geschlecht π, sie sei für die Regelfläche s-fach und treffe jede Erzeugende in k Punkten. Wenn wir außerdem y die Anzahl der die Kurve berührenden Erzeugenden nennen und η die Anzahl der Kurvenpunkte, von denen je zwei zusammenfallende Erzeugende ausgehen, so finden wir nach dem Korrespondenzprinzip und der Zeuthenschen Formel (Bd. II^1, S. 343f.).

$$y = 2ms(k-1) - k(k-1)n,$$
$$\eta - y = 2k(\pi - 1) - 2s(p-1).$$

Für $s = 1$ wird $\eta = 0$, setzen wir dies ein und eliminieren y, so ergibt sich

$$p = (k-1)m + k(\pi - 1) - \frac{k(k-1)}{2}n + 1,$$

welche Formel man Segre verdankt: *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) 3^2, 3 (1887), *Math. Ann.* **34**, 2 (1889). Severi, *Torino Mem.* (2) **54**, 23 (1903) hat gezeigt, wie sie sich aus dem *Basissatz* für die Regelflächen ableiten läßt.

Ist die Regelfläche ein Kegel, so gilt die Formel noch, wenn man unter k die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte der Kurve mit den Erzeugenden versteht, so daß die Kegelspitze für die Kurve die Multiplizität $m - nk$ besitzt. Setzt man $m - nk = r$, so ergibt sich so, daß eine auf einem Kegel von der Ordnung n und dem Geschlechte π verlaufende Kurve, die r-mal durch die Kegelspitze geht und außerdem jede Erzeugende in k Punkten trifft (also die Ordnung $nk + r$ hat), von dem Geschlecht

$$p = \frac{k(k-1)}{2}n + (k-1)(r-1) + k\pi$$

ist. Diese Formel rührt her von R. Sturm, *Math. Ann.* **19**, 487 (1882).

Hat man auf einer irreduzibeln Regelfläche vom Grade n zwei irreduzible Kurven C_1, C_2, für welche die genannten Anzahlen m, s, k die Werte m_1, s_1, k_1 und m_2, s_2, k_2 haben, so ist die Anzahl der gemeinsamen Punkte von C_1, C_2

$$m_1 s_1 k_2 + m_2 s_2 k_1 - n k_1 k_2.$$

Vgl. Segre, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (4) 3^2, 3 (1887); B. Levi, *Torino Atti* **34**, 745 (1899); Severi, a. a. O.

§ 4. Metrische Eigenschaften von Raumkurven und Flächen.

Die unendlich fernen Punkte einer algebraischen Raumkurve oder Fläche lassen sich auf ähnliche Weise behandeln, wie es für die ebenen algebraischen Kurven in Bd. II^1, S. 428 geschehen ist. Vgl. insbesondere für die Flächen Painvin, *J. f. Math.* **65**, 112,

198 (1866); Biehler, *Nouv. Ann.* (3) **8**, 536 (1889), von denen der erste auch die *Asymptotenfläche* der gegebenen Fläche, d. h. die ihr längs ihrer Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene umschriebene abwickelbare Fläche, untersucht hat.

Verschiedene metrische Eigenschaften einer Raumkurve oder Fläche lassen sich wie bei den ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 432) aus der Polarentheorie herleiten. So die zu den Sätzen von Chasles, Liouville u. a. analogen Theoreme, die sich insbesondere auf die Zentren der mittleren Entfernungen gewisser Punktgruppen beziehen; hiermit haben sich beschäftigt Chasles, *Corr. math. et phys.* **6**, 1, 81 (1830); Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures II* (1830—31), p. 273ff. (1866); Liouville, *J. de Math.* (1) **6**, 345 (1841); Bäcklund, *Lund. Årsskr.* **8** (1871); Fouret, *Nouv. Ann.* (3) **9**, 258 (1890); Michel, *Ann. éc. norm.* (3) **18**, 121 (1901); Stuyvaert, *Belgique Bull.* 1908, S. 662. Es ergibt sich z. B. (Chasles, Poncelet), daß *das Zentrum der mittleren Entfernungen aller Berührungspunkte einer gegebenen algebraischen Fläche F mit den zu einer gegebenen Ebene parallelen Tangentialebenen dasselbe ist, wie auch jene Ebene gewählt wird; dieser Punkt ist der Pol der unendlich fernen Ebene bezüglich der als Hüllfläche aufgefaßten Fläche F* und heißt der *Mittelpunkt* von *F*. Über diesen Satz vgl. auch d'Ocagne, *Bull. Soc. Math.* **18**, 108 (1890).

H. Graßmann, *J. f. Math.* **25**, 67 (1842), *Werke II*[1], S. 42; C. Neumann, *Ann. di Mat.* (2) **1**, 283 (1867), *Zschr. Math. Phys.* **12**, 425 (1867) haben weiter gefunden, daß dieser Punkt mit dem von Steiner, *J. f. Math.* **21**, 33 (1840), *Werke II*, S. 97 als *Krümmungsschwerpunkt* der Grundfläche *F* bezeichneten Punkt zusammenfällt, d. h. mit dem Schwerpunkt von *F*, wenn man sich diese Fläche mit einem Massenbelag, dessen Dichtigkeit dem Produkt der Hauptkrümmungsradien proportional ist, bedeckt denkt.

Analog ist (Chasles, Poncelet) *das Zentrum der mittleren Entfernungen aller Punkte einer algebraischen Raumkurve, in denen die Tangente einer gegebenen Ebene parallel ist, ein fester, von der betrachteten Ebene unabhängiger Punkt.*

Ein anderer Satz sagt aus, daß, *wenn eine algebraische Raumkurve von einer Reihe paralleler Ebenen geschnitten wird, die Zentren der mittleren Entfernungen für die Schnittpunkte auf einer bestimmten Geraden liegen.*

Es ergibt sich auch: *das Zentrum der mittleren Entfernungen*

aller Schnittpunkte dreier algebraischer Flächen fällt mit dem Zentrum der Punkte, in denen eine beliebige dieser Flächen von den gemeinsamen geraden Asymptoten der anderen beiden Flächen getroffen wird, zusammen (Liouville).

G. Humbert, *J. de Math.* (5) **1**, 181 (1895) hat gezeigt, daß auf einer algebraischen Raumkurve sich immer auf unendlich viele Arten eine gewisse Anzahl von Bögen bestimmen läßt, deren algebraische Summe sich durch rationale Funktionen darstellen läßt. Es ergibt sich z. B., daß, wenn man an eine algebraische Raumkurve mit beliebigen Singularitäten, die aber die unendlich ferne Ebene nicht berührt, alle Tangenten zieht, die mit einer festen Geraden einen gegebenen Winkel bilden, und dann den Winkel sich verändern läßt, die algebraische Summe der von den Berührungspunkten durchlaufenen Bögen in jedem Augenblick gleich Null ist. Ähnliche Sätze ergeben sich, wenn man die Normalebenen der Kurve betrachtet, die eine Kugel berühren.

Schubert, *Kalkül*, S. 298, findet, daß, wenn zwei Flächen von den Ordnungen n, n' und den Rängen r, r' gegeben sind, auf ihrer Schnittkurve $nr' + n'r$ Punkte existieren, in denen die beiden Flächen sich rechtwinklig schneiden.

Cremona, *Bologna Mem.* (3) **1**, 49 (1870) hat die Differentialgleichungen der isotropen Linien, der Krümmungslinien und der Haupttangentenkurven aller auf eine Ebene abbildbaren algebraischen Flächen bestimmt und untersucht.

Laisant, *Bull. Soc. Math.* **18**, 141 (1890) hat gefunden, daß die Punkte, für welche die Quadratensumme der von ihnen auf eine algebraische Fläche gefällten Lote konstant ist, auf einer Fläche 2. Ordnung liegen. Verändert man die Summe, so bleiben die so gewonnenen Flächen 2. Ordnung konzentrisch und homothetisch, ihr gemeinsamer Mittelpunkt hat die Eigenschaft, daß für ihn die Quadratensumme der Lote ein Minimum wird.

Allgemeiner hat Fouret, *Mém. Soc. philom.* 1888, p. 77, die Ordnung der Fläche angegeben, für deren Punkte die aus ihnen auf eine algebraische Fläche gefällten Lote einer gegebenen algebraischen Gleichung genügen.

Lie, *Math. Ann.* **14**, 331 (1879), **15**, 465 (1879) hat die algebraischen Minimalkurven und Flächen eingehend studiert. Er hat u. a. das Problem aufgestellt, alle algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, welche einer gegebenen abwickelbaren algebraischen Fläche F einbeschrieben sind, und es in zwei besonderen Fällen, nämlich wenn F ein Kegel ist, und wenn man für eine beliebige F schon eine algebraische ihr einbeschriebene Minimalfläche kennt,

gelöst. In Zusammenhang mit diesem Gegenstand hat Lie einige Sätze über die abwickelbare Fläche (Evolute) angegeben, welche von den Normalebenen einer algebraischen Raumkurve umhüllt wird.

In voller Allgemeinheit wurde das Problem von Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces I,* Paris 1887, p. 405 ff. gelöst, sowohl analytisch, wie indem er geometrische Konstruktionen für die gesuchten Minimalflächen, die diejenigen von Lie als besonderen Fall enthalten, angab.

In der Absicht, die Eigenschaften der algebraischen Minimalflächen durch rein geometrische Überlegungen zu erhalten, hat R. Sturm, *J. f. Math.* **105**, 101 (1889), die Fläche F untersucht, welche der Ort der Mitten der die Punkte einer Kurve C mit den Punkten einer anderen, C', oder die Punkte einer und derselben Kurve paarweise verbindenden Strecken ist. Wenn die zwei Kurven C, C' verschieden sind und die Ordnungen n, n' und die Ränge r, r' haben, so ist F von der Ordnung nn' und der Klasse rr'. Die unendlich fernen Punkte von C, C' sind bzw. n'- und n-fache (konische) Punkte von F; die nn' Verbindungslinien jener mit diesen bilden den vollständigen Schnitt mit der unendlich fernen Ebene. Bei rr' Sehnen haben die Endpunkte parallele Tangenten; die Mitten dieser Sehnen sind uniplanare Doppelpunkte von F.

Die Fläche, auf welcher die Mitten der Sehnen einer Kurve C von der Ordnung n und dem Range r liegen, ist von der Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}$ und der Klasse $\frac{r(r-1)}{2}$; sie hat die unendlich fernen Punkte von C zu $(n-1)$-fachen (konischen) Punkten, enthält die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien dieser Punkte, sowie die n Asymptoten von C und die Kurve C selbst als Haupttangentenkurve. Endlich führt jedes Paar paralleler Tangenten von C zu einem uniplanaren Knotenpunkte.

Wenn eine algebraische Raumkurve ohne singuläre Punkte, die mit dem unendlich fernen Kugelkreis in keiner besonderen Beziehung steht, von der Ordnung m, der Klasse m', dem Range r ist und b die Klasse ihrer doppeltberührenden abwickelbaren Fläche wird, so ist die *Fußpunktkurve* eines allgemeinen Punktes des Raumes (d. h. die Kurve, auf der die Fußpunkte der aus dem Punkte auf die Tangenten der Kurve gefällten Lote liegen) von der Ordnung $2r$, von der Klasse $2m + 3r$, von dem Range $m + m' + 2r$ und besitzt $\frac{3}{2}r(r-1) + m' + b$ scheinbare Doppelpunkte. Dies letztere ist demnach auch die Anzahl der Geraden, die von einem allgemeinen

Punkte ausgehen und auf zwei Tangenten der gegebenen Kurve senkrecht stehen. Die von den *Normalebenen* gebildete abwickelbare Fläche ist von der Klasse $m + r$ und von dem Range $3m + m'$. Bezüglich dieser Eigenschaften vgl. Zeuthen, *Nouv. Ann.* (2) **7**, 385 (1868); R. Sturm, *Math. Ann.* **6**, 241 (1873).

Halphen, *Bull. Soc. Math.* **2**, 69 (1874) hat hinzugefügt, daß die von den rektifizierenden Ebenen umhüllte Fläche von der Klasse $4r - 3m$, die Regelfläche der Binormalen vom Grade $3r - 2m$ und die Regelfläche der Hauptnormalen vom Grade $4r - 2m$ ist, daß die Kurve, die den Ort der Krümmungsmittelpunkte bildet, von der Ordnung $m' + 3r$ ist, und daß außerdem $(m-1)(3r-2m) - r$ Binormalen existieren, welche die Kurve ein zweites Mal treffen, $(m-1)(4m-2r) - 3r$ Hauptnormalen, welche die Kurve wieder treffen, und $\frac{1}{2}(m+r)(m+r-1) - 2r$ Geraden in endlicher Entfernung, welche zu der Kurve in zwei verschiedenen Punkten normal sind. Vgl. auch Petersson, *Lund Afhandl.* 1886, und R. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verw. II*, Leipzig 1908, S. 124. Bezüglich der Anzahl der Doppelnormalen vgl. auch Pieri, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **2**[1], 327 (1886).

Wenn die Kurve vom Geschlecht p ist und nicht auf einer Kugel liegt, so folgt aus einer Formel in Kap. XXXVI, daß sie $10m + 20(p-1)$ Punkte (Scheitel) besitzt, in denen sie mit der Schmiegungskugel eine Berührung von höherer als der dritten Ordnung hat.

Andere metrische Eigenschaften dei Kurven mit beliebigen Singularitäten hat Halphen geliefert, *Ass. française pour l'avancement* 1877, p. 132, *Bull. Soc. Math.* **6**, 32 (1878).

Zwei Raumkurven von den Ordnungen n, n' und den Rängen r, r' haben $(n+r)(n'+r')$ gemeinsame Normalen; zwei Flächen von den Ordnungen n, n', den Klassen m, m' und den Rängen r, r' haben

$$mn' + m'n + (m+r)(m'+r')$$

gemeinsame Normalen; eine Fläche von der Ordnung n, der Klasse m und dem Range r und eine Raumkurve von der Ordnung n' und dem Range r' haben $nr' + (m+r)(n'+r')$ gemeinsame Normalen. Bezüglich dieser Anzahlen vgl. Fouret, *Bull. Soc. Math.* **6**, 43 (1877), für die zweite von ihnen auch Halphen, *C. R.* **68**, 145 (1869); Rindi, *Rend. Circ. mat.* **5**, 106 (1891).

Für eine algebraische Fläche F von der Ordnung n, der Klasse m und dem Range r wird die *Fußpunktfläche* eines allgemeinen Punktes des Raumes (d. h. der Ort der Fußpunkte aller

aus dem Punkt auf die Tangentialebenen der Fläche F gefällten Lote) von der Ordnung $2m$, der Klasse $n + 2m + 2r$, dem Range $2m + 2r$, und sie hat in dem betrachteten Punkte einen m-fachen Punkt.

Eine Regelfläche vom Grade n und Range r mit einer Doppelkurve von der Ordnung δ liefert eine *Fußpunktkurve* (auf der die Fußpunkte der aus einem Punkte auf die Erzeugenden gefällten Lote liegen) von der Ordnung $2n$, der Klasse $3r + \theta$, dem Range $2n + r$, mit $\frac{3}{2}n(n-1) + \delta$ scheinbaren Doppelpunkten, wobei mit θ die Anzahl der Kuspidalerzeugenden der Regelfläche bezeichnet ist.

Für diese Sätze vgl. R. Sturm, *Math. Ann.* **6**, 245 (1873), 7, 580 (1874).

Von einer Fläche F der Ordnung n, der Klasse m, des Ranges r mögen α Haupttangenten in einer gegebenen Ebene liegen, σ durch einen gegebenen Punkt gehen. Ist g eine allgemeine Gerade des Raumes, so bilden die Normalen von F, die g schneiden, eine Regelfläche N, von der g eine l-fache Leitlinie, wenn l die Anzahl der Normalen von F ist, die durch einen gegebenen Punkt gehen; der Ort der Fußpunkte dieser Normalen ist eine Kurve, die wir B nennen wollen. Ferner bezeichne n' den Grad und r' den Rang von N, δ die Ordnung der Doppelkurve D von N, d die Anzahl der Treffpunkte von D mit g, ν die Ordnung und ϱ den Rang von B, μ die Klasse der Tangentenfläche von F längs B, n'' und m'' die Ordnung und die Klasse der *Krümmungsmittelpunktsfläche* (Zentralfläche) von F, q die Anzahl der Torsallinien von N, deren Torsalpunkt nicht auf g liegt; endlich mögen wir, indem wir aus den Punkten von g die Normalen auf F fällen und ihre Fußpunkte paarweise verbinden, eine Regelfläche vom Grade v erhalten (auf der B die Multiplizität $n + r + m - 1$ besitzt). Dann ergibt sich

$$l = n + m + r,$$

$$\nu = n + r,$$

$$\mu = m + r,$$

$$\varrho = 3n + m + \alpha + \sigma,$$

$$q = n + m + \alpha + \sigma,$$

$$n' = n + m + 2r,$$

$$r' = 3n + 3m + 2r + \alpha + \sigma,$$

$$n'' = 3n + 3m + \alpha + \sigma,$$

$$m \quad : n + m + \alpha + \sigma,$$

$$\delta = \tfrac{1}{2} r(2n + 2m + 3r) - \tfrac{3}{2}(n + m + r) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \sigma),$$

$$d = r(n + m + r) - \tfrac{1}{2}(3n + 3m + 2r) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \sigma),$$

$$v = (n + m + r)(n + r) - \tfrac{1}{2}(5n + 3m + 2r) - \tfrac{1}{2}(\alpha + \sigma).$$

Vgl. R. Sturm, *Math. Ann.* **7**, 567 (1874).

Der Wert von l war bereits von Salmon, *Cambr. and Dublin Math. J.* **3**, 47 (1848) und von Zeuthen, *Nouv. Ann.* (2) **7**, 391 (1868) angegeben worden, und für eine allgemeine Fläche schon vorher von Terquem, *J. de Math.* (1) **4**, 175 (1839), *Cambr. Math. J.* **2**, 11 (1841); vgl ferner August, *J. f. Math.* **68**, 242 (1868) und von Mannheim, *C. R.* **70**, 1025 (1870) [vgl. *Principes et développ. de géom. cinématique,* Paris 1894, S. 320]; August gibt auch den Wert von v und Mannheim den von n' an. Vgl. auch de Jonquières, *Ann. di Mat.* (2) **8**, 324 (1877).

Der Wert von n'' wurde für eine allgemeine F_n von Zeuthen, a. a. O. S. 397, ermittelt; die Werte von ϱ, n'', m'' stehen bei Darboux, *C. R.* **70**, 1328 (1870), die von n'', m'' bei Marcks, *Math. Ann.* **5**, 27 (1872), die Werte von n'', m'' und einigen anderen auf die Zentralfläche bezüglichen Zahlen, darunter die Ordnungen der Doppelkurve und der Kuspidalkurve, finden sich bei Bäcklund, *Öfversigt Vet. Akad. Handlingar, Stockholm* 1872, die allgemeinen Werte von n'', m'' bei S. Roberts, *London M. S. Proc.* **4**, 302 (1873).

Voß, *Math. Ann.* **16**, 560 (1880), und besonders *München Akad. Abh.* **16**², 245 (1887), hat sich ausführlich mit der *projektiven Zentralfläche* einer allgemeinen F_n beschäftigt, indem er als absolutes Gebilde eine Fläche zweiten Grades oder, als Grenzfall, einen Kegelschnitt annimmt. Diese Zentralfläche läßt sich auch definieren als die Brennfläche der Kongruenz, welche die Verbindungslinien der Punkte von F_n mit den Polen der zugehörigen Tangentialebene bezüglich einer Fläche zweiten Grades bilden. Voß hat für die Zentralfläche insbesondere folgende Anzahlen bestimmt:

Ordnung der Doppelkurve

$$2n^2(n-1)^2(2n-1)^2 - 2n(n-1)(19n-26),$$

Ordnung der Rückkehrkurve

$$2n(n-1)(11n-16),$$

Rang der Zentralfläche

$$6n(n-1)^2,$$

Ordnung der parabolischen Kurve

$$6n(n-1)(5n-8),$$

Klasse der doppeltberührenden abwickelbaren Fläche

$$2n(n-2)(n^4-n^2-14n+8),$$

Klasse der abwickelbaren Fläche der stationären Tangentialebenen

$$2n(n-2)(8n-5),$$

Klasse der abwickelbaren Fläche der Tangentialebenen in den Punkten der Rückkehrkurve

$$2n(n-2)(6n-1).$$

Vgl. auch E. Waelsch, *Diss.* Erlangen 1888, *Nova Acta Leop. Carol.* **52**, 287 (1888); *Wien. Ber.* **97**, 164 (1889), wo die Zentralfläche in Beziehung zum Komplex der *Polnormalen* aller Punkte des Raumes bezüglich der F_n betrachtet wird, indem als Polnormale eines Punktes die aus dem Punkt auf seine Polarebene bezüglich F_n gefällte Normale bezeichnet wird.

Die Regelfläche der Normalen einer F_n in den Punkten einer Kurve auf ihr (*Normalenfläche*) wurde untersucht von Peschka, *Wien. Ber.* **81**, 1128, 1163 (1880), **83**, 790 (1881), **84**, 30 (1882).

R. Sturm, *Math. Ann.* **9**, 573 (1876) findet, daß die Tangenten der Krümmungslinien einer Fläche von der Ordnung n, der Klasse m, dem Range r, mit α Haupttangenten in einer Ebene und σ durch einen Punkt, eine algebraische Kongruenz von der Ordnung $m+r+\sigma$ und der Klasse $n+r+\alpha$ bilden.

Die Anzahl der *Kreispunkte* (Punkte mit gleichen Hauptkrümmungsradien) einer allgemeinen F_n, die bei Salmon-Fiedler II, 2. Aufl., S. 43 (vgl. 3. Aufl. S. 49) zu groß angegeben ist, wurde richtiggestellt von Voß, *Math. Ann.* **9**, 241 (1876); sie beträgt

$$2n(5n^2-14n+11).$$

Vgl. auch Schubert, *Kalkül*, S. 244.

Das Problem wurde verallgemeinert von Berzolari, *Torino Atti* **30**, 756 (1895), der die Anzahl der Punkte einer allgemeinen F_n bestimmte, deren Haupttangenten eine gegebene algebraische Kurve von der Ordnung m in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Pieri, *Giorn. di Mat.* (2) **4**, 75 (1896) hat dasselbe Problem für eine nicht geradlinige Fläche mit gewöhnlichen Singularitäten von der Ordnung n und der Klasse n', für die r der Rang der von den stationären Ebenen gebildeten abwickelbaren Fläche und r' die dual entsprechende Zahl ist, behandelt. Es ergibt sich für die gesuchte Zahl

$$m^2 n' + \tfrac{1}{2} m (m-1)(2n + r + r'),$$

so daß die Anzahl der Kreispunkte ($m = 2$)

$$2n + 4n' + r + r'$$

wird.

Auf einer allgemeinen Regelfläche vom Grade n liegen $6n$ Kreispunkte, diese verteilen sich zu je dreien auf die $2n$ Erzeugenden, die den unendlich fernen Kugelkreis treffen. Vgl. R. Sturm, *Math. Ann.* **7**, 577 (1874).

Pieri a. a. O. hat auch gefunden, daß wenn man mit α und σ die Anzahlen der Haupttangenten, die in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt gehen, bezeichnet, die Paare der Haupttangenten, die von einem Punkte der gegebenen Fläche ausgehen und zueinander senkrecht sind, eine Regelfläche vom Grade

$$2n + 2n' + r + r' + \alpha + \sigma$$

bilden, die der Fläche längs der von den Punkten mit entgegengesetzt gleichen Hauptkrümmungsradien gebildeten Kurve von der Ordnung $2n + \alpha$ doppelt umschrieben ist. Er zeigte ferner, daß auf einer allgemeinen F_n $n(n-1)(n-3)(n^3 + 6n - 8)$ Haupttangenten existieren, die F_n in einem anderen Punkte unter rechtem Winkel schneiden, und

$$\tfrac{1}{2} n(n-1)(n-3)(n-4)(n^3 + 2n^2 + 4n - 8)$$

Gerade, die die Fläche F_n in zwei Punkten berühren und sie in einem dritten Punkte unter rechtem Winkel schneiden. Pieri bewies endlich, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **2**^{2}, 40 (1886), daß eine allgemeine F_n

$$\tfrac{1}{2} n(n-1)(n^4 - n^3 + 2n^2 - 13n + 13)$$

Doppelnormalen besitzt.

S. Roberts, *London M. S. Proc.* **4**, 218 (1873) hat die Parallelfläche einer allgemeinen F_n untersucht, indem er insbesondere für sie alle charakteristischen Anzahlen bestimmte. Sie ist von der Ordnung $2n(n^2 - n + 1)$, der Klasse $2n(n-1)^2$, hat eine Kuspidalkurve von der Ordnung $4n(n-1)(2n-1)$ usw.

S. Roberts, *London M. S. Proc.* **5**, 90 (1874) hat auch die Parallelfläche einer abwickelbaren Fläche und einer Raumkurve behandelt. Die erste ist ebenfalls abwickelbar, und wenn die gegebene Fläche die Ordnung r, die Klasse n, eine Rückkehrkante von der Ordnung m und α stationäre Ebenen hat, werden die Werte derselben Anzahlen für die Parallelfläche der Reihe nach

$$2(r+n),\ 2n,\ 2(3n+m),\ 2\alpha;$$

aus ihnen lassen sich die übrigen Anzahlen für diese Fläche ableiten. Die Parallelfläche einer Raumkurve von der Ordnung m, der Klasse n und dem Range r ist eine *Röhrenfläche* von der Ordnung $2(r+m)$, der Klasse $2r$, mit einer Knotenkurve von der Ordnung $2(r+m)^2 - 2r - 11m - 3n$ und einer Kuspidalkurve von der Ordnung $2(3m+n)$.

Betreffs einiger der vorstehenden metrischen Eigenschaften siehe auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 43, 162, 171, 355.

Burali-Forti, *Rend. Circ. Mat.* **4**, 57 (1890) hat die *Isophoten* (Linien gleicher Helligkeit bei parallel auffallendem Licht) einer algebraischen Regelfläche bestimmt; ist diese vom Grade n und dem Geschlecht p, so sind jene von der Ordnung $4(n+p-1)$ und dem Geschlecht $n+2p-1$.

Metrische Eigenschaften *algebraischer Kegel* hat Laguerre behandelt, *Bull. Soc. Philom.* 1870, 1872, *Nouv. Ann.* (2) **18**, 64 (1879), *Œuvres II*, p. 131, 183, 543.

Für die *Krümmung* einer algebraischen Fläche gelten die allgemeinen Formeln der Krümmungstheorie. Insbesondere hat Painvin, *C. R.* **68**, 133 (1869), *J. f. Math.* **72**, 340 (1870), die Krümmung einer algebraischen Fläche in einem mehrfachen Punkt bestimmt.

Die Krümmung einer algebraischen Fläche, die durch ihre Tangentialgleichung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt ist, wurde behandelt von Painvin, *C. R.* **73**, 902 (1871), *J. de Math.* (2) **17**, 219 (1872); Jeffery, *Quart J.* **12**, 86 (1872); Franz, *Archiv Math. Phys.* **55**, 105 (1873). Ist $f(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ die Tangentialgleichung der Fläche und n' der Grad dieser Gleichung, ferner H die Hessesche Kovariante

der linken Seite, so wird das Produkt der Hauptkrümmungsradien in einem beliebigen Punkte

$$-\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^2 H}{(n'-1)^2\left(\frac{\partial f}{\partial u_4}\right)^2}.$$

Painvin, *C. R.* **68**, 796 (1869), *Ann. di Mat.* (2) **4**, 281 (1871), hat die Schmiegungsebenen und die Krümmungsradien in einem mehrfachen Punkte einer Raumkurve bestimmt.

Painvin, *C. R.* **71**, 217 (1870), *J. de Math.* (2) **17**, 177 (1872) hat auch die Elemente der Rückkehrkante und die Krümmung einer abwickelbaren Fläche bestimmt, welche durch zwei Gleichungen in Ebenenkoordinaten definiert ist.

Kapitel XXXIII.

Die Geometrie auf einer algebraischen Fläche.

Von *Francesco Severi* in Padua.

§ 1. Die algebraischen Flächen in ihrem Verhalten gegenüber der Gruppe der birationalen Transformationen.

1. Die Anfänge der Geometrie auf einer Fläche.[1])

Zwei algebraische Flächen (wir verstehen darunter immer irreduzible Flächen), die zwei Räumen von beliebiger Dimensionenzahl angehören, heißen *in birationaler Korrespondenz* oder *birational äquivalent,* wenn die Koordinaten des laufenden Punktes auf der einen rationale Funktionen von den Koordinaten des laufenden Punktes auf der anderen sind. Eine algebraische Fläche liefert eine ganze Klasse von Flächen, die ihr birational äquivalent sind, jede von diesen bildet ein *projektives Bild* von den Flächen der Klasse.

---

1) Bei den Zitaten sind folgende Abkürzungen verwendet worden:

Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens usw. Math. Ann.* **2**, 1869 *(Theorie I)*; *Math. Ann.* **8**, 1874 *(Theorie II)*.

Enriques, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, Torino Memorie* (2), **44**, 1893 *(Ricerche)*.

Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche,* Soc. ital. dei XL Mem. (3) **10**, 1896 *(Introduzione)*.

Castelnuovo, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciate sopra una superficie algebrica, Ann. di Mat.* (2) **25**, 1897 *(Sistemi lineari)*.

Castelnuovo-Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche, Ann. di Mat.* (3), **6**, 1901 *(Questioni)*.

Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* vol. I et II, Paris 1897—1906 (Picard-Simart).

Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica, Torino Atti* **39**, 1906 *(Osservazioni)*.

Severi, *Il teorema d' Abel sulle superficie algebriche, Ann. di Mat.* (3) **12**, 1905 *(Teorema d' Abel)*.

Die Geometrie auf einer Fläche behandelt die Eigenschaften, die allen Flächen einer Klasse gemeinsam sind. Sie entstammt einer Bemerkung von Clebsch, *C. R.* **67**, 1238 (1868) und den grundlegenden Arbeiten von Noether (*Theorie I* und *II*), die sich als den Ausgangspunkt der besonders in Italien gepflegten algebraisch geometrischen Richtung ansehen lassen, während die transzendente Richtung besonders in Frankreich eine Stätte fand; in den klassischen Arbeiten von Picard, *C. R.* **99**, 961 und 1147, (1884), *J. de Math.* (4) **1**, 281 (1885), (4) **2** (1886), (4) **5**, 155 (1889) wurde der Begriff des Integrals eines zu der Fläche gehörigen totalen Differentials eingeführt und erläutert.

Unter den Namen derjenigen, welche diesen neuen Zweig der Geometrie begründet haben, muß auch der Name von Zeuthen genannt werden, dem man den ersten Beweis für die Invarianz des arithmetischen Geschlechtes verdankt, *Math. Ann.* **4**, 21 (1871), auf das schon Cayley, *Math. Ann.* **3**, 526 (1871) die Aufmerksamkeit der Mathematiker gelenkt hatte.

2. Fundamentalelemente einer Transformation. Auflösung der Singularitäten. Ausgezeichnete Kurven.

Sind F, F' zwei birational äquivalente Flächen, so ist die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Flächen nicht immer ausnahmslos eindeutig. Es können nämlich auf F Punkte, *Fundamentalpunkte der Transformation,* existieren, denen auf F' Kurven, sogenannte *Fundamentalkurven*, entsprechen, und analog Kurven auf F, denen Punkte von F' entsprechen. Diesen Umstand benutzt man in ausgiebiger Weise, um die mehrfachen Punkte und Linien einer Fläche auf weniger verwickelte singuläre Elemente zurückzuführen; es gelingt auf diese Art, schließlich zu Flächen zu gelangen, die der gegebenen birational äquivalent sind und gar keine Singularitäten besitzen. Man kann es auch so einrichten, daß die Transformation sich auf eine einfache Projektion in einem höheren Raum reduziert, so daß sich schließlich jede Fläche als Projektion einer singularitätenfreien Fläche ansehen läßt, die einem höheren Raum angehört. Der vollständige Beweis dieses Resultates stammt von B. Levi, *Torino Atti,* **33**, 66 (1897). Vorher hatten schon hierauf bezügliche Untersuchungen angestellt: Del Pezzo, *Rend. Circ. M.* **2**, 139 (1888) und **6**, 139 (1892); Kobb, *J. de Math.* (4), **8**, 385 (1892); Segre, *Ann. di Mat.* (2), **25**, 1 (1896). Im allgemeinen kann eine birationale, von mehrfachen Punkten freie Transformation einer gegebenen Fläche F keinem Raum von kleinerer Dimensionenzahl als 5 angehören. Ver-

langt man eine Fläche eines vierdimensionalen Raumes, die F birational äquivalent ist und die einfachst möglichen Singularitäten (gewöhnliche Singularitäten) besitzt, so findet man im allgemeinen eine Fläche mit einer endlichen Anzahl von *uneigentlichen Doppelpunkten,* die von Severi, *Rend. Circ. M.* **15**, 33 (1901) untersucht worden ist. Verlangt man hingegen eine Fläche des dreidimensionalen Raumes, die nur gewöhnliche Singularitäten besitzt und F birational äquivalent ist, so findet man im allgemeinen eine Fläche mit einer Doppellinie und einer endlichen Anzahl von dreifachen triplanaren Punkten, die auch für die Doppellinie dreifach sind. In besonderen Fällen kann man noch einfachere Singularitäten erhalten.

Nachdem festgelegt ist, daß in jeder Klasse von Flächen solche existieren, die keine mehrfachen Punkte besitzen oder nur gewöhnliche Singularitäten zeigen, kann man die ganze Geometrie auf einer Fläche so entwickeln, daß man sie auf derartige *Modelle* bezieht, indem man nur, wenn es nötig ist, die Resultate auf ein Modell mit irgendwelchen Singularitäten durch diejenigen Transformationen überträgt, die zu den diese Singularitäten auflösenden Transformationen invers sind.

Aber auch wenn man zwei singularitätenfreie und aufeinander birational bezogene Flächen F, F' ins Auge faßt, kann man nicht auf jeden Fall das Vorhandensein von Fundamentalelementen ausschließen. Man nennt *ausgezeichnete Kurve* jede Fundamentalkurve bei einer birationalen Transformation einer singularitätenfreien Fläche in eine andere, d. h. jede Kurve, die sich durch eine geeignete birationale Transformation der Fläche in einen *einfachen Punkt* verwandeln läßt.

Eine ausgezeichnete Kurve kann *von der ersten* oder *zweiten Art* sein, je nachdem es möglich ist oder nicht, sie in einen einfachen Punkt zu transformieren, ohne daß irgendeiner ihrer Punkte in eine neue ausgezeichnete Kurve übergeht. Eine ausgezeichnete Kurve der ersten Art ist z. B. die Kurve, die dem Projektionszentrum entspricht, wenn man eine Fläche eines Überraums auf eine Überebene projiziert. Hingegen ist eine ausgezeichnete Kurve zweiter Art jede Erzeugende einer Regelfläche, jede Gerade einer Ebene usw.

Castelnuovo-Enriques, *Questioni* p. 215, verdankt man das grundlegende Resultat, daß *jede Fläche, die nicht der Klasse der rationalen oder Regelflächen angehört, sich derart birational transformieren läßt, daß sie gar keine ausgezeichneten Kurven mehr enthält.* Die Flächen, die Regelflächen äquivalent sind, enthalten

unendlich viele ausgezeichnete Kurven (zweiter Art), die anderen Flächen enthalten hingegen nur eine endliche Zahl von ausgezeichneten Kurven (erster Art). Die Aufgabe, die Flächen von ausgezeichneten Kurven zu befreien, ist zuerst von Enriques, *Ricerche*, p. 194, *Introduzione*, p. 75 in einigen Fällen gestellt und gelöst worden.

§ 2. Lineare Kurvensysteme auf einer Fläche.

1. Erste Eigenschaften der linearen Systeme.

Das Kurvensystem, das aus einer Fläche F des d-dimensionalen Raumes S_d $(d \geqq 3)$ ein lineares System von Formen (algebraischen Mannigfaltigkeiten von $d-1$ Dimensionen)

$$(1) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0,$$

ausschneidet, heißt ein *lineares Kurvensystem* und wird mit $|C|$ bezeichnet, indem C die allgemeine, reduzible oder irreduzible Kurve des Systems bedeuten soll.

Je nach Belieben können wir zu dem System die eventuellen gemeinsamen Kurven von F und allen Formen (1) hinzurechnen oder nicht Das lineare System läßt sich auch definieren als die Gesamtheit der Niveaukurven der rationalen Funktion

$$\lambda_0 \frac{f_0}{f_r} + \qquad + \lambda_{r-1} \frac{f_{r-1}}{f_r}$$

des veränderlichen Punktes auf F. Längs der eventuellen festen Kurven wird die Funktion selbst unbestimmt. Außer diesen Kurven können die Kurven des linearen Systems andere Punkte, die für die C einfach oder mehrfach sind, (in endlicher Anzahl) gemein haben. Sie heißen *Basispunkte* des Systems.

Das System $|C|$ hat die Dimension r oder eine kleinere, je nachdem in dem System (1) keine Formen existieren, die F enthalten, oder es solche Formen gibt. Aber man kann immer aus (1) ein untergeordnetes System auswählen, derart daß auch dieses System das Kurvensystem $|C|$ liefert und dieselbe Dimensionenzahl wie dieses hat. Es bedeutet also die Voraussetzung, daß $|C|$ dieselbe Dimensionenzahl r wie (1) hat, keine wesentliche Einschränkung.

Fundamentalkurve des Systems $|C|$ heißt jede Kurve D, die den Kurven des Systems nur eine einzige Bedingung auferlegt, d. h. die mit den C keine veränderlichen Schnittpunkte gemein hat.

Durch r beliebige Punkte von F geht eine einzige Kurve des Systems C, und umgekehrt ist, wie Enriques, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **2**$_2$, 1 (1893), bewiesen hat, jedes auf F gezogene algebraische Kurvensystem, von dem durch r beliebige Punkte eine einzige Kurve geht, im allgemeinen linear. Wir sagen „im allgemeinen", weil wirklich zwei Ausnahmefälle eintreten können: der eine ist der Fall, wo $r = 1$ ist und es sich um einen *irrationalen Büschel* handelt, wie ihn z. B. die Erzeugenden einer Regelfläche vom Geschlecht $p > 0$ bilden, der zweite der Fall, wo $r > 1$ und die Kurven des Systems aus Kurven eines und desselben Büschels zusammengesetzt sind. Ein *lineares System* $|C|$ heißt *irreduzibel,* wenn seine allgemeine Kurve C irreduzibel ist, und *reduzibel* im entgegengesetzten Fall. Die Sätze, welche Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **15**, 24 (1882) für ebene Kurvensysteme bewiesen hat, gelten auch für beliebige Flächen, wie Enriques, *Introduzione,* p. 16, bewiesen hat. Vgl. auch Severi, *Torino Atti*, **41**, 207 (1906). Es läßt sich nämlich zeigen, daß der veränderliche Teil der allgemeinen Kurve eines reduziblen linearen Systems immer aus den Kurven eines Büschels besteht und daß die allgemeine Kurve eines linearen Systems außer den mehrfachen Linien der Fläche keine veränderlichen mehrfachen Punkte besitzen kann.

Ein lineares System $|C|$ heißt *einfach,* wenn diejenigen seiner Kurven, die durch einen beliebigen Punkt P der Fläche gehen, nicht von selbst auch durch andere mit P veränderliche Punkte gehen. Wenn dagegen jede Kurve mit P auch $\mu - 1$ andere mit P veränderliche Punkte enthält, heißt das System *zusammengesetzt,* und die ∞^2 Gruppen von μ Punkten, die den Kurven C eine einzige Bedingung auferlegen, bilden auf der Fläche eine *Involution vom Grade* μ.

Ist ein einfaches irreduzibles System $|C|$ gegeben von der Dimension $r \geqq 3$ und beziehen wir die Kurven C projektiv auf die Überebenen des Überraums S_r, so transformiert sich die Fläche F birational in eine Fläche F' von S_r, deren überebene Schnitte den Kurven C entsprechen. Man sagt, daß man auf diese Weise ein *projektives Bild des linearen Systems* $|C|$ konstruiert. Wendet man die analoge Konstruktion auf ein zusammengesetztes System an, so führt sie zu einer *mehrfachen Fläche.*

2. Vollständige lineare Systeme. Virtuelle und effektive Basispunkte.

Ein lineares System auf der Fläche F heißt *vollständig,* wenn es nicht in einem umfassenderen linearen Kurvensystem der-

selben Ordnung enthalten ist. Ein *unvollständiges System* ist in einem einzigen vollständigen System enthalten. Dieses Resultat läßt sich aus dem Noetherschen Restsatz ableiten. Aber ein Beweis, der den invarianten Charakter des vollständigen Systems sofort hervortreten läßt, findet sich bei Enriques, *Ricerche*, p. 196, *Introduzione*, p. 22. Andere Beweise findet man bei Segre, *Ann. di Mat.* (2), **22**, 103 (1894); Enriques, *Fondamenti*, p. 25.

Bei der vorstehenden Formulierung haben wir von den Basispunkten abgesehen, d. h. wir haben nicht berücksichtigt, daß man dem vollständigen linearen System auch die Bedingung auferlegen kann, in den Basispunkten von $|C|$ gegebene Multiplizitäten zu besitzen. Man sagt dann, daß die Basispunkte von $|C|$ als *virtuell nicht existierend* angesehen werden. Es kann auch wohl geschehen, daß das vollständige System, das $|C|$ enthält, keine Basispunkte besitzt, trotzdem das Teilsystem solche hat.

In anderen Fällen hingegen, besonders in Rücksicht auf die Umstände, die sich bei der Transformation der Fläche darbieten können, ist es nötig, die Basispunkte von $|C|$ *mit gegebenen virtuellen Multiplizitäten zu versehen,* die auch kleiner sein können als die effektiven Multiplizitäten der Kurven C in den betreffenden Punkten.

So erhält man z. B., wenn man die ebenen Kurven 3. Ordnung durch acht beliebige Punkte der Ebene hindurchgehen läßt, damit von selbst einen neunten Basispunkt, dessen Vorhandensein man von vornherein nicht kennt. In diesem Punkte hat man also eine virtuelle Multiplizität (0) angenommen, die kleiner als die effektive (1) ist. Diese Begriffe wurden für die ebenen linearen Kurvensysteme eingeführt von Jung, *Ann. di Mat.* (2) **15**, 277 (1887) und Castelnuovo, *Torino Mem.* (2) **42** (1891); für die linearen Kurvensysteme auf einer Fläche von Enriques, *Fondamenti,* p. 22, der sie in Hinsicht auf die birationalen Transformationen der Fläche behandelt hat, indem er bemerkte, daß eine ausgezeichnete Kurve, die aus einem Basispunkte P von $|C|$ hervorgeht, bei einer rationalen Transformation von F als Teil der transformierten Kurve so oft gezählt werden muß, wie die effektive Multiplizität die virtuelle Multiplizität von P übersteigt.

Der Satz von der Einzigkeit des vollständigen linearen Systems, dem ein gegebenes unvollständiges System angehört, gilt auch, wenn das betrachtete System bestimmte Basispunkte mit gegebenen virtuellen Multiplizitäten haben soll. Das System, von dem man ausgeht, kann sich auch auf eine einzige Kurve reduzieren. Jedes unvollständige System heißt in dem zugehörigen vollständigen System *vollständig enthalten.*

Im folgenden wollen wir mit $|C|$, wenn nichts anderes angegeben wird, das durch die Kurve C bestimmte vollständige System bezeichnen, und wenn auf dieser Kurve Basispunkte festgelegt werden, wollen wir es ausdrücklich bemerken.

Bei jeder birationalen Transformation der Flächen geht ein vollständiges lineares System wieder in ein solches über, aber die virtuellen Multiplizitäten in den eventuellen Basispunkten bleiben nicht immer erhalten, da ausgezeichnete Kurven eingeführt oder beseitigt werden können.

3. Die elementaren Operationen mit vollständigen linearen Systemen.

Sind auf einer Fläche F zwei vollständige lineare Systeme $|C_1|$ und $|C_2|$ gegeben, die in einem Punkte P die virtuellen Basismultiplizitäten s_1, s_2 besitzen, so existiert ein bestimmtes vollständiges System, das alle aus C_1 und C_2 zusammengesetzten Kurven enthält, wodurch jedem Punkte P die virtuelle Multiplizität $s_1 + s_2$ zugeschrieben wird. Ein solches System heißt die *Summe* der beiden gegebenen und wird mit $|C_1 + C_2|$ bezeichnet.

In ähnlicher Weise kann man die Summe irgendwelcher linearen Systeme definieren, woraus der Begriff des *Vielfachen* $|kC|$ *eines gegebenen linearen Systems* $|C|$ *für eine ganze Zahl* k ohne weiteres folgt.

Wenn nun die beiden Systeme $|C_1|$ und $|C_2|$ von der Art sind, daß eine C_1 in eine C_2 und eine Restkurve X zerfällt, so daß $C_2 + X$ eine *Totalkurve* von $|C_1|$ ist, dann ist jede C_2 in $|C_1|$ als Teilkurve enthalten, und die Restkurven gehören alle demselben linearen System $|X|$ an, das die *Differenz* der beiden gegebenen Systeme heißt und mit $|C_1 - C_2|$ bezeichnet wird. Das System $|X|$ hat einen Basispunkt von der virtuellen Multiplizität $r_1 - r_2$ in jedem für $|C_1|$ r_1-fachen und für $|C_2|$ r_2-fachen virtuellen Basispunkte, wobei r_1 notwendigerweise nicht kleiner als r_2 ist.

Dieser Satz, der die Definition der Differenz begründet, läßt sich kurz so aussprechen, daß man sagt, *jeder Rest einer Kurve eines gegebenen linearen Systems* $|C_2|$ *bezüglich eines anderen linearen Systems* $|C_1|$ *ist auch der Rest jeder anderen Kurve* C_2 *bezüglich desselben Systems* $|C_1|$, und so findet man den *Restsatz* in einer Form, die gegenüber den birationalen Transformationen invarianten Charakter hat.

4. Virtuelle Charaktere eines linearen Systems.

Für ein irreduzibles lineares System $|C|$, das mindestens die Stufe 1 besitzt, werden nun zwei wichtige numerische Charaktere eingeführt.

a) Der *virtuelle Grad n*, welcher die Anzahl ($\geqq 0$) der effektiven Schnittpunkte zweier Kurven C mit der gehörigen Multiplizität gerechnet bedeutet, wobei man für jeden s-fachen virtuellen Basispunkt s^2 subtrahieren muß. Der virtuelle Grad fällt mit dem effektiven Grad zusammen, wenn die Basispunkte von C mit ihren effektiven Multiplizitäten gerechnet werden.

b) Das *virtuelle Geschlecht* π, welches durch die Formel definiert wird

$$\pi = \varrho + \sum \frac{t(t-1) - s(s-1)}{2},$$

wo ϱ das effektive Geschlecht (im Riemannschen Sinne) der allgemeinen Kurve C bedeutet, $s\,(\geqq 0)$ die Multiplizität eines virtuellen Basispunktes und $t\,(\geqq 0)$ die effektive Multiplizität desselben Punktes. Die Summation wird dabei auf alle effektiven Basispunkte erstreckt. Sind zwei Kurven C_1, C_2 ohne gemeinsame Teile gegeben, so wird *die Zahl ihrer virtuellen Schnittpunkte* festgelegt, indem man für jeden virtuellen Basispunkt, der für C_1 s_1-fach und für C_2 s_2-fach ist, von der Zahl ihrer effektiven Schnittpunkte $s_1 s_2$ Einheiten abzieht.

Der virtuelle Grad n und das virtuelle Geschlecht π des irreduziblen Systems $|C_1 + C_2|$, das die Summe zweier linearen Systeme $|C_1|$, $|C_2|$ bildet, deren Dimension > 1 ist und die nicht in einen Büschel zusammenfallen, werden gegeben durch

$$n = n_1 + n_2 + 2i, \tag{1}$$

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1, \tag{2}$$

wo n_1, π_1; n_2, π_2 die analogen virtuellen Charaktere der Systeme $|C_1|$, $|C_2|$ und i die Zahl der virtuellen Schnittpunkte einer allgemeinen C_1 mit einer allgemeinen C_2 bedeutet.

Diese beiden Formeln erlauben, auf die linearen reduziblen Systeme den Begriff des virtuellen Grades und virtuellen Geschlechts auszudehnen, so daß schließlich die Formeln (1), (2) für jede zusammengesetzte Kurve $C_1 + C_2$ gelten, welches auch die Voraussetzungen über die Natur der Systeme

$|C_1|$ $|C_1 + C_2$

seien.

Für die Begriffe und Definitionen in dieser und der vorhergehenden Nummer vgl. man Enriques, *Introduzione*, p. 22, *Fondamenti*, p. 25. Andere Beweise der Formel (2), die wie die erste Entdeckung der virtuellen Charaktere Noether, *Acta Math.* **8**, 182 (1886) zu danken ist, findet man bei Picard-Simart, t. II, p. 106 und Severi, *Veneto Ist. Atti* **68**, 830 (1909).

§ 3. Adjungierte Systeme. Geometrische und numerische Invarianten.

1. Der Fundamentalsatz der Adjunktion.

Auf der Fläche F betrachten wir zunächst ein lineares System $|C|$ von der Dimension $r \geqq 1$, das nicht mehr als ∞^{r-2} zerfallende Kurven enthalten und keine effektiven Basispunkte besitzen soll. Die Kurven C' der Fläche, die durch die Bedingung festgelegt werden, daß sie auf einer allgemeinen C Gruppen der kanonischen Reihe ausschneiden sollen, gehören einem und demselben linearen System $|C'|$ an, das zu $|C|$ *adjungiert* heißt. Ist $|D|$ ein zu $|C|$ analoges System, so gilt die Beziehung

$$C + D' | = | C' + D \tag{1}$$

welche den *Fundamentalsatz der Adjunktion* bildet. Diese Beziehung erlaubt, die Definition des adjungierten Systems auf ein beliebiges lineares System auszudehnen. Man definiert zuerst das adjungierte System $|E'|$ eines linearen Systems $|E|$, das von Basispunkten virtuell frei ist, durch die Relation

$$|E'| = |E + C' - C|$$

und bestätigt, daß $|E'|$ von der Wahl des (von Basispunkten freien) Systems $|C|$ unabhängig wird. Dann geht man zu der Definition des adjungierten Systems eines Systems $|H|$ mit bestimmten Basispunkten über, indem man das adjungierte System von $|H|$ ohne Rücksicht auf die Basispunkte betrachtet und diesem System einen virtuellen $(s-1)$-fachen Basispunkt für jeden s-fachen virtuellen Basispunkt von $|H|$ auferlegt.

Das System $|K'|$, das einem beliebigen System $|K|$ adjungiert ist, ist invariant für die Transformationen von F, die keine ausgezeichneten Kurven einführen, während, wenn beim Übergang von F zu F' ausgezeichnete Kurven eingeführt werden, das transformierte System von $|K'|$ mit dem adjungierten System des $|K|$

entsprechenden Systems nur dann zusammenfällt, wenn es um die ausgezeichneten Kurven vermehrt wird, die aus den Punkten von F, welche keine Basispunkte von $|K|$ sind, entstehen.

Die Operation $+ C' - C$, die nach (1) den Übergang von jedem System $|K|$ zu dem adjungierten System vermittelt, heißt die *Operation der Adjunktion.* Wenden wir sie wiederholt an, so erhalten wir aus $|K|$ die im allgemeinen unbegrenzte Reihe

$$|K|, \quad |K'|, \quad |K''|, \ldots,$$

in welcher jedes System dem vorhergehenden adjungiert ist. *Der einzige Fall, in welchem diese Reihe der sukzessiven Adjungierten nach einer endlichen Zahl von Gliedern abbricht, ist der, wo die Fläche der Klasse der Regelflächen angehört.* Vgl. Castelnuovo-Enriques, *Questioni,* p. 212. Für das Vorstehende vgl. man Enriques, *Introduzione,* p. 47 und in vereinfachter Darstellung *Fondamenti,* p. 33. Ein noch einfacherer Weg ist später von Severi, *Ven. Ist. Atti,* **65**, 629 (1906) gewiesen worden, der für die Definition des adjungierten Systems und den Fundamentalsatz die Äquivalenzkriterien benutzt, von denen in § 5 die Rede sein wird. Die Betrachtung des adjungierten Systems (von der Ordnung $n - 3$) eines Systems von ebenen Kurven (der Ordnung n) geht auf Brill und Noether, *Math. Ann.* **7**, 280 (1873), zurück. Die Invarianz des Systems ist von Noether, *Math. Ann.* **23**, 311 (1883) bewiesen worden. Vgl. auch Castelnuovo, *Torino Mem.* (2) **42** (1891). Die systematische Verwendung des adjungierten Systems eines Systems von ebenen Kurven findet man zum erstenmal bei S. Kantor, *C. R.* **100**, 343 (1885), *Napoli Acc. Mem.* (2) **4**, (1891), *J. f. Math.* **114**, 50 (1895), *Acta Math.* **19**, 115 (1895) und später bei Castelnuovo, a. a. O.

2. Kanonisches System. Geometrisches Geschlecht.

Die Fundamentalrelation (1) zeigt, daß, wenn ein besonderes System $|C|$ in der eigenen Adjungierten $|C'|$ enthalten ist, dasselbe auch für jedes andere System der Fall ist und die Differenz $|C' - C|$ von der Wahl des Systems $|C|$ unabhängig wird. Zu dem System $|C' - C|$ gehören als feste Bestandteile die eventuellen ausgezeichneten Kurven; das System $|K|$, das man erhält, wenn man von diesen Bestandteilen absieht, heißt das *kanonische System* der Fläche F.

Aus dieser Definition geht sofort hervor, daß *das kanonische System für alle birationalen Transformationen von F invariant ist,*

während das System $|C' - C|$ nur für die Transformationen invariant ist, die keine ausgezeichneten Kurven einführen oder beseitigen. Man sagt deshalb, daß $|K|$ eine *absolute Invariante* ist, während $|C' - C|$ eine *relative Invariante* (bei der von den ausgezeichneten Kurven abzusehen ist) bedeutet.

Die Anzahl der linear unabhängigen kanonischen Kurven K heißt das *geometrische Geschlecht* der Fläche und wird mit p_g bezeichnet. Für die Flächen, die kein kanonisches System besitzen, muß man $p_g = 0$ setzen. Hierzu gehören z. B. die rationalen und die Regelflächen. Wenn $|C'|$ mit $|C|$ zusammenfällt oder sich davon nur durch ausgezeichnete Kurven unterscheidet, sagt man, daß *die Fläche eine kanonische Kurve von der Ordnung 0 besitzt;* in diesem Falle ist $p_g = 1$. Hierzu gehört z. B. der Fall der allgemeinen Fläche 4. Ordnung.

Das geometrische Geschlecht ist invariant für alle birationalen Transformationen der Fläche.

Wenn auf F das System $|C' - C|$ nicht existiert, so kann es doch geschehen, daß das System $|iC' - iC|$ existiert, wo i eine passend gewählte ganze positive Zahl bedeutet. Dies läßt sich an Beispielen bestätigen, von denen wir einige noch angeben werden (§ 8). Daraus folgt aber, daß die durch die Systeme vom Typus $|iC' - iC|$ gelieferten Charaktere wesentlich neue Invarianten der Fläche sein können. Es ist deshalb angezeigt, die *mehrkanonischen Systeme* zu betrachten, indem man als *i-kanonisches System*, wenn es existiert, das System $|iC' - iC|$, von ausgezeichneten Bestandteilen befreit, bezeichnet, und die Anzahl der linear unabhängigen i-kanonischen Kurven heißt das *i-Geschlecht P_i*, für $i = 2$ insbesondere das Doppelgeschlecht von F.

Das geometrische Geschlecht p_g $(= P_1)$ wurde von Clebsch, *C. R.* **67**, 1238 (1868) eingeführt. Der erste algebraische Beweis für die Invarianz von p_g und des kanonischen Systems wurde von Noether, *Theorie II*, S. 515, geführt, der die Frage von einem später noch zu erörternden projektiven Gesichtspunkte aus behandelte. In dieser Arbeit von Noether sind auch die Fälle, wo das kanonische System reduzibel ist, angegeben.

Noether, *C. R.* 103, 734 (1886), und Castelnuovo, *Lomb. Ist Rend.* (2) **24**, 132 (1891), haben bemerkt, daß jede Kurve $C_0 + K$, wo K eine kanonische Kurve von F und C_0 eine Kurve eines irreduziblen Systems $|C|$ bedeutet, aus einer beliebigen Systemkurve C eine kanonische Gruppe ausschneidet. Der Beweis, daß diese Eigenschaft wirklich die kanonischen Kurven charakterisiert, ebenso wie die Definition des kanonischen Systems

der mehrkanonischen Systeme und der zugehörigen Charaktere p_g, P_i in ihrem Zusammenhange mit dem Fundamentalsatz der Adjunktion sind von Enriques, *Introduzione*, p. 63, *Fondamenti*, p. 38 gegeben worden. Der Zusammenhang zwischen dem kanonischen System zweier Flächen F, F', die in einer Korrespondenz $(1, n)$ stehen, findet sich bei Enriques, *Ricerche*, p. 229. Für zwei Flächen, die in einer Korrespondenz (n, n') stehen, vgl. Severi, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **36**, 495 (1903).

3. Numerische Invarianten.

Man betrachte auf F ein lineares System $|C|$, das von Basispunkten virtuell frei ist, den virtuellen Grad n und das virtuelle Geschlecht π besitzt, und berechne mit Hilfe der Formeln in § 2, Nr. 4 den virtuellen Grad und das virtuelle Geschlecht des Systems $|C' - C|$ so, als ob dieses System immer existierte, dann erhält man die Ausdrücke

$$(1) \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= n' - 4(\pi - 1) + n, \\ \omega &= \pi' - 3(\pi - 1) + n, \end{aligned}$$

wo n', π' den virtuellen Grad und das virtuelle Geschlecht von $|C'|$ bezeichnen. Diese Ausdrücke ändern sich nach der Art ihrer Definition nicht, wenn man $|C|$ verändert, so daß sie Charaktere der Fläche selbst sind. Sie sind *relative Invarianten* gegenüber den birationalen Transformationen von F, weil sie sich für jede ausgezeichnete Kurve erster Art, die eingeführt oder beseitigt wird, um eine Einheit vermindern oder vermehren.

Die beiden Invarianten sind nicht unabhängig. Aus der Beziehung

$$(2) \qquad n' = \pi + \pi' - 2,$$

die zwischen den Charakteren von C und C' besteht, folgt in der Tat die Relation

$$(3) \qquad \omega = \omega_1 - 1,$$

weshalb man sich gewöhnlich auf die Betrachtung der Invariante ω beschränkt. Vgl. Enriques, *Introduzione*, p. 71, *Fondamenti*, p. 40, Castelnuovo-Enriques, *Questioni*, p. 180.

Wenn die Fläche eine endliche Anzahl e von ausgezeichneten Kurven erster Art besitzt, so wird der Ausdruck $\omega + e$ eine *absolute Invariante*, die mit dem von Noether eingeführten *Kurvengeschlecht* $p^{(1)}$ zusammenfällt. Sie bedeutet nämlich das virtuelle

Geschlecht des kanonischen Systems. Was die absolute Invariante $\omega_1 + e$ betrifft, so fällt sie mit dem virtuellen Grad $p^{(2)}$ des kanonischen Systems zusammen, und die Gleichung (3) verwandelt sich in die Gleichung

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1, \tag{4}$$

die von Noether, *Theorie II*, S. 521, herrührt.

Ein sehr nützlicher neuer Ausdruck von ω wurde von Castelnuovo, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **6**, 372, 406 (1897) angegeben:

$$\omega - 1 = (\pi - \pi') - (\pi' - \pi''),$$

wobei π, π' wieder die virtuellen Geschlechter von $|C|$, $|C'|$ und π'' das virtuelle Geschlecht des adjungierten Systems $|C''|$ von $|C'|$ bezeichnet.

Von einem anderen mehr elementaren Gesichtspunkte aus, bei dem nur die Anwendung des Chaslesschen Korrespondenzprinzips erforderlich ist, wurde der Charakter ω von Severi, *Torino Atti*, **37**, 641 (1902) behandelt; dieser gelangt zu dem Ausdruck

$$\omega = \varrho - 9\pi + \sigma + 9,$$

wo ϱ das effektive Geschlecht der Jacobischen Kurve eines irreduziblen Kurvennetzes von dem effektiven Geschlecht π mit σ Basispunkten (die mit der effektiven Multiplizität genommen werden) und ohne Fundamentalkurven bedeutet.

Der Charakter ω von Enriques-Castelnuovo heißt eine *numerische* oder *arithmetische Invariante* zum Unterschiede von p_g, das als *geometrische Invariante* bezeichnet wird, weil ω sich als Funktion des projektiven Charakters der Fläche ausdrücken läßt, während ein analoger Ausdruck für p_g nicht immer möglich ist. Ein anderer numerischer Charakter der Fläche F ist der zuerst von Zeuthen, *Math. Ann.* **4**, 1 (1871) und darauf von Segre, *Torino Atti* **31**, 485 (1896) angegebene. Haben wir auf F einen linearen irreduzibeln Büschel $|C|$ vom Geschlecht $\pi > 0$, so ist der Ausdruck

$$I = \delta - \sigma - 4\pi, \tag{5}$$

wo σ die Anzahl der mit ihren effektiven Multiplizitäten versehenen Basispunkte und δ die Anzahl der einzelnen Doppelpunkte der Büschelkurven bezeichnet, unabhängig von der Wahl des Büschels und bildet deshalb einen Charakter der Fläche *(Zeuthen-*

Segresche Invariante), der bei den birationalen Transformationen der Fläche sich wie die Anzahl der ausgezeichneten Kurven (erster Art) verändert. Es handelt sich also auch in diesem Falle um eine relative Invariante. Zeuthen hatte den Ausdruck von I als Funktion der projektiven Charaktere von F betrachtet und seine Invarianz erkannt; Segre hat I unmittelbar vom Standpunkt der Geometrie auf der Fläche behandelt, indem er die Unabhängigkeit des Ausdruckes (5) von der Wahl des Systems $|C|$ bewies. Auf den Ausdruck von I als Funktion der projektiven Charaktere von F war auch Noether, *Theorie II*, S. 526, gestoßen, der die Beziehung zwischen I, $p^{(1)}$ und dem arithmetischen Geschlecht, wie wir noch sehen werden, angegeben hat. Castelnuovo-Enriques, *Questioni*, p. 190, haben mit Hilfe von I den Ausdruck für die Anzahl der Kurven eines irrationalen Büschels, die Doppelpunkte besitzen, angegeben.

§ 4. Projektive Bestimmung der linearen Kurvensysteme auf einer Fläche. Adjungierte und subadjungierte Flächen. Arithmetisches Geschlecht.

1. Subadjungierte Flächen.

Wir betrachten im dreidimensionalen Raum eine Fläche F von der Ordnung n mit beliebigen Singularitäten. Dann heißt *subadjungiert* zu F eine Fläche, die in jeder beliebigen Ebene als Schnitt eine adjungierte Kurve (im Sinne von Brill und Noether) der Schnittkurve von F liefert. *Die subadjungierten Flächen einer gegebenen Ordnung bilden ein lineares System, das auf F außer den mehrfachen Kurven ein vollständiges lineares Kurvensystem ausschneidet.*

Man kann demnach mit Hilfe eines linearen Systems von subadjungierten Flächen einer gegebenen Ordnung auf F ein beliebiges vollständiges lineares System $|C|$ erhalten, das von Basispunkten virtuell frei ist. Es genügt zu dem Zweck, durch C eine subadjungierte Fläche Φ zu legen von so hoher Ordnung l, daß die Konstruktion möglich ist, und dann die Kurve D zu betrachten, in der F von Φ außer in C und den mehrfachen Linien geschnitten wird. Das System aller Φ, die durch D hindurchgehen wird, auf F dann außer D und den mehrfachen Kurven die Kurven des vollständigen Systems $|C|$ ausschneiden. Sollte das System $|C|$ bestimmte Basispunkte mit gegebenen virtuellen Multiplizitäten haben, so würde es genügen, die Φ die Fläche F in diesen Punkten schneiden oder in passender Weise berühren zu lassen.

Das vollständige System $|C|$ wird durch die Willkürlichkeit der Ordnung l und der subadjungierten Φ nicht beeinflußt. Es läßt sich sogar beweisen, daß, *wenn auf F ein (auch nicht vollständiges) lineares System $|C|$ vorliegt, jeder Rest D einer Kurve C bezüglich der subadjungierten Flächen einer beliebig gegebenen Ordnung auch der Rest jeder anderen Kurve C für die Subadjungierten dieser Ordnung ist.* Hierin besteht der *Restsatz* von Noether, *Theorie II,* S. 509. Dieser Satz wurde von Noether bewiesen, indem er den Satz über die Form $Af + B\varphi$ (*Math. Ann.* **6**, 351 (1873)), von den ebenen Kurven auf die Flächen ausdehnte; hieraus folgt aufs neue die Eindeutigkeit des vollständigen Systems, das durch eine gegebene Kurve festgelegt wird, und daraus die Tatsache, daß die subadjungierten Flächen vollständige Systeme ausschneiden.

Das umgekehrte Verfahren wurde von Enriques, *Introduzione*, p. 33, eingeschlagen, der zuerst die Eindeutigkeit des vollständigen Systems erkannt und auf geometrischem Wege die grundlegenden Eigenschaften der subadjungierten Flächen bewiesen hat. Besonders zu behandeln ist der Fall der Regelflächen und der der Steinerschen Fläche (vgl. Kap. XXX, § 8). Weitere Fragen, die sich auf den Restsatz für Kurven und Flächen beziehen, wurden behandelt von Noether, *Theorie II,* S. 510, *Berliner Abh.* 1882, abgedruckt *J. f. Math.* **93**, 271 (1882); Severi, *Rend. Circ. M.* **17**, 73 (1903); Bertini und Severi, *Torino Atti* **43**, 847 (1908).

2. Adjungierte Flächen.

Eine *adjungierte Fläche* von F heißt jede subadjungierte Fläche, die außerdem der Bedingung genügt, daß sie auf F außer den mehrfachen Linien eine Kurve des Systems $|C' + iC|$ (i ganzzahlig positiv, negativ oder null), wo C einen ebenen Schnitt von F und C' eine Kurve des zu $|C|$ adjungierten Systems bedeutet, ausschneidet. Vgl. Enriques, *Introduzione*, p. 53. Auch für diese Flächen gilt der Satz von der Vollständigkeit des linearen Systems, das auf F durch die Adjungierten einer gegebenen Ordnung ausgeschnitten wird.

Die Flächen φ, welche die Adjungierten der Ordnung $n - 4$ bilden, schneiden auf F außer den mehrfachen Linien und den eventuellen ausgezeichneten Kurven das vollständige kanonische System aus.

Als solche Schnitte der φ mit der Grundfläche F hat Noether zum erstenmal die kanonischen Kurven der Fläche betrachtet und ihre Invarianz bewiesen: *Theorie I,* S. 315, *II*, S. 515.

Wenn F nur gewöhnliche isolierte mehrfache Linien oder Punkte besitzt, so werden die Subadjungierten durch die Bedingung festgelegt, daß sie mit der Multiplizität $h-1$ durch jede h-fache Linie von F, und die Adjungierten außerdem mit der Multiplizität $k-2$ durch jeden einzelnen k-fachen Punkt von F hindurchgehen sollen: Noether, *Theorie II*, S. 510 und *Math. Ann.* **29**, 360 (1887).

Wenn F nur gewöhnliche Singularitäten (eine Doppellinie und auf dieser dreifache Punkte) besitzt, so werden die (mit den Subadjungierten zusammenfallenden) Adjungierten einfach dadurch festgelegt, daß sie durch die Doppellinie hindurchgehen müssen.

3. Arithmetisches Geschlecht der Fläche.

Die Anzahl der linearen Bedingungen, die einer Fläche von gegebener Ordnung l auferlegt werden, wenn man verlangt, daß sie zu F adjungiert sein soll, wird durch einen Ausdruck $kl+k'$ (die *Postulation*) gegeben, dessen Koeffizienten nicht von l abhängen, sondern nur von dem Charakter der Basisgruppe, die sich für die Adjungierten in den singulären Linien und Punkten von F ergibt. Vgl. Enriques, *Introduzione*, p. 59; Castelnuovo, *Sistemi lineari*, p. 16. Dies gilt aber nur, wenn l eine gewisse Grenze λ übersteigt. Ist $\lambda \leqq n-4$, so liefert der Ausdruck

$$(1) \qquad p_a = \binom{n-1}{3} - k(n-4) - k'$$

demnach die Anzahl der unabhängigen Adjungierten von der Ordnung $n-4$, es wird also $p_a = p_g$, wenn p_g das geometrische Geschlecht von F bedeutet. Aber auch im Falle $\lambda > n-4$ läßt sich zeigen, daß der Ausdruck (1), mit den projektiven Charakteren von F gebildet, eine absolute Invariante gegenüber den birationalen Transformationen ist, vgl. Zeuthen, *Math. Ann.* **4**, 21 (1871); Noether, *Theorie II*, S. 506—527. Man findet also eine neue numerische Invariante p_a der Fläche, welche ihr *arithmetisches* oder *numerisches Geschlecht* heißt.

Wenn F eine Doppellinie von der Ordnung d und dem Geschlecht π mit t dreifachen Punkten besitzt, so findet man

$$p_a = \binom{n-1}{3} - (n-4)\,d + 2t + \pi - 1.$$

Für eine Regelfläche vom Geschlecht p wird das arithmetische Geschlecht $p_a = -p$; vgl. Cayley, *Math. Ann.* **3**, 527 (1871).

Die Betrachtung des arithmetischen Geschlechtes ist von grundlegender Bedeutung in der Theorie der algebraischen Flächen; andere Wege, die zu diesem Begriff führen, werden wir noch angeben. Wir wollen aber schon hier anführen, daß nach Zeuthen und Noether Enriques, *Introduzione*, p. 68, die Theorie des arithmetischen Geschlechtes vollständig neu aufbaute, indem er die Dinge von einem anderen, dem Wesen der zu beweisenden Eigenschaften besser angepaßten Gesichtspunkte aus betrachtete. Er bewies nämlich, daß, *wenn auf F ein irreduzibles System $|C|$ vorliegt, die Summe der Defekte aller linearen Scharen, die auf der allgemeinen C durch die vollständigen Systeme*

$$|C'|, \quad |C'+C|, \quad |C'+2C|, \ldots$$

ausgeschnitten werden, gleich der Differenz $p_g - p_a$ wird. Wir werden noch sehen (§ 5, Nr. 5), wie dieses Resultat von Picard und Severi weiter ausgeführt worden ist. Einstweilen wollen wir nur seinen Zusammenhang mit der Ungleichung $p_g \geqq p_a$ hervorheben. Es gibt in der Tat, wie wir später sehen werden, Flächen, für die $p_g = p_a$, und Flächen, für die $p_g > p_a$. Die ersteren heißen *regulär*, die letzteren *irregulär* und $q = p_g - p_a$ ihre *Irregularität.* Diese Unterscheidung hat eine große Bedeutung. Zwischen den relativen Invarianten ω, I (§ 3, Nr. 3) und dem arithmetischen Geschlecht p_a besteht die wichtige Beziehung, die Noether, *Theorie II*, S. 526, angegeben hat:

$$\omega + I = 12 p_a + 9.$$

Der ursprüngliche Beweis dieser Beziehung stützt sich auf die Postulationsformeln. Ein anderer Beweis, den Severi, *Torino Atti* **37**, 636 (1902) ausgeführt hat, knüpft an die Kurvennetze auf F an. Aus dieser Betrachtung folgt weiter der Ausdruck

$$p_a = \frac{\chi}{24} - \pi, \tag{2}$$

hierbei bezeichnet χ die Anzahl der mit Spitzen versehenen Kurven eines irreduziblen Netzes vom Geschlecht π, das von Fundamentalkurven frei ist und dessen Basispunkte mit ihrer effektiven Multiplizität zu nehmen sind. Aus (2) folgt aufs neue die Invarianz von p_a. *Die Beziehungen, welche die Charaktere ω, I, p_a und die kanonischen Systeme zweier in einer algebraischen Korrespondenz (n, n') stehenden Flächen verknüpfen,* finden sich bei Severi, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **36**, 495 (1903).

§ 5. Kontinuierliche Kurvensysteme auf einer Fläche. Der Riemann-Rochsche Satz für die Flächen.

1. Charakteristische Schar eines linearen Systems.

Es sei $|C|$ ein lineares irreduzibles System von der Dimension $r \geqq 1$ und dem effektiven Grad n, dessen Basispunkte mit ihrer effektiven Multiplizität genommen seien. Die lineare Schar g_n^{r-1}, die auf einer allgemeinen C von den anderen Kurven des Systems ausgeschnitten wird, heißt die *charakteristische Schar* von $|C|$. Die Wichtigkeit dieser Schar für die linearen Systeme von ebenen Kurven wurde zuerst betont von Segre, *Rend. Circ. Mat.* **1**, 217 (1887) und darauf von Castelnuovo, *Torino Memorie* (2) **42**, 3 (1891). Für die Flächen wurde der Begriff systematisch ausgebeutet von Enriques, *Ricerche*, p. 192, *Introduzione*, p. 14; Castelnuovo, *Soc. Ital. dei XL Mem.* (3) **10**, 83 (1896).

Der Begriff selbst ist später erweitert worden von Severi, *Sistemi continui*, p. 492, der die charakteristische Schar auf einer irreduzibeln Systemkurve C unabhängig von der Betrachtung des ∞^r-fachen ($r \geqq 0$) Systems $|C|$ definiert hat. Wählt man ein System $|E|$, das $|C|$ partiell, aber nicht als festen Bestandteil enthält, so wird $|D| = |E - C|$. Wenn dann die Vollschar, der die von $|E|$ auf C ausgeschnittene lineare Schar angehört, die von $|D|$ auf C ausgeschnittene lineare Schar enthält, so wird die Differenzschar unabhängig von der Wahl des Systems $|E|$ und heißt die *charakteristische Schar* von C. Die Zweckmäßigkeit dieser Erweiterung geht aus dem Folgenden hervor.

2. Charakteristische Schar eines kontinuierlichen Systems. Fundamentalsätze.

Wir betrachten auf F ein nichtlineares algebraisches System $\{C\}$ von ∞^r irreduziblen Kurven C, dessen Basispunkte mit ihrer effektiven Multiplizität genommen seien, und setzen voraus, daß *das System selbst als Gesamtheit der Kurven C irreduzibel sei.* Wir bezeichnen mit n den *effektiven Grad des Systems,* d. h. die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte zweier C. Das System $\{C\}$ soll kurz als ein *kontinuierliches Kurvensystem der Fläche* bezeichnet werden, um so mehr als für den folgenden Begriff es nicht wesentlich ist, daß das System algebraisch ist.

Charakteristische Schar des kontinuierlichen Systems heißt die lineare Schar g_n^{r-1}, die auf der allgemeinen C von den ihr unend-

lich benachbarten Kurven ausgeschnitten wird. Es läßt sich beweisen, daß diese g_n^{r-1} nichts anderes ist wie die im vorstehenden als charakteristische Schar der Kurve C definierte Schar.

Ein kontinuierliches System heißt *vollständig,* wenn es nicht in einem umfassenderen System von Kurven derselben Ordnung enthalten ist.

Diese Begriffe wurden eingeführt von Severi, *Sistemi continui,* p. 496, 501.

Es besteht nun der folgende *Fundamentalsatz* von Enriques, *Bologna Rend.* **13**$_1$, 382 (1904), *C. R.* **140**, 133 (1905); vgl. auch Severi, *Rend. Circolo M.* **20**, 93 (1905): *die charakteristische Schar eines vollständigen kontinuierlichen Systems auf einer beliebigen Fläche F ist immer vollständig.* Der Beweis dieses Satzes wird sehr einfach, wenn man ein allgemeines Prinzip benutzt, das ebenfalls Enriques aufgestellt hat, nämlich das Prinzip, daß *eine veränderliche algebraische Kurve eines kontinuierlichen Systems nicht zerfallen kann, ohne neue Doppelpunkte zu erhalten.*

Das vollständige lineare System $|C|$, das durch die allgemeine C eines vollständigen kontinuierlichen Systems $\{C\}$ festgelegt wird, ist vollständig in $\{C\}$ enthalten, so daß die charakteristische Schar von $|C|$ vollständig in der charakteristischen Schar von $\{C\}$ enthalten ist. Daher existieren auf einer Fläche F, wenn sie ein vollständiges, nicht lineares kontinuierliches System enthält, vollständige lineare Systeme, welche eine nicht vollständige charakteristische Schar besitzen. Und umgekehrt läßt sich nach dem oben ausgesprochenen Satz behaupten, daß, wenn F ein vollständiges lineares System $|C|$ enthält, dessen charakteristische Schar nicht vollständig ist, ein umfassenderes nicht lineares kontinuierliches System existiert, welches $|C|$ vollständig enthält, so daß die Fläche auch nicht lineare vollständige Systeme besitzt.

Es läßt sich beweisen, daß *der Defekt der charakteristischen Schar eines vollständigen linearen Systems* $|C|$ *auf einer Fläche F mit der Irregularität* $q = p_g - p_a$ *die Zahl q nicht übersteigt und daß auf F lineare Systeme existieren, für welche diese obere Grenze wirklich erreicht wird.* Dieses wichtige Resultat verdankt man Castelnuovo, *Sistemi lineari,* p. 292, der es unabhängig von dem Begriff der charakteristischen Schar eines kontinuierlichen Systems bewiesen hat. Einen anderen einfachen Beweis hat später Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* **12**, 257 (1903) gegeben. Der natürlichste Weg, um zu dem angeführten Resultat zu gelangen, scheint aber der zu sein, es aus der allgemeinen Theorie der kontinuierlichen

Systeme abzuleiten. Vgl. Severi, *Ven. Ist. Atti* **68**, 833 (1909). Wenn man diesen Weg verfolgt, so gelangt man wirklich zu einer völlig neuen Definition von p_a, die anscheinend außer Verbindung mit der früheren steht. Der Übergang zwischen den zwei Definitionen wird aber durch einen Satz vermittelt, den Picard, *J. f. Math.* **129**, 284 (1905) und Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* **17**, 465 (1908) bewiesen haben.

3. Die charakteristische Eigenschaft der irregulären Flächen.

Das erste Beispiel von irregulären Flächen ($p_g > p_a$) wird durch die Regelflächen geliefert (Cayley) und allgemeiner durch die Flächen, die einen irrationalen Kurvenbüschel enthalten, wie Castelnuovo, *Soc. ital. dei XL, Memorie* (3) **10**, 102 (1896) gezeigt hat. Später bewies Enriques, *Rend. Circ. Mat.* **13** (1899), daß jede Fläche irregulär ist, welche ein nicht in einem linearen Kurvensystem der gleichen Ordnung enthaltenes kontinuierliches Kurvensystem enthält. Dieses Resultat ist aus dem Begriff der charakteristischen Reihe eines kontinuierlichen Systems leicht abzuleiten. Vgl. Severi, *Sistemi continui*, p. 503. Tatsächliche Beispiele von Flächen mit nichtlinearen kontinuierlichen Systemen wurden angegeben von Maroni, *Torino Atti* **38**, 149 (1903); De Franchis, *Rend. Circ. M.* **17**, 104 (1903); Severi, *Torino Atti* **38**, 3 (1903), welche die Eigenschaften der die ∞^2 Punktepaare einer oder zweier Kurven darstellenden Flächen vollständig untersucht haben.

Diese verschiedenen Resultate führten zu dem Gedanken, daß die irregulären Flächen durch die Existenz nichtlinearer kontinuierlicher Systeme vollständig charakterisiert seien. Der in Nr. 2 angeführte Fundamentalsatz von Enriques beantwortet diese Frage in der Tat im bejahenden Sinne. Daraus folgt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Fläche irregulär ist ($p_g > p_a$), ist, daß sie nichtlineare vollständige Systeme besitzt.

4. Der Riemann-Rochsche Satz für die Flächen.

Der angeführte Satz von Castelnuovo über die obere Grenze des Defektes der charakteristischen Schar eines vollständigen linearen Systems $|C|$ auf einer Fläche F von der Irregularität

$$q = p_g - p_a$$

erlaubt sofort eine untere Grenze für die Dimension r des Systems $|C|$ anzugeben. Man findet

$$(1) \qquad r \geqq n - \pi + p_a + 1 - i,$$

wo n, π Grad und Geschlecht von $|C|$ und i den *Spezialitätsindex* des Systems $|C|$, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen kanonischen Kurven, welche eine C enthalten, bedeuten (es ist $i = 0$, wenn das System nicht spezial ist). Die Ungleichheit (1) pflegt man als den *Riemann-Rochschen Satz für die Flächen* zu bezeichnen wegen ihrer Analogie mit dem entsprechenden Satz für die algebraischen Kurven. Sie wurde von Noether, *C. R.* **103**, 734 (1886) ausgesprochen, aber die kurze Andeutung des Beweises, die der Verfasser gab, setzte die Regularität der Fläche stillschweigend voraus. Mit derselben Frage, immer mit der Beschränkung auf die regulären Flächen, beschäftigte sich später Enriques, *Ricerche*, p. 213. Allgemein wurde die Beziehung aufgestellt von Castelnuovo, *Sistemi lineari*, p. 300. Vgl. auch Severi, *Rom. Acc. Lincei Rend.* **12**, 252 (1903).

Für ein genügend großes Vielfaches $|C|$ des Systems der ebenen Schnitte einer Fläche des dreidimensionalen Raumes, die nur gewöhnliche Singularitäten besitzt, oder einer singularitätenfreien Fläche eines Überraums gilt in (1) das Gleichheitszeichen (und außerdem wird $i = 0$). Vgl. Castelnuovo, *Sistemi lineari*, p. 317 Jedes lineare System, dessen Dimension durch die rechte Seite von (1) angegeben wird, heißt *regulär*.

Aber diese Resultate beziehen sich nur auf die irreduziblen linearen Systeme, deren Dimension $\geqq 2$ ist. Man kann indessen allgemeiner beweisen, daß, *wenn die virtuellen Charaktere n, π, i einer reduzibeln oder irreduzibeln Kurve C, auf welcher auch Basispunkte mit virtuellen, von den effektiven verschiedenen Multiplizitäten vorgeschrieben sein können, der Ungleichung genügen*

$$(2) \qquad n - \pi + p_a + 1 - i \geqq 0,$$

C ein vollständiges lineares System $|C|$ von der Dimension

$$r \geqq n - \pi + p_a + 1 - i$$

festlegt. Dies wurde bewiesen von Severi, *Torino Atti* **40**, 766 (1905), *Ven. Ist. Atti* **68**, 829 (1909). Der angeführte Satz liefert auch *eine hinreichende arithmetische Bedingung dafür, daß die Differenz $|A - B|$ zweier linearer Systeme $|A|$, $|B|$ existiert*, indem dafür genügt, daß die Charaktere n, π, i der *virtuellen Kurve*

$$A - B$$

der Ungleichung (2) genügen. Vgl. Severi, *Lomb. Ist. Rend.* (2), **38**, 859 (1905). Außerdem läßt sich beweisen: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Differenz* $|A - B|$ *existiert, ist, daß das dem* $|B|$ *adjungierte System* $|B'|$ *auf der Kurve* A *eine spezielle Schar ausschneidet.* Vgl. Severi, *Ven. Ist. Atti*, **68**, 836 (1909). Für die Anwendbarkeit dieses Satzes ist nur erforderlich, daß die Kurve B geeignet ist, ein kontinuierliches System von positivem Grade zu definieren.

Man kann auch eine untere Grenze für die Dimension R eines vollständigen kontinuierlichen Systems $\{C\}$ finden, dem das System $|C|$ angehört. Es läßt sich nämlich zeigen, daß, *wenn die Ungleichung* (2) *erfüllt ist, das vollständige kontinuierliche System* $\{C\}$ *aus* $\infty^{p_g - p_a}$ *linearen Systemen* $|C|$ *besteht, derart, daß sich ergibt*

$$R \geqq n - \pi + p_g + 1 - i.$$

Dieser Satz stammt von Enriques und Severi, vgl. Severi, *Torino Atti* **40**, 766 (1905).

Die $\infty^q (q = p_g - p_a)$ *linearen Systeme, die in einem vollständigen kontinuierlichen System enthalten sind, können durch die Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit von Punkten dargestellt werden, die eine vertauschbare kontinuierliche Gruppe von* ∞^q *birationalen Transformationen in sich zuläßt.* Es ist dies die sogenannte Picardsche *Mannigfaltigkeit.* Dieser wichtige Satz stammt von Castelnuovo, *C. R.* **140**, 223 (1905), *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **14**, 553 (1905) (vgl. § 7, Nr. 3). Wenn die Fläche F, deren Irregularität $q > 0$, keinen Kurvenbüschel des Geschlechtes q enthält, so ist F einer (eventuell mehrfachen) Fläche Φ, die in der Picardschen Mannigfaltigkeit enthalten ist, birational äquivalent. Vgl. Severi, *Ann. di Mat.* (3) **20**, 206 (1913).

5. Regularität der adjungierten Systeme.

Wenn ein lineares System $|C'|$ mit den Charakteren n', π' sich als das adjungierte eines anderen Systems $|C|$ ansehen läßt, so kann man unter sehr allgemeinen Bedingungen die Ungleichung, welche den Riemann-Rochschen Satz ausdrückt, ersetzen durch die Gleichung

$$r' = n' - \pi' + p_a + 1,$$

wo r' die Dimension des Systems $|C'|$ bedeutet, das offenbar nicht spezial ist ($i' = 0$).

In der Tat hat Picard, *J. f. Math.* **129**, 284 (1905), mit

Hilfe der einfachen Integrale erster Gattung, die zu der Fläche gehören, bewiesen, daß das dem System der ebenen Schnittkurven einer Fläche des gewöhnlichen Raumes adjungierte System regulär ist. Allgemeiner hat Severi, *Rom. Acc. Lincei Rend.* **17**, 465 (1908), gezeigt, daß *das irgend einer irreduzibeln Kurve C adjungierte System, wenn sich durch die Kurve ein kontinuierliches System vom Grade* > 0 *definieren läßt, regulär ist.* Den Beweis dieses Satzes erhält man auf geometrischem Wege durch die charakteristische Schar eines kontinuierlichen Systems. Man gelangt so zu dem folgenden Theorem, von dem das angeführte eine einfache Folgerung ist:

Auf der allgemeinen Kurve eines beliebigen irreduzibeln linearen Systems $|D|$, *das als Teil die oben genannte Kurve C enthält, schneidet das vollständige System* $|D - C|$ *eine Vollschar aus.*

Das von Picard und Severi gewonnene Resultat liefert eine nähere Bestimmung für den Satz von Enriques, der in § 4, Nr. 3 ausgesprochen ist, indem es zeigt, wie, *sobald die C geeignet ist, ein kontinuierliches System vom positiven Grade festzulegen, der Defekt der kanonischen Schar, die von* $|C'|$ *auf C ausgeschnitten wird, der Irregularität der Fläche gleich wird, während die Systeme*

$$|C' + C|, \quad |C' + 2C|, \ldots$$

auf C eine (nichtspeziale) Vollschar ausschneiden.

Die Postulationsformel, welche die Anzahl der Bedingungen dafür angibt, daß eine Fläche von der Ordnung l einer Fläche von der Ordnung m adjungiert ist, gilt in jedem Falle, wo

$$l \geqq m - 3,$$

während sie nicht gilt für $l = m - 4$, wenn die Fläche irregulär ist.

§ 6. Die Basis der Gesamtheit aller Kurven einer Fläche. Äquivalenzkriterien.

1. Äquivalenzkriterien.

Hat man auf einer Fläche F zwei algebraische Kurven A, B, so muß man häufig bestätigen, ob A und B äquivalent sind, d. h. ob ein lineares System existiert, dem sie als volle Kurven angehören. Es ergibt sich nun, daß *wenn zwei Kurven A und B auf den Kurven C eines beliebigen kontinuierlichen* ∞^1 *Systems* Σ *vom Index* ν *äquivalente Gruppen ausschneiden, die Kurven* νA, νB

äquivalent sind oder sich um Fundamentalkurven von Σ unterscheiden. Vgl. Severi, *Teorema d' Abel*, p. 68; *Ven. Ist. Atti* **70**, 380 (1911).

In anderen Fällen handelt es sich darum, zu wissen, ob ein kontinuierliches System ganz in einem linearen System enthalten ist oder nicht. *Um zu bestätigen, daß die Kurven eines kontinuierlichen Systems äquivalent sind, genügt es, nachzuweisen, daß sie auf einer einzigen Kurve, durch die sich ein kontinuierliches System von einem Grade > 0 festlegen läßt, äquivalente Gruppen ausschneiden.* Vgl. Severi, *Ven. Ist. Atti* **65**, 630 (1906).

Andere Äquivalenzkriterien für die Kurven eines kontinuierlichen Systems sind die folgenden:

Jedes *rationale* Kurvensystem ist in einem *linearen* System enthalten. Vgl. Enriques, *Rend. Circolo M.* 10 (1896); Severi, *Ven. Ist. Atti* **70**, 376 (1911).

Ein kontinuierliches System erster Stufe vom *Index* ν (ν ist die Anzahl der Kurven C, die durch einen beliebigen Punkt P von F gehen), von der Art, daß die reduzible Kurve, die aus den ν Kurven, welche durch P gehen, zusammengesetzt ist, bei veränderlichem P sich selbst immer äquivalent verbleibt, besteht auch selbst aus äquivalenten Kurven (vgl. Severi, *Teorema d' Abel*, p. 74).

Wenn man auf F ein kontinuierliches System erster Stufe von irreduziblen Kurven C des effektiven Geschlechts π ohne veränderliche mehrfache Punkte zieht, so sind die C dann und nur dann äquivalent, wenn die Anzahl δ der C, die außerhalb der Basispunkte einen Doppelpunkt besitzen, gegeben ist durch

$$\delta = \nu(n + \sigma + 4\pi + I),$$

wobei n den effektiven Grad ν den Index des Systems, und I die Zeuthen-Segresche Invariante von F bedeutet. Wenn die C nicht äquivalent sind, so ist δ kleiner als der vorstehende Ausdruck. Vgl. Torelli, *Torino Atti*, **42**, 86 (1906). Äquivalenzkriterien von transzendenter Form findet man in § 7, Nr. 4.

2. Algebraisch verknüpfte Kurven.

Man sagt, mehrere auf F gezogene Kurven $C_1, C_2, \ldots C_l$ sind *algebraisch verknüpft*, wenn eine lineare Kombination mit ganzzahligen positiven Koeffizienten einiger von ihnen demselben irreduzibeln algebraischen System wie eine ebensolche Kombination der übrigen Kurven angehört. Bezeichnet man mit n_{ik} die Anzahl

der gemeinsamen Punkte der Kurven C_i, C_k, mit n_{ii}, m_i den virtuellen Grad und die Ordnung der Kurve C_i, so *bedeutet das Verschwinden der Matrix*

$$\begin{Vmatrix} n_{11} & n_{12} \cdot & \cdots & n_{1l} & m_1 \\ n_{21} & & & & \\ \cdots & & & & \\ & n_{l2} \cdot & & & m_l \end{Vmatrix}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $C_1, \ldots C_l$ *algebraisch verknüpft sind.*

Im Falle von nur zwei Kurven A, B läßt sich etwas mehr sagen, wenn ihre virtuellen Grade positiv und gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte sind. In diesem Fall gehören die beiden Kurven oder zwei passende gleiche Vielfache λA, λB von ihnen demselben kontinuierlichen System an.

3. Basis der Gesamtheit aller Kurven einer Fläche.

Kann die Anzahl der algebraisch unabhängigen Kurven auf F über alle Grenzen wachsen? Die Antwort auf diese Frage liegt in dem folgenden Satz:

Auf einer Fläche F läßt sich immer eine endliche Anzahl von Kurven C_1, $C_2 \ldots C_\varrho$ so festlegen, daß jede andere Kurve der Fläche mit diesen algebraisch verknüpft ist.

Eine Gruppe von Kurven wie $C_1, \ldots C_\varrho$ heißt eine *Basis* für die Gesamtheit der Kurven von F und ϱ die *Basiszahl* der Fläche. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ϱ Kurven eine Basis bilden, ist, daß die Determinante (die Diskriminante der Basis)*

$$D = \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \cdots & n_{1\varrho} \\ n_{21} & & n_{2\varrho} \\ \cdots & & \\ n_{\varrho 1} & n_{\varrho 2} \cdot & n_{\varrho\varrho} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet, wobei die n_{ik} dieselbe Bedeutung haben wie vorhin.

Die quadratische Form $\varphi = \sum n_{ik}\lambda_i\lambda_k$ heißt die *quadratische Grundform der Basis.*

Die Basiszahl ist eine relative Invariante der Fläche, die wie die Anzahl der ausgezeichneten Kurven (erster Art) variiert.

Wenn die Basis $C_1, \ldots C_\varrho$ die Eigenschaft hat, daß für eine

beliebige Kurve C von F der Koeffizient von C bei der algebraischen Verknüpfung zwischen $C, C_1, \ldots C_\varrho$ ein Teiler der Koeffizienten von $C_1, \ldots C_\varrho$ ist, so nennt man die *Basis intermediär*. Es läßt sich zeigen, daß *eine Basis intermediär ist, wenn ihre Diskriminante D den kleinsten absoluten Wert erlangt.*

Die quadratischen Grundformen der verschiedenen intermediären Basen sind alle einander äquivalent (für lineare ganzzahlige Substitutionen vom Modul ± 1). Die Grundform einer intermediären Basis heißt deshalb auch die *quadratische Grundform der Fläche.*

Die Anzahl der verschiedenen algebraischen Systeme, die mit einer gegebenen ganzen Zahl λ multipliziert dasselbe algebraische System ergeben, kann eine bestimmte ganzzahlige Grenze σ nicht übersteigen, die so ein Charakter der Fläche wird.

Die Division durch λ wird eindeutig dann und nur dann, wenn λ und σ zueinander prim sind.

Es läßt sich nun zeigen, daß *man auf F $\varrho + \sigma - 1$ Kurven so auswählen kann, daß jede Kurve von F sich aus diesen durch Summation und Subtraktion* (die man auch auf die nichtlinearen kontinuierlichen Systeme anwenden muß, wenn die Fläche irregulär ist) *gewinnen läßt.* Eine solche Gruppe von $\varrho + \sigma - 1$ Kurven heißt eine *Minimalbasis.*

Für den Inhalt dieser Paragraphen vgl. Severi, *C. R.* **140**, 361 (1905), *Math. Ann.* **62**, 194 (1906), *Ann. éc. norm.* (3), **25**, 449 (1908), *Rend. Circ. M.* **30**, 265 (1910).

Die Existenz der Basis wurde auf andere Weise bewiesen von Poincaré, *C. R.* **149**, 1026 (1909), *Ann. éc. norm.* (3) **27**, 55 (1910).

§ 7. Einfache und mehrfache Integrale, die zu einer Fläche gehören.

1. Einfache Integrale.

Wir betrachten das vierdimensionale Riemannsche Gebilde R, welches das Bild der reellen oder komplexen Punkte einer algebraischen Fläche F liefert, und einen Weg σ auf R, der zwei Punkte P_0, P_1 verbindet; diese Punkte mögen den Punkten

$$(x_0 y_0 z_0), \quad (x_1 y_1 z_1)$$

von F entsprechen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integral

$$I = \int (A\,dx + B\,dy),$$

wo A, B rationale Funktionen des Punktes (x, y, z) von F bedeuten, sich nicht ändert, wenn man die Punkte P_0, P_1 festläßt und den Weg σ kontinuierlich verändert, ohne dabei Singularitätsstellen von A, B zu überschreiten, ist die, daß auf F die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt ist:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Die Ableitungen sind so zu verstehen, daß man auf die algebraische Abhängigkeit des z von x, y Rücksicht nimmt.

Nimmt man an, daß diese Bedingung erfüllt ist, und betrachtet I als Funktion seiner oberen Grenze, so erhält man *das Integral eines vollständigen Differentials,* oder kürzer ausgedrückt, ein *einfaches Integral,* das zu F gehört.

Der Wert von I längs eines *Ringweges* auf F, oder besser gesagt auf R, d. h. längs eines geschlossenen Weges auf R, ist eine *Periode* des Integrals. Die Periode ändert sich nicht bei einer kontinuierlichen Deformation des Ringweges.

Auf F läßt sich eine endliche Zahl r von Ringwegen

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_r$$

so festlegen, daß jeder andere Ringweg von F sich durch eine kontinuierliche Deformation auf eine passende Summe von Vielfachen dieser in dem gehörigen Sinne genommenen Ringwege zurückführen läßt. Von den Ringwegen σ kann man annehmen, daß keiner von ihnen, einfach oder mehrfach genommen, sich auf eine lineare Kombination der übrigen reduziert, und insbesondere, daß keiner von ihnen durch eine kontinuierliche Deformation auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Die ganze Zahl $p_1 = r + 1$ heißt der *lineare Zusammenhang* von F.

Die Periode von I für einen beliebigen Ringweg drückt sich aus als eine ganzzahlige lineare Kombination der Fundamentalperioden für die Ringwege σ und anderer Perioden für unendlich kleine Ringwege, die sich aber doch nicht, ohne durch singuläre Stellen des Integrals I hindurchzugehen, auf Punkte reduzieren lassen. Diese letzten Perioden heißen *polare Perioden* des Integrals I, die anderen *zyklische Perioden.* Das Integral I heißt *von der ersten Art,* wenn es in jedem Punkte von F endlich bleibt, *von der zweiten Art,* wenn es nur polare Singularitäten besitzt, d. h. wenn es

zwar längs einer oder mehrerer algebraischer Kurven, der *polaren Kurven* des Integrals, unendlich wird, aber keine polaren Perioden besitzt, *von der dritten Art,* wenn es logarithmische Singularitäten, die eine oder mehrere algebraische *logarithmische Kurven* erfüllen, und eventuell auch polare Singularitäten besitzt. Ein unendlich kleiner Ringweg, der eine logarithmische Singularität umkreist, liefert eine nichtverschwindende polare Periode, die für alle Punkte einer und derselben irreduzibeln logarithmischen Kurve konstant ist.

Ein Integral erster Art, dessen sämtliche Perioden verschwinden, ist eine Konstante. Ein Integral zweiter Art, dessen sämtliche Perioden verschwinden, ist eine rationale Funktion.

Die erörterten Begriffe sind invariant für die birationalen Transformationen der Fläche.

Der Begriff der zu einer algebraischen Fläche gehörenden einfachen Integrale wurde eingeführt von Picard, *C. R.* **99**, 961 und 1147 (1884), *J. de Math.* (4) **1**, 281 (1885), **2**, 329 (1886), *Ann. éc. norm.* (3) **18**, 397 (1901). Ausführlich sind sie behandelt in dem Lehrbuch von Picard-Simart.

2. Einfache Integrale zweiter Art.

Können die Perioden eines Integrals zweiter Art längs eines Systems von fundamentalen Ringwegen $\sigma_1, \ldots \sigma_r$ beliebig angenommen werden? Diese Frage bietet sich in Analogie zu der bekannten Eigenschaft der Abelschen Integrale zweiter Art dar. Nun hat Picard, *J. de Math.* (4) **5**, 184 (1889), *C. R.* **124**, 532 (1897) bewiesen, daß *man wirklich durch willkürliche Festlegung der Perioden längs der fundamentalen Ringwege* $\sigma_1, \ldots \sigma_r$ *(bis auf eine additive rationale Funktion) ein einfaches Integral zweiter Art der Fläche bestimmen kann.*

Dieses Resultat bildet die Grundlage für die Theorie der einfachen Integrale einer Fläche.

Ein anderer Begriff, der auch von grundlegender Bedeutung für die später anzuführenden Resultate ist, ist der der *rationalen Residualfunktionen* eines einfachen Integrals zweiter Art längs der eigenen polaren Kurven. Der interessanteste Fall ist der, wo das Integral I unendlich von der 1. Ordnung nur längs einer irreduzibeln und von mehrfachen Punkten freien Kurve C wird, weil man beweisen kann, daß jedes Integral sich auf diesen Fall durch Subtraktion einer geeigneten rationalen Funktion zurückführen läßt. Es sei

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der Fläche F, die nur gewöhnliche Singularitäten besitzen soll. Das Abelsche Integral zweiter Art, das durch I auf einer Schnittkurve $y =$ *konst.* bestimmt wird, liefert ein Residuum in jedem Punkte, wo C die betrachtete Ebene schneidet. Das Residuum selbst wird eine rationale Funktion $\varphi(x, y, z)$ des veränderlichen Punktes (xyz) auf C, und dies ist die rationale *Residualfunktion*, die von I auf seiner Polarkurve bestimmt wird. Die Bestimmung der Pole und der Nullstellen von φ zeigt, daß die Lage der Pole und eines Teils der Nullstellen von dem betrachteten Integral unabhängig ist. Von Integral zu Integral variiert allein eine Gruppe von Nullstellen, die auf C eine Gruppe der charakteristischen Schar bildet (*die charakteristische Gruppe, die von I auf seiner polaren Kurve bestimmt wird*). Dies gestattet, die Existenz von einfachen Integralen zweiter Art an geometrische Eigenschaften der Fläche zu knüpfen. Über den Begriff und die Bestimmung der Residualfunktion vgl. Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* **13**, 253 (1904), *Math. Ann.* **61**, 27 (1905).

3. Zusammenhang der einfachen Integrale erster und zweiter Art mit den Irregularitäten der Fläche.

Kann man die Anzahl der einfachen Integrale erster und zweiter Art durch die geometrischen Charaktere der Fläche ausdrücken, ebenso wie man die Anzahl der Abelschen Integrale erster und zweiter Art durch das Geschlecht einer Kurve ausdrückt? Auf diese Frage gibt der folgende Satz die Antwort:

Eine Fläche von der Irregularität $q = p_g - p_a$ besitzt q linear unabhängige einfache Integrale erster Art und $2q$ unabhängige einfache Integrale zweiter Art. Die Anzahl der Perioden dieser Integrale beträgt $2q$, so daß $2q + 1$ der lineare Zusammenhang der Fläche wird.

Dieser Satz ist das zusammenfassende Resultat von Untersuchungen, die in den Jahren 1904 und 1905 rasch aufeinander folgten und herrühren von: Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* **13**, 253 (1904), *Torino Atti* **40**, 288 (1905), *C. R.* **140**, 926 (1905), *Ann. di Mat.* (3) **12**, 55 (1905), *Math. Ann.* **61**, 27 (1905); Enriques, *Bologna Rend.* **9**, 5 (1904); Castelnuovo, *C. R.* **140**, 220 (1905), *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5), **14**, 545, 593, 655 (1905). Vgl. auch Picard, *C. R.* **140**, 915 (1905), wo auf anderem Wege das von Severi in der ersten der angeführten Arbeiten erhaltene Resultat bewiesen ist.

Das qualitative Resultat, daß die Irregularität der Fläche

gleichbedeutend mit der Existenz einfacher Integrale erster und zweiter Art ist, faßt zwei einander ergänzende reziproke Sätze zusammen, die von Severi und Enriques herrühren.

Das quantitative Resultat folgt aus den Untersuchungen von Severi über das Abelsche Theorem für die Flächen und den Untersuchungen von Castelnuovo über die Picardsche Mannigfaltigkeit (§ 5, Nr. 4).

Weitere Einzelheiten findet man in der Monographie von Castelnuovo-Enriques am Ende des Lehrbuches von Picard-Simart. Ein anderer Beweis des angeführten Satzes rührt her von Poincaré, *C. R.* **149**, 1026 (1909), *Ann. éc. norm.* (3) **27**, 55 (1910). Wir fühlen uns endlich verpflichtet, noch eine schöne Abhandlung von Humbert, *J. de Math.* (4) **10**, 169 (1894) zu nennen. Es ist dort durch Betrachtungen, die sich später als nützlich erwiesen haben, folgender besondere Fall des oben angeführten Satzes gefunden worden: Auf jeder Fläche, welche keine einfachen Integrale erster Art besitzt, ist jedes kontinuierliche System von algebraischen Kurven in einem linearen Systeme enthalten.

4. Das Abelsche Theorem für die algebraischen Flächen.

Das Abelsche Theorem drückt die Bedingung der Äquivalenz für die Scharen von Punktgruppen auf einer Kurve aus. Die analoge Frage bietet sich auch für die Flächen dar, nämlich die Frage, wie man durch die einfachen Integrale erster Art die Bedingung dafür ausdrücken kann, daß die Kurven eines kontinuierlichen Systems äquivalent sind. Severi, *Teorema d' Abel,* p. 63, hat nun den Satz bewiesen: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven C eines auf einer Fläche F enthaltenen kontinuierlichen Systems demselben linearen System angehören, ist, daß die Summe der Werte, die jedes einfache Integral erster Art in den gemeinsamen Punkten zweier C annimmt, sich bei einer kontinuierlichen Veränderung der beiden Kurven nicht ändert.*

Aber das Abelsche Theorem für die Kurven liefert außerdem die Bedingung der Äquivalenz für zwei Punktgruppen, die aus einer gleichen Anzahl von Punkten bestehen. Für die Flächen besteht auch hierzu eine bis zu einem gewissen Grade analoge Eigenschaft:

Wenn auf der Fläche F zwei Kurven A, B von derselben Ordnung gegeben sind, deren virtuelle Grade der Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich sind, und eine dritte Kurve C, durch die sich ein kontinuierliches System von einem Grade > 0 *festlegen läßt,*

so gehören, sobald jedes einfache Integral erster Art für die Punktgruppen, in denen C von A, B geschnitten wird, bis auf eine Periode dieselbe Summe liefert, zwei geeignete gleiche Vielfache von A, B als volle Kurven demselben linearen System an. Vgl. Severi, *Rend. Circ. M.* **21**, 280 (1906).

Das gewöhnliche Abelsche Theorem läßt sich indessen noch in anderer Weise erweitern, nämlich so, daß man zu bestimmen sucht, wann eine Involution von Punktgruppen auf F regulär ist. Es läßt sich zeigen, daß *die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine auf F gegebene Involution regulär ist, darin besteht, daß die Summe der Werte jedes einfachen Integrals erster Art für die Punkte einer Gruppe der Involution bei kontinuierlicher Veränderung dieser Gruppe konstant bleibt.* Vgl. Severi, *Teorema d' Abel,* p. 74. Ein besonderer Fall dieses Satzes findet sich bei Poincaré, *C. R.* **99**, 1145 (1884), **100**, 40 (1885).

5. Rationale Bestimmung der einfachen Integrale erster Art.

Picard, *J. de Math.* (4) **1**, 287 (1885) hat die Bestimmung der einfachen Integrale einer Fläche F von der Ordnung m, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, auf die Ermittelung dreier Polynome von bestimmter Ordnung zurückgeführt, die einer aus der Integrabilitätsbedingung abgeleiteten Differentialgleichung genügen.

Indessen muß man zur Vervollständigung der Theorie auch eine rationale Bestimmung der Integrale erster Art finden, die der Bestimmung der Abelschen Integrale erster Art für eine Kurve der Ordnung m durch die adjungierten Kurven von der Ordnung $m - 3$ analog ist. Mit dieser Frage hat sich Severi, *C. R.* **152**, 1079 (1911) beschäftigt, der zu dem folgenden Resultat gelangt ist:

Man setze der Einfachheit wegen voraus, daß F nur gewöhnliche Singularitäten besitzt. Man betrachte eine (zu F adjungierte) Fläche $P = 0$ von der Ordnung $m - 2$, die durch die Doppellinie von F, durch die unendlich ferne Gerade der Ebene $y = 0$ und durch die Berührungspunkte der F berührenden Ebenen $y =$ *konst.* hindurchgeht. Eine solche Fläche muß existieren, wenn F einfache Integrale erster Art besitzt. Es sei D die Kurve von der Ordnung $m - 3$, in der $P = 0$ noch von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird. Man betrachte eine andere adjungierte

Fläche $Q = 0$, von der Ordnung $m - 2$, die durch die unendlich ferne Gerade der Ebene $x = 0$, die Berührungspunkte der berührenden Ebenen $x = konst.$ und die Kurve D hindurchgeht. Diese Bedingungen bestimmen Q eindeutig. *Es wird dann*

$$I = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{F_z'}$$

ein einfaches Integral erster Art von F. Variiert man das Polynom P unter den auferlegten Bedingungen, so erhält man auf diese Weise alle Integrale erster Art.

6. Die Picardsche Relation. Folgerungen für die Flächen mit einem irrationalen Kurvenbüschel.

Bei der soeben angegebenen Form der Integrale erster Art ist hervorzuheben, daß sie bereits als ihre notwendige Gestalt von Picard, *J. de Math.* (4) **1**, 285 (1885) angegeben worden ist. An diese Form knüpft sich auch eine wichtige Beziehung, die von Picard, ibid. p. 304 allgemein gefunden wurde. Ist

$$I' = \int \frac{P'\,dx + Q'\,dy}{F_z'}$$

ein anderes Integral erster Art von F, so gilt die Identität

$$PQ' - P'Q = F_z' A,$$

wo $A = 0$ eine zu F adjungierte Fläche von der Ordnung $m - 4$ bedeutet. Diese Relation ist auch bei Noether, *Math. Ann.* **29**, 366 (1886) zu finden. Sie wurde auf andere Weise bewiesen von Severi, *Ann. di Mat.* (3) **20**, 206 (1913). Der Ausdruck A verschwindet identisch, wenn die beiden Integrale Funktionen voneinander sind und umgekehrt. Dies tritt insbesondere ein, wenn die Fläche das geometrische Geschlecht $p_g = 0$ hat. Aus dieser Bemerkung folgt aber, daß *jede irreguläre Fläche vom Geschlecht* $p_g = 0$ *einen irrationalen Kurvenbüschel enthält.* Vgl. Castelnuovo bei Enriques, *Toulouse Ann.* (2) **3**, 82 (1901), Enriques, *Bologna Rend.* **9**, 5 (1904). Für einen geometrischen Beweis dieses Satzes vgl. Severi, *Rom. Acc. Lin. Rend.* (5) **20**, 537 (1911).

Auf Grund der Picardschen Relation und der Tatsache, daß, *wenn einer Fläche zwei oder mehr wirkliche einfache Integrale, die Funktionen voneinander sind, angehören, die Fläche einen irrationalen Kurvenbüschel enthält* (De Franchis, *Rend. Circ. M.* **20**, 49

(1905)), hat Castelnuovo, *Rend. Circ. M.* **20**, 55 (1905) bewiesen, daß *jede Fläche, für die* $p_g \geqq 2(p_a + 2)$ *wird, einen irrationalen Kurvenbüschel besitzt.* Dies tritt z. B. ein, sowie $p_a < -1$ ist. Vgl. De Franchis, ibidem p. 54. Mit diesen Resultaten kann man die Bestimmung der irregulären Doppelebenen in Verbindung bringen, die De Franchis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **13**, 688 (1904) gegeben hat, und die Bestimmung der irregulären dreifachen zyklischen Ebenen, die Comessatti, *Rend. Circ. M.* **31**, 369 (1911) ausgeführt hat. In beiden Fällen besitzt die Fläche einen irrationalen Kurvenbüschel, aber im ersten Falle ist immer nur ein einziger Kurvenbüschel vorhanden und sein Geschlecht gleich der Irregularität der Fläche. Die irregulären Flächen, für die $p_g \geqq 2(p_a + 2)$, wurden von Rosenblatt, *Rend. Circ. Mat.* **35**, 237 (1913) betrachtet.

7. Einfache Integrale dritter Art.

Für diese Integrale hat Picard, *Ann. éc. norm.* (3) **18**, 397 (1901) folgenden bemerkenswerten Satz bewiesen: *Auf einer gegebenen Fläche F kann man* ϱ *irreduzible algebraische Kurven*

$$C_1, C_2, \dots C_\varrho$$

so ziehen, daß kein Integral dritter Art allein längs dieser Kurven logarithmische Singularitäten besitzt, aber daß, wenn man irgendwie eine $(\varrho + 1)^{te}$ *Kurve C hinzunimmt, immer ein Integral dritter Art existiert, das keine anderen logarithmischen Kurven als*

$$C, C_1, \dots C_\varrho$$

besitzt.

Die Zahl ϱ, die in diesem Satz vorkommt, ist keine andere als die in § 6, Nr. 3 definierte Basiszahl. Eben der Zusammenhang zwischen der Basis und den einfachen Integralen dritter Art erlaubt, auf die von Picard gestellte Frage nach *den Flächen, deren einfache Integrale sich alle auf algebraisch-logarithmische Kombinationen reduzieren,* zu beantworten. Es läßt sich in der Tat zeigen, daß *die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür die ist, daß die Fläche regulär ist.* Vgl. Severi, *C. R.* **140**, 361 (1905), *Math. Ann.* **62**, 213 (1906).

8. Doppelintegrale erster Art.

Wir betrachten ein Doppelintegral vom Typus

$$T = \iint M(xyz)\, dx\, dy, \tag{1}$$

wo M eine rationale Funktion des veränderlichen Punktes (xyz) auf der Fläche F mit der Gleichung

$$F(xyz) = 0$$

bedeutet und das Integral über ein zweidimensionales Gebiet des zu F gehörigen Riemannschen Gebildes R erstreckt werden soll. Poincaré, *Acta Math.* **2**, 97 (1883) hat nun bewiesen, daß der Wert des Integrals T sich nicht ändert, wenn man das Integrationsgebiet kontinuierlich verändert, vorausgesetzt, daß nur sein Rand fest bleibt und es keine Singularitätsstellen von M durchsetzt. Wenn insbesondere die Fläche geschlossen ist, so liefert der Wert von T eine *Periode* des Integrals.

Das Integral T heißt von der *ersten Art,* wenn es in jedem Integrationsgebiete von R endlich bleibt. Diese Begriffe sind invariant für die birationalen Transformationen von F.

Die Anzahl der linear unabhängigen Doppelintegrale erster Art ist gleich dem geometrischen Geschlecht p_g von F, und jedes Integral erster Art kann in die Form gebracht werden

$$\int\int \frac{A(xyz)}{F_z'}\,dx\,dy,$$

wo $A = 0$ eine adjungierte Fläche von F der Ordnung $m - 4$ bedeutet. Die Betrachtung der Doppelintegrale erster Art geht zurück auf Noether, *Theorie I* und *II.* Ihre Theorie ist weiter entwickelt worden in dem Lehrbuch von Picard-Simart.

9. Doppelintegrale zweiter Art.

Als *Residuum* eines Doppelintegrals (1) in einem Punkte P bezeichnet man den Wert des Integrals für ein unendlich kleines, den Punkt P umgebendes geschlossenes Gebiet, das sich nicht auf einen Punkt oder auf eine Linie zusammenziehen läßt, ohne P zu durchsetzen. Wenn der Punkt für die Funktion M nicht singulär ist, wird das Residuum in P Null, während dies nicht notwendig eintritt, wenn M in P unendlich wird. Sind alle Residuen von T Null, so heißt das Integral von der *zweiten Art.* Diese Definition ist für die birationalen Transformationen von F absolut invariant.

Der so definierte Begriff wurde eingeführt von Picard, *Acta Math.* **26**, 280 (1902), *C. R.* **137**, 541 und 594 (1903), *Ann. éc. norm.* (3) **20**, 531 (1903); dieser gelangte durch eine gründliche Untersuchung, die unerwartete Zusammenhänge zwischen der

Theorie der Doppelintegrale zweiter Art und der Theorie der einfachen Integrale dritter Art zutage förderte, zu dem folgenden grundlegenden Resultat:

Eine Fläche von der Irregularität $q = p_g - p_a$ *besitzt*

$$\varrho_0 = I + 4q - \varrho + 2$$

verschiedene Doppelintegrale zweiter Art; hierbei bezeichnet I *die Zeuthen-Segresche Invariante und* ϱ *die Basiszahl der Fläche.*

Bei diesem Theorem werden zwei Doppelintegrale zweiter Art als *verschieden* angesehen, wenn keine lineare Kombination aus ihnen von der Form sein kann

$$\int\int\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy}\right) dx\, dy \quad (A, B \text{ rationale Funktionen}).$$

Die Picardsche Analyse führt auch dazu, die *Anzahl*

$$I + 1 + 2q$$

der verschiedenen geschlossenen Integrationsgebiete zu bestimmen, die im Endlichen auf der Fläche F *liegen.*

Der *zweidimensionale Zusammenhang* von F wurde später von Poincaré, *J. de Math.* **2**, 179 (1906) allein mit Hilfe der Analysis situs behandelt.

§ 8. Lehrsätze über einige besondere Klassen von Flächen.

1. Die Klassen der rationalen Flächen und Regelflächen.

Die rationalen Flächen und Regelflächen bilden ein wichtiges Gebiet in der Geometrie auf der Fläche, nicht allein weil hiermit alle Flächen untersucht werden, auf denen keine invarianten linearen Systeme liegen, sondern auch weil sich bei ihnen die Fruchtbarkeit der geometrischen Methoden besonders offenbart, deren Ausbildung im übrigen auch häufig durch die Betrachtung dieser besonderen Flächen geleitet worden ist.

Nach den Arbeiten von Cremona und Clebsch über die ebenen Abbildungen der rationalen Flächen wurde die Geometrie auf einem ∞^2-fachen algebraischen Gebilde, die sich unmittelbarer an die Riemannschen Ideen anschließt, zuerst von Clebsch und dann von Noether mit der Bestimmung der Bedingungen für die Rationalität der Doppelebenen eingeleitet (vgl. Noether, *Erlangen*

Phys. Med. Soc. Sitzungsb. **10**, 81 (1878), welche Bedingungen Castelnuovo und Enriques, *Rend. Circ. Mat.* **14**, 290 (1900), später von einem mehr systematischen Gesichtspunkte aus betrachtet haben. Hieran schloß sich das klassische Theorem von Noether, *Math. Ann.* **3**, 161 (1870), wonach *jede Fläche mit einem rationalen Büschel von rationalen Kurven selbst rational ist.* Dieses Theorem, dessen Entdeckung einen entscheidenden Punkt in der Entwicklung bildet, wurde später von Enriques, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) $\mathbf{2}_2$, 281 (1893), *Math. Ann.* **46**, 179 (1895) folgendermaßen erweitert: *Jede Fläche, die einen Büschel des Geschlechtes p von rationalen Kurven enthält, läßt sich auf eine Regelfläche vom Geschlecht p abbilden.* Mit Hilfe dieses Satzes und der Picardschen Mannigfaltigkeit hat Severi, *Ann. di Mat.* (3) **20**, 208 (1913) bewiesen, daß *jede irreguläre Fläche, die unendlich viele rationale Kurven enthält, einer irrationalen Regelfläche birational äquivalent ist.* Vgl. auch De Franchis, *Rend. Circ. Mat.* **36**, 225, 276 (1913).

Kurz darauf lieferten die Untersuchungen von Castelnuovo neue wichtige Beiträge zu der Theorie der rationalen Flächen. Einer von seinen Sätzen (*Math. Ann.* **44**, 125 (1894)), der sich auf die Rationalität der ebenen Involutionen bezieht, läßt sich so aussprechen:

Lassen sich die Koordinaten der Punkte einer Fläche F durch rationale Funktionen zweier Parameter λ, μ ausdrücken derart, daß einem Punkte von F n Wertepaare λ, μ entsprechen, so läßt sich eine solche Veränderung der Parameter vornehmen, daß die Wertepaare der neuen Parameter in birationaler Korrespondenz zu den Punkten von F stehen.

Ein besonderer Fall dieses Satzes ($n = 2$) geht schon aus den schönen Untersuchungen von Bertini, *Ann. di Mat.* (2) **8**, 11 und 244 (1877), *Lomb. Ist. Rend.* (2) **13**, 443 (1880) über die Reduktion der ebenen involutorischen Cremonaschen Transformationen auf bestimmte Typen hervor. Vgl. auch S. Kantor, *Napoli Acc. Atti* (2) **4** (1892), wo die Reduktion der *zyklischen Involutionen* von der Ordnung *n* auf bestimmte Typen durch systematische Benützung des adjungierten Systems behandelt ist.

Einen letzten Fortschritt bedeutete die Charakterisierung einer rationalen Fläche durch das Verschwinden zweier Invarianten: *Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß eine Fläche rational ist, besteht darin, daß ihr arithmetisches Geschlecht und ihr Doppelgeschlecht verschwindet,* Castelnuovo, *Soc. Ital. dei XL Mem.* (3) **10**, 119 (1896).

Dieses Resultat erhält man, wenn man auf der Fläche F, deren Rationalität man feststellen will, ein lineares System von Kurven so niedrigen Geschlechtes zu ermitteln sucht, daß daraus ohne weiteres die Rationalität folgt. Ein solches System findet man, indem man zu einem vorgegebenen System fortgesetzt das adjungierte sucht (§ 3, Nr. 1).

Auf diesem Wege gelangten Castelnuovo-Enriques, *Questioni*, p. 212, schließlich zu dem folgenden endgültigen Resultat:

Jede Fläche, die ein wenigstens einstufiges System von Kurven des virtuellen Geschlechtes π *und des virtuellen Grades* $n > 2\pi - 2$ *enthält, ist einer rationalen oder irrationalen Regelfläche birational äquivalent. Ist* $\pi > 0$, *so kann man statt des Systems auch eine einzelne Kurve nehmen.*

Dieses Theorem vereinigt in sich eine ganze Reihe von Resultaten, die in besonderen Fällen von Guccia, Jung, Martinetti, Picard, Del Pezzo, Castelnuovo und Enriques gewonnen worden waren. Das Nähere findet man bei Castelnuovo-Enriques, *Math. Ann.* **48**, 303 (1896), *Questioni*, p. 202. Neuerdings hat mit Hilfe des oben angeführten Satzes Scorza, *Ann. di Mat.* (3) **16**, 255 (1909) und (3) **17**, 288 (1910), die Flächen mit ebenen Schnittkurven vom Geschlecht 3 klassifiziert.

Aus der Untersuchung der Flächen vom geometrischen Geschlecht Null leitete Enriques, *Rend. Circ. M.* **20**, 30 (1905) ein Resultat von großem algebraischen Interesse ab:

Die notwendige und ausreichende Bedingung dafür, daß eine Fläche sich in eine Regelfläche birational transformieren läßt, ist, daß ihre Mehrgeschlechter von den Indizes 4 und 6 Null sind.

Ein anderer schöner Satz über die Flächen, die sich in Regelflächen transformieren lassen, ist der folgende: *Jede Fläche vom arithmetischen Geschlecht* $p_a < -1$ *gehört zur Klasse der Regelflächen (vom Geschlecht* $-p_a$*).* Vgl. Castelnuovo, *Rend. Circ. M.* **20**, 55 (1905); Enriques, ebenda **20**, 61 (1905).

2. Flächen vom geometrischen Geschlecht Null.

Der letzte Satz zeigt, daß die irregulären Flächen, die Regelflächen birational äquivalent sind, fast die ganze Klasse der irregulären Flächen vom geometrischen Geschlecht Null umfassen. Nur wenn $p_a = -1$, gibt es außer den elliptischen Regelflächen noch andere Flächen, die nicht in Regelflächen transformierbar sind. Dies sind die *elliptischen Flächen*, die dadurch charakterisiert sind, daß auf ihnen ein elliptischer Büschel von Kurven C und

ein rationaler Büschel von elliptischen Kurven K, welche die C in $n > 1$ Punkten scheiden, existieren. Die Klassifikation der irregulären Flächen vom Geschlecht $p_g = 0$ und die Untersuchung der elliptischen Flächen verdankt man Enriques, *Rend. Circ. M.* **20**, 1 (1905).

Von den regulären irrationalen Flächen des geometrischen Geschlechtes Null sind allein die vom Doppelgeschlecht $P_2 = 1$, für welche die Ordnung der bikanonischen Kurve 0 ist und welche durch die Werte $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ charakterisiert sind, untersucht worden; sie lassen sich birational in Flächen 6. Ordnung, die durch die Kanten eines Tetraeders doppelt hindurchgehen, transformieren. Enriques, *Soc. Ital. dei XL. Mem.* (3) **14**, 327 (1906).

3. Flächen mit unendlich vielen birationalen Transformationen in sich selbst.

Die Bestimmung der Flächen, welche eine kontinuierliche Gruppe endlicher Ordnung von birationalen Transformationen in sich selbst zulassen, geht hervor aus den gründlichen Arbeiten von Picard, *J. de Math.* (4) **5**, 109 (1889), *C. R.* **120**, 658 (1895), *Rend. Circ. M.* **9**, 244 (1895) und Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles* (Paris, Hermann, 1897), p. 285; *Acta Math.* **27**, 1 (1903):

Jede Fläche, welche eine kontinuierliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zuläßt, gehört einer der folgenden

1) wenn die Gruppe einfach unendlich und rational ist, der Klasse der Regelflächen,

2) wenn die Gruppe einfach unendlich und elliptisch ist, der Klasse der elliptischen Flächen,

3) wenn die Gruppe zweifach unendlich (und vertauschbar) ist, der Klasse der Picardschen hyperelliptischen Flächen.

Unter diesen Flächen sind solche, die als besondere Fälle oder Ausartungen anzusehen sind und eine kontinuierliche transitive r-fach unendliche Gruppe ($r > 2$) von birationalen Transformationen besitzen, diese Flächen reduzieren sich alle auf rationale oder elliptische Regelflächen. Vgl. Castelnuovo-Enriques, *C. R.* **12**, 242 (1895).

Die Flächen mit einer kontinuierlichen Gruppe von birationalen Transformationen lassen sich auch durch die Werte der Geschlechter charakterisieren, wie es Enriques, *Rend. Circ. M.* **20**, 61 (1905), getan hat. *Die notwendige und hinreichende Beding-*

ung dafür, daß eine irrationale Fläche eine kontinuierliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zuläßt, ist, daß ihr arithmetisches Geschlecht negativ wird. Im Falle 1) ist $p_a < -1$, im Falle 2) $p_a = -1$, im Falle 3) $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$.

Der Fall 3) wurde auf rein geometrischem Wege wiedergefunden von Severi, *Ven. Ist. Atti* **67**, 409 (1907).

Eine Fläche, die durch eine kontinuierliche, aber keiner Gruppe von endlicher Ordnung angehörende Reihe von birationalen Transformationen in sich übergeht, ist einer rationalen oder irrationalen Regelfläche birational äquivalent. Castelnuovo-Enriques, *Questioni*, p. 217.

In betreff der Flächen, welche eine diskontinuierliche unendliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zulassen, ohne eine kontinuierliche Gruppe von solchen zu besitzen, führen wir vor allem das Resultat an, das Enriques, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **15**, 665 (1906) gewonnen hat:

Jede Fläche mit einer diskontinuierlichen unendlichen Gruppe von birationalen Transformationen in sich ist eine Fläche, die einen Büschel von elliptischen Kurven besitzt, wenn nicht $p_a = P_2 = 1$ ist.

Die ersten Beispiele von solchen Flächen wurden angegeben von Humbert, *C. R.* **126**, 394 (1898) und Painlevé, *C. R.* **126**, 512 (1898). Andere Beispiele fanden Snyder, *Ann. Math. Society Trans.* **11**, 15 (1910), Rosenblatt, *Rend. Circ. M.* **33**, 212 (1912).

Severi, *Rend. Circ. M.* **30**, 265 (1910) hat bewiesen, daß, wenn eine reguläre Fläche eine diskontinuierliche unendliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich besitzt, diese Gruppe sich abspiegelt in einer isomorphen Gruppe von linearen Transformationen mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Modul gleich ± 1 ist und die die quadratische Grundform der gegebenen Fläche (§ 6, Nr. 3) ungeändert lassen, und hat hieraus, indem er die Untersuchung einer Fläche 4. Ordnung, die schon Fano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **39**, 1071 (1906) behandelt hatte, weiter fortführte, ein *erstes Beispiel für reguläre Flächen mit einer kanonischen Kurve von der Ordnung Null ($p_a = P_2 = 1$) gefunden, die keine elliptischen Kurven enthalten und die doch eine diskontinuierliche unendliche Gruppe von birationalen Transformationen in sich zulassen.*

4. Hyperelliptische Flächen.

Hyperelliptisch heißt jede Fläche, deren Koordinaten sich als Abelsche Funktionen zweier Parameter u, v ausdrücken lassen.

Die Theorie dieser Flächen begann mit der Entdeckung der berühmten *Kummerschen Fläche* (Kummer, *Berliner Monatsber.* 246 (1865)), die zuerst Klein, *Math. Ann.* **5**, 278 (1872) als hyperelliptische Fläche behandelte. Unter den Autoren, welche weiter die Theorie der hyperelliptischen Funktionen bearbeitet haben, hat besonders Humbert, *J. de Math.*, (4) **9**, 29, 361 (1893), (5) **5**, 233 (1899), (5) **6**, 279 (1900), (5) **7**, 97, 395 (1901), (5) **10**, 209 (1904) häufig die Zusammenhänge mit geometrischen Gebilden, insbesondere der Kummerschen Fläche, behandelt (vgl. Kp. XXXV). Unter diesen Abhandlungen sind die letzten den wichtigen Untersuchungen über die Theorie der Abelschen Funktionen gewidmet.

Jedem Punkte einer hyperelliptischen Fläche entspricht eine endliche Anzahl $r \geqq 1$ von Wertepaaren u, v, die nicht nach einem Periodenpaar kongruent sind, r heißt dann der *Rang der hyperelliptischen Fläche.* Jede hyperelliptische Fläche vom Range r ist einer Involution vom Grade r auf einer Fläche vom Range 1 birational äquivalent, so daß die Untersuchung der hyperelliptischen Flächen sich reduziert auf die Untersuchung der Involutionen auf den Flächen vom Range 1 (Jacobische oder Picardsche Flächen mit einer zweifach unendlichen Abelschen Gruppe, welche sich sehr einfach aus den Kurven vom Geschlecht 2 ableiten läßt).

Bei der Untersuchung der Flächen vom Range $r > 1$ wird eine erste Vereinfachung dadurch erzielt, daß jede Involution mit unendlich vielen Koinzidenzpunkten auf einer Fläche F vom Range 1 notwendig ist einer rationalen oder elliptischen Regelfläche birational äquivalent. Vgl. Enriques und Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **16**, 445 (1907) und *Acta Math.* **32**, 327 (1910); Bagnera und De Franchis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **16**, 494 (1907), *Soc. ital. dei XL Mem.* (3), **15**, 259 (1908). Der wirklich neue Fall ist deshalb der der Involutionen mit einer *endlichen* Zahl ($\geqq 0$) von Koinzidenzen. Für die hyperelliptischen Flächen Φ, die durch solche Involutionen dargestellt werden, besteht nun der folgende Fundamentalsatz:

Sind (u', v'), (u, v) zwei nicht kongruente Wertepaare der Parameter, die zu demselben Punkt der hyperelliptischen Fläche Φ gehören, so lassen sich u', v' linear durch u, v ausdrücken:

$$(1) \qquad u' = au + bv + c, \quad v' = a'u + b'v + c',$$

wo wohlgemerkt die Koeffizienten bei der Veränderung des Punktes auf Φ konstant bleiben.

Dies läßt sich anders formulieren, indem man sagt: *Jede Fläche Φ ist einer Involution von der Ordnung r birational äqui-*

die auf einer Picardschen Fläche F von einer endlichen Gruppe G von birationalen und F in sich überführenden Transformationen erzeugt wird.

Dieser Satz wurde in seiner vollen Allgemeinheit aufgestellt von Enriques und Severi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **16**, 445 (1907), *Acta Math.* **32**, 338 (1910). Für den Fall der Involutionen, die keine einem Koinzidenzpunkt entsprechende Fundamentalkurve besitzen, vgl. Bagnera und De Franchis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **16**, 491 (1907); *Soc. ital. dei XL (Mem.)* (3) **15**, 260 (1908). Die Klassifikation der hyperelliptischen Flächen ist so auf die Untersuchung der endlichen Gruppen von birationalen Transformationen einer Picardschen Fläche in sich zurückführbar. Enriques und Severi haben sich im Fall der regulären hyperelliptischen Flächen auf die Untersuchung derjenigen Flächen vom Geschlecht $p_g = 1$ beschränkt, welche den Gruppen der birationalen Transformationen einer Kurve vom Geschlecht 2 in sich entsprechen, und sind zu projektiv genau bestimmten Typen gelangt, die als hyperelliptische Flächen durch gewisse Konfigurationen von singulären Punkten und berührenden Überebenen im Überraume charakterisiert sind. Besonders hebt sich eine Konfiguration von 9 singulären Punkten und 9 Überebenen heraus, welche eine bemerkenswerte hyperelliptische Fläche 6. Ordnung des vierdimensionalen Raumes liefern. Bagnera und De Franchis haben dagegen auf analytischem Wege *die schwierige Bestimmung aller möglichen Gruppen der Substitutionen* (1) *ausgeführt, indem sie für jede von ihnen die zugehörige Periodentabelle auch im allgemeinen Fall der Flächen Φ, welche keiner Gruppe der birationalen Transformationen einer Kurve vom Geschlechte 2 in sich entsprechen, angaben*, und haben so die Theorie der Abelschen Funktionen und der sogenannten Thetafunktionen und intermediären Funktionen von zwei Veränderlichen endgültig erledigt. Sie haben auch die Gleichungen oder die Darstellung mit Thetafunktionen für alle Flächen Φ und insbesondere für die regulären Flächen vom Geschlecht Null und Doppelgeschlecht 1 untersucht. Vgl. Bagnera und De Franchis, *Soc. ital. dei XL Mem.* (3) **15**, 314 (1908), *IV Congresso int. dei Mat. Roma* (1909) p. 249, *Rend. Circ. M.* **30**, 185 (1910), wo sich auch die Bestimmung der Basiszahl für alle hyperelliptischen Flächen findet.

Die irregulären hyperelliptischen Flächen vom Range $r > 1$, die schon Bagnera und De Franchis, *C. R.* **145**, 747 (1907) vollständig klassifiziert hatten, wurden von Enriques und Severi durch die Werte der Geschlechter und Mehrgeschlechter bestimmt:

Rom. Linc. Rend. (5) **17**, 5 (1908), *Acta Math.* **32**, 355 (1910). Das arithmetische Geschlecht wird $p_a = -1$ und die Mehrgeschlechter P_i werden 0 oder 1.

5. Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null.

Den rationalen Flächen und Regelflächen, insofern sie als Flächen ohne wirkliche invariante lineare Kurvensysteme auftreten, kann man die Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null zur Seite stellen, zu welchen alle hyperelliptischen Flächen vom Geschlecht $p_g = 1$ gehören.

Irreguläre Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null sind nur die Jacobischen und Picardschen hyperelliptischen Flächen; *sie hängen von drei Moduln und einer ganzen Zahl* (dem Mindestgeschlecht der auf ihr liegenden Kurven) *ab.*

Die regulären Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null *hängen von 19 Moduln und der ganzen Zahl* π (dem Mindestgeschlecht der auf ihr liegenden Kurven) *ab.* Für jeden Wert von π ($= 3, 4, 5 \ldots$) existiert im π-dimensionalen Raum eine durch 19 Moduln festgelegte Gattung von Flächen der Ordnung $2\pi - 2$ mit kanonischen Schnittkurven vom Geschlecht π, ohne mehrfache Punkte. Die Flächengattungen, die den verschiedenen Werten von π entsprechen, sind birational irreduzibel.

Die Basiszahl für eine Fläche mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null und mit allgemeinen Moduln ist 1. Die Division durch eine ganze Zahl ist für ein lineares oder kontinuierliches System auf einer solchen Fläche immer eindeutig.

Die Flächen mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null werden durch die Geschlechtswerte $p_g = P_4 = 1$ charakterisiert.

Diese Flächen wurden untersucht von Enriques, *Bologna Rend.* **13**, 25 (1908) und Severi, *Ven. Ist. Atti* **68**, 256 (1908). Wenn eine Involution J_n auf einer solchen Fläche F eine endliche Zahl ($\geqq 0$) von Koinzidenzen besitzt, so wird J_n auf F durch eine endliche Gruppe G_n von birationalen und F in sich überführenden Transformationen erzeugt. Vgl. Enriques, *Bologna Rend.* **14**, 71 (1910). Auf Grund dieses Satzes hat Godeaux, *C. R.* **156**, 1737 (1913) die Involutionen vom Geschlecht $p_g = 1$ auf einer regulären Fläche mit kanonischer Kurve von der Ordnung Null untersucht. Für die Ordnung n dieser Involutionen sind nur die Werte $n = 2, 3, 4, 6, 8, 12$ möglich.

Kapitel XXXIV.

Flächen dritter Ordnung.

Von *L. Berzolari* in Pavia.

§ 1. Einleitung.

Die ersten Untersuchungen über die allgemeinen Flächen 3. Ordnung wurden um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts von Cayley, Salmon und Sylvester angestellt und betrafen die beiden Hauptpunkte, um die sich seither diese Theorie gedreht hat: *die 27 Geraden der Fläche,* die zuerst in einer Korrespondenz zwischen Cayley und Salmon 1849 auftraten, und das von Sylvester 1851 entdeckte *Pentaeder.*

Einige Jahre später wurden diese und andere Eigenschaften der F_3 von Steiner, *J. f. Math.* **53**, 133 (1857), *Werke II*, S. 649, aufs neue ohne Beweis mitgeteilt und dann mit vielen anderen Sätzen zusammen auf rein geometrischem Wege von Cremona und R. Sturm in ihren von der Berliner Akademie 1866 mit dem Steinerpreis gekrönten Arbeiten bewiesen. Die Arbeit von Cremona, *J. f. Math.* **68**, 1—133 (1868), ist in seinen *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung* (übertragen von Curtze, Berlin 1870, von uns als „*Grundzüge*" zitiert) enthalten; die Arbeit von Sturm ist unter dem Titel *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung,* Leipzig 1867 (von uns als „*Synth. Unters.*" zitiert) erschienen.

Bei Cremona werden die Sätze über die F_3 meist als besondere Fälle aus Sätzen über Flächen von beliebiger Ordnung abgeleitet; Sturm hingegen nimmt zum Ausgangspunkt die verschiedenen von Grassmann, Steiner und August herrührenden Erzeugungsarten einer F_3.

Eine neuere Monographie hat Dumont, *Introduction à la géométrie du troisième ordre,* Annecy 1904 geliefert.

Viele Eigenschaften finden sich auf analytischem Wege bei Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes II*, 3. Aufl.,

Leipzig 1880, Kap. V, S. 363 und auf geometrischem Wege bei Reye, *Die Geometrie der Lage III,* 4. Aufl., Leipzig 1910, S. 74, 213, abgeleitet.

Eine kürzere Übersicht mit vielen Literaturangaben gaben Korteweg, *Amsterdam Nieuw Archief* **20**, 63 (1893); W. F. Meyer, *Probeartikel für die Enzykl. der math. Wiss. III, C* 6a, 1896 *(Flächen 3. Ordnung)* und Henderson, *The twenty-seven Lines upon the cubic surface*, Cambridge 1911.

§ 2. Die 27 Geraden und 45 dreifach berührenden Ebenen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung.

Eine allgemeine F_3 enthält 27 Gerade, die alle voneinander verschieden sind.

Daß eine F_3 im allgemeinen eine endliche Anzahl von Geraden enthält, hatte Cayley bemerkt, ihre Anzahl wurde darauf von Salmon abgeleitet, einerseits als Anwendung der Theorie der Reziprokalflächen (Kap. XXXI, § 3), indem er durch die Plückerschen Formeln die Anzahl der doppelt berührenden Ebenen des der Fläche von einem nicht auf ihr gelegenen Punkte aus umschriebenen Kegels bestimmte, anderseits indem er die Existenz einer Geraden a auf F_3 voraussetzte und dann durch das Verschwinden der Diskriminante bestimmte, wie oft der den weiteren Schnitt mit einer Ebene durch a bildende Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Vgl. Cayley, *Cambridge and Dublin Math. J.* **4**, 118 (1849); *Papers I,* p. 445; Salmon, *Cambr. and Dublin Math. J.* **4**, 252 (1849); außerdem Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 397 und S. LIII, Anm. 150.

Daß die 27 Geraden alle verschieden sind, solange die F_3 keine Doppelpunkte besitzt, bemerkte F. Klein, *Math. Ann.* **6**, 566 (1873).

Ein anderer Beweis für die Existenz der 27 Geraden, aus dem auch viele Eigenschaften der von ihnen gebildeten Konfiguration folgen, stammt von R. Sturm, *Math. Ann.* **4**, 249 (1871); *J. f. Math.* **88**, 213 (1879); er beruht darauf, daß man die Geraden bestimmt, die vier allgemeine ebene Schnittkurven von F_3 n verschiedenen Punkten treffen.

Zu den 27 Geraden gelangt man nach Salmon, a. a. O. S. 260, auch, indem man beachtet, daß für eine F_3 der Ort der Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Geraden kein anderer ist wie die Gesamtheit ihrer Geraden. Da (Kap. XXXI, § 4) für

eine Fläche F_n von der Ordnung n diese Kurve der Schnitt mit einer Fläche von der Ordnung $11n - 24$ wird, ergibt sich, daß *für eine F_3 die 27 Geraden den vollständigen Schnitt von F_3 mit einer Fläche 9. Ordnung bilden* (vgl. unten § 6 und § 9).

Die einzigen doppelt berührenden Ebenen von F_3 sind die Ebenen der Büschel, die zu Achsen die 27 Geraden haben. Eine durch eine Gerade a von F_3 gelegte Ebene schneidet F_3 außerdem in einem Kegelschnitte, dessen Schnittpunkte mit a die Berührungspunkte der doppelt berührenden Ebene sind. Dreht sich die Ebene um a, so durchlaufen die beiden Punkte auf a eine Involution, in deren Doppelpunkten, den *Asymptotenpunkten* von a (Steiner), a die parabolische Kurve von F_3 berührt (vgl. Kap. XXXI, § 2): Salmon, a. a. O. S. 254.

Unter den durch a gehenden Ebenen sind fünf, welche F_3 außerdem in zwei Geraden schneiden. Diese Ebenen berühren F_3 dreifach, die Berührungspunkte sind die Schnittpunkte der drei in ihnen enthaltenen Geraden.

Demnach wird jede Gerade der Fläche von 10 anderen getroffen, die zu je zweien in fünf dreifach berührenden Ebenen liegen, und die Gesamtzahl dieser dreifach berührenden Ebenen beträgt 45.

Die Schnittpunkte von je zweien der 27 Geraden sind im allgemeinen verschieden (§ 14), *und ihre Anzahl ist 135.*

Cayley, *Cambr. Dubl. Math. J.* **4**, 118 (1849), *Papers I,* p. 445, hat, von einer geeigneten Gleichungsform der Fläche ausgehend, die Gleichungen der 45 dreifach berührenden Ebenen in rationaler Form gegeben und durch Rechnung gezeigt, daß, *wenn man drei Gerade der Fläche, die in einer Ebene liegen, herausgreift, die Quadrupel der übrigen durch sie hindurchgehenden dreifach berührenden Ebenen dieselben Doppelverhältnisse zeigen.* Geometrische Beweise für diesen Satz gaben Hart, *Cambr. Dubl. Math. J.* **4**, 253 (1849); Kohn, *Monatsh. f. Math.* **2**, 343 (1891).

Nach Brioschi, *Rom. Acc. Lincei Atti* (2) $\mathbf{3}^2$, 257 (1876), *Opere III*, p. 353, sind die 45 dreifach berührenden Ebenen gemeinsame Tangentialebenen von drei bestimmten Flächen 10. Klasse.

Nach Humbert, *J. de Math.* (5) **2**, p. 289 Anm. (1896) gehören je 12 dieser Ebenen zu 120 abwickelbaren Flächen 4. Klasse erster Art.

§ 3. Eigenschaften der Konfiguration der 27 Geraden und der 45 dreifach berührenden Ebenen.

Die Systeme von zueinander paarweise windschiefen Geraden, die sich aus den 27 Geraden von F_3 bilden lassen, bestehen aus 2, 3, 4, 5, 6 und nicht mehr Geraden und heißen der Reihe nach *Dupel, Tripel, Quadrupel, Quintupel, Sextupel.*

Während die Dupel, Tripel, Quadrupel und Sextupel alle von einer Art sind, lassen sich zwei Arten Quintupel unterscheiden, je nachdem die Geraden eines Quintupels von einer einzigen Geraden der Fläche oder von zweien getroffen werden.

Nennen wir $u_0, u_1, u_2, \ldots$ die Anzahlen der Geraden von F_3, die keine Gerade einer der genannten Gruppen oder eine einzige oder zwei usw. treffen, nennen wir ferner N die Anzahl der Gruppen selbst, so finden wir die folgende Tabelle:

	N	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
Geraden	27	16	10	—	—	—	—
Dupel	216	10	10	5	—	—	—
Tripel	720	6	9	6	3	—	—
Quadrupel . . .	1080	3	8	6	4	2	—
Quintupel 1. Art	432	1	5	10	0	5	1
Quintupel 2. Art	216	0	10	0	10	0	2
Sextupel . . .	72	0	0	15	0	0	6

Die Regelfläche 2. Grades, die durch die Geraden eines Tripels bestimmt wird, schneidet F_3 außerdem in den Geraden eines weiteren Tripels.

Die Anzahl dieser Regelflächen, die F_3 in zwei solchen sich gegenseitig *ergänzenden Tripeln* schneiden, beträgt 360 (Steiner, *Werke II,* S. 654).

Zwei Quintupel, deren Geraden sich auf dieselbe Gerade von F_3 stützen, sind von derselben Art oder nicht, je nachdem sie eine ungerade oder gerade Anzahl von Geraden gemein haben.

Es gibt 32 Quintupel, deren fünf Geraden sich auf dieselbe Gerade von F_3 stützen: 16 sind von der ersten Art und 16 von der zweiten; jedem der einen Art kann man eines der anderen Art entsprechen lassen, indem man zwei Geraden vertauscht, die in derselben durch die gemeinsame Transversale gehenden dreifach berührenden Ebene liegen.

Für diese Eigenschaften vgl. R. Sturm, *Synth. Unters.* S. 46,

und auch Brioschi, *Ann. di sc. mat. fis.* **6**, 374 (1855), *Nouv. Ann.* (1) **18**, 138 (1859), *Opere I,* p. 171, *V*, p. 159.

Die sechs Quintupel, die sich aus den sechs Geraden eines Sextupels bilden lassen, sind von der ersten Art, und ihre sechs Transversalen bilden ein neues Sextupel. Wenn man von diesem ausgeht und dieselbe Operation ausführt, findet man das ursprüngliche Sextupel wieder.

Ein solches System von zwei konjugierten Sextupeln wurde zuerst von Schläfli, *Quart. J.* **2**, 55, 110 (1858) betrachtet, es heißt eine *Doppelsechs. Es gibt 36 Doppelsechse.*

Eine Gerade von F_3 gehört zu 16 Sextupeln, ein Dupel zu 5, ein Tripel zu zwei, ein Quadrupel zu einem einzigen.

Eine Doppelsechs wird nicht allein durch eines ihrer Sextupel festgelegt, sondern auch durch zwei windschiefe Gerade, die je einem dieser Sextupel angehören, oder auch durch eine Gerade des einen Sextupels und die fünf Geraden des anderen, die jene treffen.

Mit dieser letzten Eigenschaft hängt eine einfache geometrische Konstruktion der 27 Geraden zusammen (vgl. Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 402; Sturm, *Synth. Unters.* S. 58). Man nehme fünf Gerade b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, die zueinander paarweise windschief sind und von denen keine vier derselben quadratischen Regelfläche angehören, die ferner alle von einer einzigen Geraden a_1 getroffen werden. Legt man dann die F_3 durch vier Punkte von a_1 und 15 Punkte, die man außerhalb von a_1 zu je dreien auf den 5 Geraden $b_2, \ldots b_6$ annimmt, so enthält diese Fläche die sechs gegebenen Geraden. Auf dieser F_3 bilden $b_2, \ldots b_6$ ein Quintupel erster Art, und die Gerade b_1, die das Quintupel zu einem Sextupel vervollständigt, ebenso wie die übrigen Geraden $a_2, \ldots a_6$ des konjugierten Sextupels lassen sich linear konstruieren, da z. B. a_2 mit a_1 zusammen das Paar der Transversalen der Geraden b_3, b_4, b_5, b_6 bildet. Die 15 übrigen Geraden von F_3 erhält man als die Schnittlinien der 15 Ebenenpaare $a_i b_k$ und $a_k b_i$. Da man diese Konstruktionen alle in reeller Weise ausführen kann, ergibt sich zugleich *die Existenz reeller F_3 mit 27 reellen Geraden* (vgl. § 15).

Lüroth hat bemerkt, daß die vorstehend definierte F_3 der Ort aller Punkte ist, aus denen die sechs Geraden $a_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ durch sechs Tangentialebenen eines Kegels zweiter Klasse projiziert werden, s. Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 258 (1869). Vgl. auch Kohn, *Monatsh. f. Math.* **2**, 293 (1891); Montesano, *Ann. di Mat.* (3) **1**, 341 (1898); R. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verwandtschaften IV,* Leipzig 1909, S. 283.

Über die Konstruktion der durch $a_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ festgelegten Doppelsechs, insbesondere ihre Konstruktion unabhängig von der F_3, vgl. noch Sylvester, *C. R.* **52**, 977 (1861), *Papers II*, p. 242; Reye, *Geom. der Lage III*, 1910, S. 92; Kasner, *Am. J.* **25**, 107 (1903); Richmond, *Cambridge Phil. Proc.* **14**, 475 (1908); Dixon, *Quart. J.* **40**, 381 (1909); Jolles, *Arch. Math. Phys.* (3) **16**, 1 (1910); Baker, *London R. S. Proc. A*, **84**, 597 (1911), *London M. S. Proc.* (2) **9**, 177 (1911). Eine Verifikation gab Cayley, *Quart. J.* **10**, 58 (1870), *Papers VII*, p. 316. Ein Beweis für die Existenz dieser Doppelsechs, den Cayley, *Cambridge and Dublin Messenger of Math.* **4**, 220 (1868), *Papers VIII*, p. 430 mit Hilfe statischer Betrachtungen gegeben hat, ist nach Bennett, *London M. S. Proc.* (2) **9**, 351 (1911) nicht stichhaltig.

Die vorstehenden Betrachtungen führen sofort zu einer Bezeichnung der 27 Geraden, die sehr einfach und durchsichtig ist und von Schläfli, a. a. O. S. 116, angegeben wurde. Wir legen beliebig eine der 36 Doppelsechsen fest und bezeichnen ihre Geraden mit

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6, \end{matrix}$$

so daß a_i die Gerade b_j trifft, wenn $i \neq j$. Die 15 übrigen Geraden, die sich als Schnitt der Ebenenpaare $a_i b_k$ und $a_k b_i$ ergeben, werden mit $c_{ik} (= c_{ki})$ bezeichnet. Hiernach trifft eine Gerade c_{ik} eine Gerade a oder b oder trifft sie nicht, je nachdem sie mit ihr einen Index gemein hat oder nicht. Zwei Geraden c treffen sich oder treffen sich nicht, je nachdem ihre Symbole keinen oder einen Index gemein haben.

Die Symbole der 45 dreifach berührenden Ebenen bilden zwei Typen: 30 haben den Typus $(a_i b_k c_{ik})$ und 15 den Typus $(c_{ik} c_{lm} c_{np})$.

Die Symbole der 35 Doppelsechse, die außer der zugrunde gelegten Doppelsechs existieren, zeigen ebenfalls zwei Typen, 15 sind vom Typus

$$\begin{matrix} a_i & b_i & & c_{km} & c_{kn} & c_{kp} \\ a_k & b_k & c_{il} & c_{im} & c_{in} & c_{ip} \end{matrix}$$

und 20 vom Typus

$$\begin{matrix} a_i & a_k & a_l & c_{mn} & c_{mp} & c_{n} \\ c_{kl} & c_{il} & c_{ik} & b_{n} & b_{[illegible]} & b_{m}. \end{matrix}$$

Cremona, *Grundzüge,* S. 181, hat mit Hilfe dieser Bezeichnung eine Tabelle der 36 Doppelsechs aufgestellt.

Zwei beliebige Doppelsechs haben miteinander gemein entweder vier Geraden (wie a_1, a_2, b_1, b_2), *die paarweise in je einer Ebene liegen, aber so, daß die Geraden des einen Paares die des anderen nicht schneiden, oder sechs Gerade* (wie a_1, a_2, a_3, b_4, b_5, b_6), *die zwei ergänzende Tripel bilden.* Im ersten Falle heißen nach Kohn, *Wien. Sitzungsber.* **114**, 1443 (1905) die Doppelsechs *syzygetisch,* im zweiten Falle *azygetisch,* in Analogie zu den von Frobenius, *J. f. Math.* **103**, 151 (1888) in die Theorie der Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung eingeführten Bezeichnungen (vgl. Bd. II[1], S. 409).

Jede Doppelsechs ist syzygetisch zu 15 und azygetisch zu 20 anderen.

Zwei azygetische Doppelsechs bilden durch ihre 12 nicht gemeinsamen Geraden eine neue Doppelsechs, die zu jeder der beiden gegebenen azygetisch ist. Solche *Tripel azygetischer Doppelsechs* gibt es 120.

Diese Sätze verdankt man Cremona, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **1**, 867 (1877), *Math. Ann.* **13**, 303 (1878).

Mit den Gruppen von windschiefen Geraden auf F_3 stehen in engem Zusammenhang die von Geraden der Fläche gebildeten geschlossenen Vier-, Fünf- und Sechsseite. Mit diesen haben sich beschäftigt Affolter, *Arch. Math. Phys.* **56**, 113 (1874) und R. Sturm, *Math. Ann.* **23**, 289 (1884).

Es gibt 1080 Vierseite, 2592 Fünfseite, 720 Sechsseite und keine windschiefen Vielseite von größerer Seitenzahl auf der Fläche.

Wenn wir zwei dreifach berührende Ebenen α_1, α_2 betrachten, deren Schnittlinie der Fläche nicht angehört (z. B. $a_1 b_2 c_{12}$ und $a_3 b_4 c_{34}$), so trifft jede der drei Geraden von F_3, die in der ersten Ebene liegen, eine der drei Geraden in der zweiten Ebene, und die drei Ebenen β_1, β_2, β_3, die diese drei Geradenpaare ($a_1 b_4$, $b_2 a_3$, $c_{12} c_{34}$) enthalten, schneiden F_3 außerdem in drei Geraden (c_{14}, c_{23}, c_{56}), die in einer neuen Ebene α_3 liegen. Die beiden Trieder $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ haben also die Eigenschaft, daß die Seitenflächen des einen die Seitenflächen des anderen in 9 Geraden von F_3 schneiden. Sie heißen *konjugierte* oder Steinersche *Trieder,* weil ihre Betrachtung auf Steiner (*Werke II,* S. 655) zurückgeht.

Es gibt 120 Paare konjugierte Trieder.

Daraus folgt, daß *sich die Gleichung von F_3 auf 120 Arten in die Form bringen läßt:*

$$+ z_1 z_2 z_3 = 0,$$

wo die y und z lineare Formen der Punktkoordinaten bedeuten. Diese Gleichungsform rührt her von Cayley und Salmon: vgl. die schon angeführte Arbeit von Cayley, *Cambridge and Dublin Math. J.* 4, 118 (1849), *Papers I*, S. 445.

In der Schläflischen Bezeichnung haben 20 Triederpaare den Typus

$$\begin{array}{ccc} a_i & & c_{ik} \\ b_l & c_{kl} & a_k \\ c_{il} & & b_i, \end{array}$$

10 den Typus

$$\begin{array}{ccc} c_{im} & c_{kn} & c_{lp} \\ c_{np} & & c_{mk} \\ c_{kl} & c_{mp} & c_{in} \end{array}$$

und 90 den Typus

$$\begin{array}{ccc} a_i & & c_{ik} \\ & & c_{lm} \\ c_{im} & c_{kl} & c_{np}, \end{array}$$

wobei die Ebenen die Geraden enthalten, die in den Reihen und Spalten der angeschriebenen Schemata stehen.

Zwei dreifach berührende Ebenen, die eine Gerade von F_3 gemein haben, gehören 4 Paaren konjugierter Trieder an.

Zwischen den Doppelsechsen und den Triederpaaren bestehen bemerkenswerte Beziehungen, die Cremona a. a. O. gefunden hat. *Wenn man ein Triederpaar herausgreift, so lassen sich die übrigen 18 Geraden von F_3 auf eine einzige Art zu einem Tripel azygetischer Doppelsechse anordnen, umgekehrt liegen die neun Geraden von F_3, die nach Ausschluß eines Tripels azygetischer Doppelsechse übrig bleiben, immer in einem Paar konjugierter Trieder.*

Die 15 Geraden, die nach Ausschluß einer Doppelsechs übrig bleiben, lassen sich auf zehn Arten in neun und sechs Gerade einteilen, so daß die neun Geraden in zwei konjugierten Triedern liegen und die sechs Geraden zwei ergänzende Tripel bilden.

Steiner, *Werke II*, S. 655, hat gefunden, daß *durch ein Paar konjugierter Trieder zwei weitere bestimmt werden, derart,*

daß die drei Paare zusammen alle 27 Geraden enthalten. Solche Tripel von Triederpaaren gibt es 40.

Vgl. auch Cremona, *Grundzüge,* S. 206; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 63.

Die vorstehende Eigenschaft führt dazu, die *Neunflache (Enneaeder),* d. h. Systeme von neun dreifach berührenden Ebenen zu betrachten, die zusammen alle 27 Geraden enthalten. *Sie sind von zwei Arten: die 40 der ersten Art sind so beschaffen, daß ihre Ebenen sich auf vier Arten auf drei Trieder verteilen lassen, d. h. vier Tripel von Triederpaaren angehören, die 160 der zweiten Art zerfallen auf eine einzige Art in drei Trieder, d. h. gehören einem einzigen Tripel von Triederpaaren an.* Vgl. Cremona, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **3**, 209 (1870). Die Neunflache erster Art wurden zur gleichen Zeit von Jordan, *C. R.* **70**, 326 (1870) untersucht.

Bertini, *Ann. di Mat.* (2) **12**, 301 (1884) hat außerdem das allgemeine Problem gelöst, alle *Polyeder* zu bestimmen, die aus dreifach berührenden Ebenen bestehen, von denen keine zwei sich in einer Geraden von F_3 schneiden.

Nennt man *konjugierte Ebene* eines Trieders eine Ebene, die aus jeder der drei Ebenen des Trieders eine Gerade von F_3 enthält, so findet man zunächst außer den bis jetzt betrachteten Triedern (den Steinerschen Triedern oder *Triedern dritter Art*), die drei konjugierte Ebenen besitzen und deren es 240 gibt, noch 2880 *Trieder erster Art,* die keine konjugierten Ebenen haben, und 2160 *Trieder zweiter Art,* die eine einzige konjugierte Ebene besitzen. Dann hängt die Bestimmung aller möglichen Polyeder von der Bestimmung der *Hauptpolyeder* ab, d. h. derjenigen, die nicht in anderen Polyedern enthalten sind, und gründet sich auf die Eigenschaft, daß ein Polyeder von gegebener Art vollständig durch vier Anzahlen bestimmt ist: die Anzahl der Ebenen, aus denen es besteht, und die Anzahlen, die angeben, wieviel Trieder der drei Arten sich aus seinen Ebenen bilden lassen. Es ergibt sich, daß *die Hauptpolyeder außer den Neunflachen erster und zweiter Art eine Art von Siebenflachen und eine Art von Fünfflachen (Pentaedern) bilden; von den ersteren gibt es 4320, von den letzteren 216.*

Was die möglichen Arten von Polyedern betrifft, so gibt es eine Art von Diedern, drei von Triedern, vier von Tetraedern, sieben von Pentaedern, fünf von Hexaedern, vier von Heptaedern, zwei von Oktaedern und zwei von Enneaedern.

Die Hauptpentaeder sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie Hauptpolyeder sind, deren sämtliche Trieder von

der zweiten Art sind. Sie wurden bereits von Cremona, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **1**, 854 (1877) untersucht, der ihre enge Verknüpfung mit den Doppelsechsen hervorhob: *die 12 Geraden, die nach Ausschluß der Seitenflächen eines Hauptpentaeders übrigbleiben, bilden eine Doppelsechs; umgekehrt gehören die 15 Geraden, die nach Ausschluß der 12 Geraden einer Doppelsechs übrigbleiben, zu sechs Hauptpentaedern, und die 15 Ebenen, welche die 15 Geraden enthalten, bilden jedesmal die fünf Ebenen eines der Pentaeder und die zehn seinen zehn Triedern konjugierten Ebenen.*

Die 216 Hauptpentaeder verteilen sich also auf 36 Gruppen, die den 36 Doppelsechsen entsprechen. Vgl. noch § 5.

Schematische Darstellungen und Diagramme für die 27 Geraden und 45 Ebenen gaben H. Taylor, *London Phil. Trans.* **185**, 37 (1894); Dixon, *Quart. J.* **41**, 203 (1910); Bennett, *London M. S. Proc.* (2) **9**, 336 (1911), (2) **10**, 479 (1912); Milne, ebenda (2) **10**, 446 (1912).

Über die Konfigurationen, die durch den Schnitt der 27 Geraden und 45 Ebenen mit einer Ebene entstehen, s. Martinetti, *Ann. di Mat.* (2) **14**, 161 (1886).

Die Gleichung 27. Grades, von welcher die Aufsuchung der 27 Geraden abhängt, wurde zuerst von Jordan, *C. R.* **68**, 865 (1869), **70**, 326 (1870), *J. de Math.* (2) **14**, 147 (1869), *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris 1870, p. 316, 365 untersucht, der bewies, daß sie keine Resolvente von niedrigerer als der 27. Ordnung besitzen kann, und außerdem, daß ihre Galoissche Gruppe G, welche die Ordnung $72 \cdot 6! = 51840$ besitzt, isomorph ist mit der Gruppe der Gleichung 40. Grades, auf welche das Problem der Dreiteilung der Perioden der vierfach periodischen hyperelliptischen Funktionen führt. Die wirkliche Zurückführung des einen Problems auf das andere wurde von F. Klein, *J. de Math.* (4) **4**, 169 (1888) angedeutet und von Burkhardt, *Math. Ann.* **41**, 313 (1893) ausgeführt mit Hilfe einer liniengeometrischen Abbildung der 27 Geraden und 45 Ebenen.

Burkhardt hat gefunden, daß die Gruppe G sich als Gruppe von linearen Substitutionen in 6 Veränderlichen mit rationalen Koeffizienten darstellen läßt. Burnside, *Quart. J.* **40**, 246 (1909), *Theory of groups of finite order*, Cambridge, 2. Aufl. 1911, p. 485, gelangte auf einfachere Weise zu demselben Resultat und vervollständigte es, indem er zeigte, daß auch ganzzahlige Koeffizienten genügen. Über diese Substitutionsgruppe vgl. noch Burnside, *London M. S. Proc.* (2) **10**, 284 (1911); Baker, *London M. S. Proc.* (2) **11**, 298 (1912).

Gruppentheoretische Untersuchungen über die Gruppe G und die einfache Gruppe von der Ordnung 25 920, die von ihr eine invariante Untergruppe vom Index 2 bildet, finden sich bei Kühnen, *Diss.*, Marburg 1888; Dickson, *Linear groups with an exposition of the Galois field Theory,* Leipzig 1901, p. 303, *C. R.* **128**, 873 (1899), *Trans. Am. M. S.* **5**, 126 (1904), *London M. S. Proc.* (2) **1**, 283 (1904). Über die Betrachtung der letzten Gruppe als Gruppe von Kollineationen im quarternären Gebiet s. Bagnera, *Palermo Rend. Circ. Mat.* **19**, 21 (1905); Burnside, *London R. S. Proc.* **77** (A), **182** (1906). Vgl. außerdem Dickson, *C. R.* **132**, 1547 (1901); *Amer. Math. Soc. Bull.* (2) **8**, 63 (1901); *Amer. Math. Soc. Trans.* **2**, 363 (1901); *Quart. J.* **33**, 145 (1902); **39**, 205 (1908).

Wenn man der Gleichung 28. Grades, von der die Bestimmung der 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung abhängt, eine Wurzel adjungiert, so werden die übrigen Wurzeln durch eine Gleichung 27. Grades bestimmt, deren Gruppe mit der Gruppe G isomorph ist: Jordan, *Traité,* p. 330.

Pascal, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 163, 269 (1892); **21**, 85 (1893) hat diese beiden Gruppen mit Hilfe der Methode der sogenannten ungeraden Charakteristiken für das Geschlecht 3 (vgl. Bd. II[1], S. 412f.) behandelt, wobei er insbesondere den Gruppencharakter der Bertinischen Polyeder und anderer Gruppierungen der 27 Geraden und 45 Ebenen untersuchte.

§ 4. Polarentheorie. Das Sylvestersche Pentaeder.

Sylvester, *Cambridge and Dublin Math. J.* **6**, 198 (1851), *Papers I,* p. 195, hat gefunden, daß *die Gleichung einer allgemeinen F_3 sich immer auf eine einzige Art in die Form*

$$(1)\qquad a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0$$

(die *Pentaederform* der Flächengleichung) *bringen läßt, wo $y_1, \dots y_5$ lineare Formen der Punktkoordinaten bedeuten und die in ihnen enthaltenen Konstanten sich so wählen lassen, daß die notwendigerweise zwischen den fünf Formen bestehende identische Relation lautet*

$$(2)\qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0.$$

Die Gleichungen $y_1 = 0, \dots y_5 = 0$ stellen die 5 Ebenen (oder Seitenflächen) des *Polfünfflachs* oder *Sylvesterschen Pentaeders* der Fläche dar.

Die Sätze über das Pentaeder und seine Beziehungen zur Hesseschen Fläche *(Kernfläche)* von F_3, die Sylvester ohne Beweis gegeben hatte, wurden mit vielen anderen, aber wieder ohne Beweis, kurz darauf von Steiner, *Werke II,* S. 649, aufs neue mitgeteilt. Einen Beweis von ihnen gab Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 193 (1861), er bildete die Gleichung 10. Grades, von welcher die Ermittelung der 10 Ecken des Pentaeders abhängt, und zeigte, daß sie eine Resolvente 5. Grades besitzt. Seine Untersuchungen sind in Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 381, wiedergegeben.

Diese Sätze wurden darauf auf geometrischem Wege bewiesen von Cremona, *Grundzüge,* S. 155; Sturm, *Synth. Unters.* S. 127; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 124; mit Hilfe einer methodischen Verwendung der symbolischen Formenbezeichnung von Gordan, *Math. Ann.* **5**, 341 (1872); durch mechanische Betrachtungen von Reye, *J. f. Math.* **78**, 114 (1874).

Der geometrische Gehalt des Sylvesterschen Satzes liegt in der *Polarentheorie* (vgl. Kap. XXX, § 5), die für die F_3 von Cremona, *Grundzüge,* S. 152 und Sturm, *Synth. Unters.* S. 85 entwickelt wurde. Auf rein synthetischem Wege haben sie behandelt R. Sturm, *J. f. Math.* **88**, 221 (1880); Milinowski, ebenda **89**, 136 (1880); Reye, *Geom. d. Lage III,* S. 106; außerdem Thieme an den Bd. II^1, S. 288 angeführten Stellen und besonders *Math. Ann.* **28**, 133 (1887).

Bezüglich einer F_3 hat jeder Punkt eine Polarebene und eine quadratische Polare. Die umgekehrte Frage, ob drei beliebig gegebene Flächen 2. Ordnung sich immer als erste Polaren bezüglich einer F_3 ansehen lassen, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob es immer möglich ist, die Gleichungen dreier gegebenen Flächen 2. Ordnung durch lineare Kombinationen der Quadrate derselben fünf linearen Formen darzustellen. Salmon, *Anal. Geom. of three dim.* 2. Aufl. Dublin 1865, p. 100, 177 (Salmon-Fiedler, *Raumgeom.* 2. Aufl. I, 1874, S. 166, 282), hatte angenommen, daß diese Darstellung immer möglich ist. Frahm, *Math. Ann.* **7**, 635 (1874) und E. Toeplitz, *Diss.* Breslau 1876, *Math. Ann.* **11**, 434 (1877) zeigten hingegen, daß *die beiden Darstellungen gleichbedeutend, aber im allgemeinen nicht möglich sind, wenn sie es hingegen sind, sich auf* ∞^2 *Arten herstellen lassen,* vgl. auch Darboux, *Bull. sc. math* (1) **1**, 353 (1870).

Toeplitz hat a. a. O. auch die Kombinante des durch die drei gegebenen Flächen festgelegten Netzes bestimmt, deren Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, daß die drei Flächen die ersten Polaren dreier Punkte bezüglich

einer F_3 sind; er hat hinzugefügt, daß, *wenn sie verschwindet, die Ebene der drei Pole sich so bewegt, daß sie Schmiegungsebene einer festen kubischen Raumkurve bleibt,* und aus seinem Verfahren einen neuen Beweis des Sylvesterschen Satzes hergeleitet. F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 23 (1881) hat außerdem gezeigt, daß *dieselbe kubische Raumkurve auch die Ebenen der Sylvesterschen Pentaeder der* ∞^2 *zugehörigen Flächen 3. Ordnung zu Schmiegungsebenen hat.* Vgl. Clifford, *Math. Papers,* London 1882, p. 229 (1876); Dixon, *London M. S. Proc.* (2) **7**, 150 (1909).

Jede Ebene des Raumes hat bezüglich einer F_3 acht *konjugierte Pole.*

Die Hessesche und die Steinersche Fläche fallen in eine einzige Fläche 4. Ordnung 16. Klasse zusammen, die *Steinersche Kernfläche,* deren Punkte sich derart zu Paaren ordnen, daß die quadratische Polare des einen Punktes eines Paares immer ein Kegel mit der Spitze im anderen und die Polarebene des einen die Tangentialebene der Kernfläche im anderen ist. Solche Punkte heißen *reziproke Pole.*

Die Scheitel zweier konjugierten Trieder sind reziproke Pole der Kernfläche, und die quadratische Polare eines jeden ist ein dem konjugierten Trieder umschriebener Kegel: Steiner, *Werke II,* S. 656.

Die *gemischte zweite Polare zweier Punkte A, B* ist eine Ebene, deren Punkte zu quadratischen Polaren solche Flächen 2. Ordnung haben, für welche A und B konjugiert sind.

Die *gemischte Polarfläche zweier Geraden* r, r' ist das Hyperboloid, auf welchem die reziproken Polaren von r (oder r') bezüglich der quadratischen Polaren der Punkte von r' (oder r) liegen, oder der Ort eines Punktes, für dessen quadratische Polare r und r' reziproke Polaren sind. Sie ist auch (wenn sie kein Kegel ist) die Hüllfläche der gemischten Polarebenen zweier auf r und r' beweglichen Punkte. Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 153; Reye, *Geom. d. Lage III,* S. 116.

Wenn die Geraden r, r' zusammenfallen, so erhalten wir die *reine Polare einer Geraden* r, diese ist ein quadratischer Kegel *(Polarkegel),* dessen Spitze der Pol der durch r hindurchgehenden quadratischen Polaren ist und dessen Seitenlinien die reziproken Polaren von r bezüglich der quadratischen Polaren der Punkte von r bilden; sie ist gleichzeitig die Hüllfläche der Polarebenen aller Punkte von r und demnach der Ort aller Punkte, deren quadratische Polaren r berühren. Vgl. Steiner, *Werke II,* S. 659;

Cremona, *Grundzüge,* S. 153; Sturm, *Synth. Unters.* S. 99; Reye, *Geom. der Lage III*, S. 117.

Wenn der Polarkegel einer Geraden r in eine Gerade r' ausartet, so heißt diese die *Polargerade* von r (Sturm, *Synth. Unters.* S. 111). Die Strahlenkongruenz 7. Ordnung 3. Klasse, welche diese Geraden r bilden, fällt zusammen mit der Kongruenz der Strahlen, welche je zwei konjugierte Pole verbinden, und auch mit der Kongruenz der Strahlen, welche die Paare reziproker Pole auf der Kernfläche verbinden. Die Polargeraden r' der Geraden r bilden selbst eine andere Strahlenkongruenz, welche mit der Kongruenz der Doppeltangenten der Kernfläche zusammenfällt.

Auf einer Geraden r, welche zwei konjugierte Pole verbindet, liegen unendlich viele andere Punktepaare, deren Polarebenen bezüglich F_3 zusammenfallen, und diese Punktepaare bilden eine Involution.

Die drei Geraden r, die in einer Ebene liegen, bilden in ihr die Diagonalen des Polvierseits desjenigen Kegelschnittkomplexes, in welchem die quadratischen Polaren von F_3 die Ebene schneiden.

Unter den Geraden r sind auch die 27 Geraden von F_3 enthalten, deren jede mit ihrer Polargeraden zusammenfällt.

Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 158; Sturm, *Synth. Unters.,* S. 110, 133; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 114, außerdem Voss, *Math. Ann.* **30**, 282 (1887).

Gemischte Polarfläche zweier Ebenen heißt die Fläche 3. Ordnung, auf welcher die Pole der einen Ebene bezüglich der quadratischen Polaren der Punkte der anderen liegen. Sie ist auch der Ort eines Punktes, für dessen quadratische Polare die beiden gegebenen Ebenen konjugiert sind: Cremona, *Grundzüge,* S. 154; Reye, *Geom. der Lage III*, S. 118.

Wenn die beiden Ebenen zusammenfallen, erhält man die *reine Polarfläche einer Ebene*, auf welcher zugleich die Spitzen der Polarkegel aller Geraden der gegebenen Ebene liegen. Sie ist zugleich der Ort aller Punkte, deren quadratische Polaren die gegebene Ebene berühren, und wird von den Polarebenen aller Punkte der gegebenen Ebene und von den Polarkegeln aller Geraden der Ebene umhüllt. Vgl Steiner, *Werke II,* S. 658; Cremona, *Grundzüge,* S. 154; Sturm, *Synth. Unters.,* S. 117; Reye, *Geom. d. Lage III,* S. 121, 130.

Die Fläche hat vier Doppelpunkte; dies sind die Punkte, deren quadratische Polaren (welche die gegebene Ebene berühren) sich auf Kegel reduzieren,

Sie berührt die Kernfläche längs einer Raumkurve 6. Ordnung, auf welcher die reziproken Pole zu den Punkten der Schnittkurve der Kernfläche mit der gegebenen Ebene liegen.

Die zwei Raumkurven 6. Ordnung, die so aus zwei verschiedenen Ebenen entstehen, bilden den Schnitt der Kernfläche mit der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen.

Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 138; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 142; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 119, 122.

Es gibt zehn Punkte P, deren quadratische Polare in zwei Ebenen zerfällt, sie bilden die Doppelpunkte der Kernfläche, und die zehn Schnittlinien p der Ebenen der einzelnen Paare gehören der Kernfläche an.

Die zehn Punkte P und die zehn Geraden p bilden die Ecken und Kanten des Sylvesterschen Pentaeders, d. h. des gemeinsamen Polfünfflachs der quadratischen Polaren aller Punkte des Raumes bezüglich F_3.

Die beiden Ebenen, aus denen die quadratische Polare einer Ecke des Pentaeders besteht, gehen durch die gegenüberliegende Kante und werden von den beiden durch diese Kante gehenden Seitenflächen des Pentaeders harmonisch getrennt: Steiner, *Werke II,* S. 657. Vgl. auch Cremona, *Grundzüge,* S. 168; Sturm, *Synth. Unters.* S. 168; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 132.

Die Polarkegel der Punkte einer Kante des Pentaeders bilden einen Büschel, dessen Basiskurve sich aus vier durch die gegenüberliegende Ecke des Pentaeders gehenden Geraden zusammensetzt. Ebenso bilden die quadratischen Polaren der Punkte einer beliebigen der 15 Diagonalen des Pentaeders einen Büschel, dessen Basiskurve aus vier Geraden besteht; in diesen vier Geraden schneiden sich die Ebenenpaare, welche die quadratischen Polaren der beiden auf der Diagonale liegenden Ecken bilden. Folglich:

Jede Kante und jede Diagonale des Sylvesterschen Pentaeders ist die gemeinschaftliche Polargerade von vier Geraden.

Die 100 Geraden, die wir so erhalten, hatte Steiner (*Werke II,* S. 659) für die einzigen Geraden gehalten, welche Polargeraden besitzen. Vgl. über sie noch Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 193 (1861); Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S 392, außerdem Cremona, *Grundzüge,* S. 166; Sturm, *Synth. Unters.,* S. 167; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 133.

Der Tangentialkegel der Kernfläche in einem ihrer Doppelpunkte P ist der Polarkegel der Gegenkante p von P; er berührt die Kernfläche längs der drei von P ausgehenden Kanten des Penta-

eders und schneidet sie außerdem in einem Kegelschnitt, der in der Polarebene von P bezüglich F_3 liegt, und diese Polarebene berührt die Kernfläche längs p. Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 162; Sturm, *Synth. Unters.,* S. 153, 160; Reye, *Geom. der Lage III,* S. 134; ein weiterer Satz bei Eckardt, *Zschr. Math. Phys.* **19**, 259 (1874).

Eine allgemeine F_3 und ihre Kernfläche schneiden sich in einer Raumkurve R 12. Ordnung, welche die vollständige eigentliche parabolische Kurve beider Flächen bildet: Sturm, *Synth. Unters.,* S. 149; Bauer, *Münch. Abh.* **14**, 79 (1883); Voss, *Math. Ann.* **27**, 389 (1886).

Jede Tangente von R berührt die Kernfläche in einem anderen Punkte (Sturm, *Synth. Unters.,* S. 150).

Weitere Untersuchungen über die Kernfläche haben Hutchinson, *Amer. Math. Soc. Bull.* (2) **5**, 282 (1899), (2) **6**, 328 (1900) und Remy, *C. R.* **142**, 386 (1906) angestellt. Über die Bestimmung einer F_3 mit Hilfe ihrer Kernfläche vgl. Dumont, *Nouv. Ann.* (3) **15**, 312 (1896).

Nach Reye, *Geom. der Lage III,* S. 84, ist der Ort aller Punkte, welche zu einem nicht auf F_3 liegenden Punkte P bezüglich aller Punktepaare von F_3, die mit P in gerader Linie liegen, harmonisch konjugiert sind, eine andere Fläche 3. Ordnung F_3' (die *kubische Polare* von P bezüglich F_3); diese Fläche geht durch die Berührungskurve des aus P der Fläche F_3 umschriebenen Kegels und ist diesem selben Kegel einbeschrieben. Diese kubische Polare hat Montesano, *Napoli Acc. Atti* (3) **5**, 88 (1899), der sie als die *harmonische Fläche* von P bezüglich F_3 bezeichnet, noch weiter untersucht.

§ 5. Fortsetzung. Die Reyeschen Polsechsflache.

Mit Hilfe mechanischer Betrachtungen hat Reye, *J. f. Math.* **78**, 114 (1874) gezeigt, daß *die Gleichung einer allgemeinen F_3 sich auf ∞^4 Arten in die Form bringen läßt*

$$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3 + \cdot + z_6^3 = 0,$$

wo $z_1, z_2, \ldots z_6$ lineare Formen der Koordinaten bezeichnen.

Die Gleichungen $z_1 = 0, \ldots z_6 = 0$ stellen die Seitenflächen eines *Polsechsflachs* oder *Polarhexaeders* von F_3 dar, d. h. eines gemeinsamen Polsechsflachs der ersten Polaren aller Punkte des Raumes bezüglich F_3.

Alle ∞^4 *Polsechsflache von* F_3 *sind der Kernfläche einbeschrieben, und ihre Gegenecken bilden auf dieser Fläche Paare reziproker Pole.*

Ein Polsechsflach ist durch eine Kante g vollständig bestimmt: vier von seinen Ecken sind die Schnittpunkte von g mit der Kernfläche, vier weitere die reziproken Pole dieser Punkte, und die 12 übrigen Ecken bilden die weiteren Schnittpunkte der Kernfläche mit den Geraden, welche die vier zuletzt genannten Punkte paarweise verbinden. Anderseits bilden die quadratischen Polaren der Punkte von g einen Büschel, und von dessen gemeinsamem Poltetraeder gehören die Ecken und Kanten dem gesuchten Polsechsflach an; führt man dann für dessen Kanten das gleiche aus wie vorher für die Gerade g, so erhält man derart das ganze Polsechsflach, ohne die Kernfläche selbst zu benutzen.

Es gibt ∞^1 *Polsechsflache, die eine beliebig gegebene Ebene enthalten; ihre Seitenflächen sind Schmiegungsebenen einer bestimmten kubischen Raumkurve.*

Der einem Polsechsflach einbeschriebenen kubischen Raumkurve sind ∞^2 *Polsechsflache umschrieben, von denen ein beliebiges durch zwei willkürlich herausgegriffene Schmiegungsebenen der Raumkurve eindeutig bestimmt wird.*

Die ∞^2 *den verschiedenen Polsechsflachen einbeschriebenen kubischen Raumkurven sind alle dem Sylvesterschen Pentaeder einbeschrieben.*

Ist eine einem Polsechsflach einbeschriebene Fläche 2. Klasse und eine beliebige der vorstehenden Raumkurven gegeben, so bilden die sechs Tangentialebenen der ersteren, welche gleichzeitig Schmiegungsebenen der letzteren sind, die Seitenflächen eines neuen Polsechsflachs.

Die 12 Seitenflächen zweier Polsechsflache berühren unendlich viele Flächen 2. Klasse, welche eine Schar bilden.

Vgl. auch Reye, *Geom. der Lage III*, S. 124.

An diese Sätze sind nach W. F. Meyer, *Apolarität und rationale Kurven,* Tübingen 1883, S. 339, die Apolaritätsverhältnisse der F_3 anzuschließen. Jede der dem Sylvesterschen Pentaeder einbeschriebenen kubischen Raumkurven ist zu F_3 *apolar.* Vgl. auch Kap. XXX, § 6. Ferner lassen sich hier anreihen Untersuchungen von Waelsch, *Prag. Math. Ges.* 1892, S. 78, *Math. Ver.* **4**, 113 (1897). Vgl. außerdem Reye, *Math. Ann.* **55**, 257 (1902); Coble, *Amer. J.* **32**, 332 (1910).

Der Übergang von der Pentaedergleichung zu einer beliebigen

der ∞^4 Hexaedergleichungen und von diesen zu jener wurde auf algebraischem Wege durch Partialbruchzerlegung erreicht von Beltrami, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **12**, 24 (1879), *Opere III*, p. 151 (Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 406). Vgl. auch Dixon, *London M. S. Proc.* (2) **7**, 389 (1909); Baker, ebenda (2) **9**, 169 (1911).

Cremona, *Math. Ann.* **13**, 301 (1878) (Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 403) ist durch algebraische Betrachtungen zu 36 besonderen Polsechsflachen gelangt, die zu den 36 Doppelsechsen in enger Beziehung stehen, und hat daraus die *Verknüpfung der 27 Geraden mit dem Sylvesterschen Pentaeder* hergeleitet.

Die 15 Geraden, welche von den 27 nach Ausschluß einer Doppelsechs übrigbleiben, liegen zu je dreien in 15 Ebenen, und aus diesen lassen sich zehn Paare konjugierter Steinerscher Trieder bilden: die zehn Paare der Scheitel dieser Trieder bilden jedesmal die Paare von Gegenecken eines Polsechsflachs von F_3.

Sind $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots z_6 = 0$ die Gleichungen der sechs Seitenflächen des Sechsflachs, die so gewählt seien, daß

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_6 = 0,$$

so läßt sich die Gleichung von F_3 auf 10 Arten in die Form bringen

$$(z_i + z_h)(z_h + z_k)(z_k + z_i) + (z_l + z_m)(z_m + z_n)(z_n + z_l) = 0$$

oder

$$z_1^3 + z_2^3 + \cdots + z_6^3 = 0.$$

Jedem der so entstehenden 36 Cremonaschen Polsechsflache läßt sich eine kubische Raumkurve einbeschreiben: alle diese Raumkurven haben fünf Schmiegungsebenen gemein, und dies sind die Seitenflächen des Sylvesterschen Pentaeders.

Zu denselben und anderen Sätzen gelangte Cremona, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **1**, 854 (1877) auf geometrischem Wege, indem er beachtete, daß *für sie nur das Vorhandensein eines Systems von 15 Geraden, die zu je dreien in 15 Ebenen liegen, anzunehmen ist.* Diese 15 Ebenen ordnen sich zu sechs Pentaedern an (*Cremonaschen Pentaedern* nach Reye), deren 60 Ecken als *Kirkmansche Punkte* und deren 60 Kanten als *Pascalsche Gerade* bezeichnet werden; sie ordnen sich außerdem zu 20 paarweise konjugierten Triedern an, deren Scheitel *Steinersche Punkte* heißen, und liegen zu je vieren auf 15 *Steinerschen Geraden.* Die Stei-

nerschen Punkte und Geraden sind die Ecken und Kanten eines Sechsflachs, dessen Seitenflächen die sechs Pentaeder zugeordnet sind. Die 60 Pascalschen Geraden liegen außerdem zu je vieren in 15 *Plückerschen Ebenen,* und diese gehen zu je dreien durch 20 *Cayleysche Geraden,* zu je sechsen durch 15 *Salmonsche Punkte* und einzeln durch die 15 *Steinerschen Geraden.*

Der Grund zu diesen Bezeichnungen liegt in der Beziehung, in die sich durch Projektion die beschriebene Figur zu dem Pascalschen Sechseck (Bd. II[1], S. 236) bringen läßt. Über diese Art, das Pascalsche Sechseck zu behandeln, vgl. auch Cayley, *Quart. J.* **9**, 348 (1868), *Papers VI,* p. 129; außerdem Richmond, *Quart. J.* **23**, 170 (1888), *Cambridge Phil. Trans.* **15**, 267 (1892); die Beziehung der beschriebenen Figur zu sechs linearen dreidimensionalen Räumen im Raum von 4 Dimensionen behandelte Richmond, *Quart. J.* **31**, 125 (1899), **34**, 117 (1903), *Math. Ann.* **53**, 161 (1900).

Dieselbe Figur bietet sich bei der F_3 36 Male dar, indem man von den 15 Geraden ausgeht, welche von den 27 nach Ausschluß einer der 36 Doppelsechse übrigbleiben.

Die Cremonaschen Pentaeder fallen mit den Bertinischen Hauptpentaedern (§ 3) zusammen.

Reye (*Geom. der Lage III,* S. 217) hat bemerkt, daß *die 15 Plückerschen Ebenen, die 20 Cayleyschen Geraden und die 15 Salmonschen Punkte die Konfiguration* $(15_6, 20_3)$ *darstellen, die 15 Paare perspektiver Tetraeder enthält,* und hat in dieser Konfiguration, die schon v. Staudt, *Die Geometrie der Lage,* Nürnberg 1847, Nr. 92, begegnet war, den Kern der ganzen räumlichen Figur erblickt. Vgl. auch de Paolis, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **10**, 123 (1881); Le Paige, *Acta Math.* **5**, 195 (1884), außerdem Funck, *Diss.* Straßburg 1901, *Archiv Math. Phys.* (3) **2**, 78 (1902).

Durch eines der 36 Cremonaschen Sechsflache ist die Figur nicht bestimmt, vielmehr bilden die F_3, die dieses Polsechsflach besitzen, ein ∞^1-faches System vom Index 3. Unter ihnen sind 96 mit Doppelpunkt, aber nur für 56 von diesen ist das Sechsflach ein Polsechsflach im allgemeinen Sinne. Vgl. Caporali, *Napoli Acc. Rend.* **20**, 59 (1881), *Memorie di geometria, Napoli* 1888, p. 135. Dieser hat noch folgenden Satz aufgestellt:

Man betrachte die 15 Punkte X, in denen die Kanten eines Sechsflachs von einer beliebigen Schmiegungsebene der diesem Sechsflach einbeschriebenen kubischen Raumkurve geschnitten werden.

Auf jeder Kante gehört der Punkt X einer Punktgruppe der syzygetischen Involution an, welche durch die vier Eckpunkte bestimmt wird (der Involution $f + \lambda H = 0$ in Bd. I[1], S. 363); *die 45 Punkte, welche diese 15 Punktgruppen vervollständigen, liegen zu je dreien auf 15 Geraden, die einer und derselben F_3 (für welche das gegebene Sechsflach ein Polsechsflach ist) angehören.*

Andere Eigenschaften der einer F_3 konjugierten windschiefen Vielecke, insbesondere der Polfünfecke, gaben Eckardt, *Zschr. Math. Phys.* **20**, 171 (1875); Picquet, *Bull. Soc. math.* **4**, 133 (1876); R. Sturm, *J. f. Math.* **88**, 215 (1880), *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV*, Leipzig 1909, S. 406; Caporali, *Napoli Acc. Rend.* **20**, 122 (1881), *Mem. di geometria*, p. 152; Kohn, *Wien. Sitzber.* **99**, 683 (1890).

Besonders beachtenswert ist das folgende Resultat, auf das Picquet eine Erzeugungsart der Fläche 3. Ordnung (§ 7) gegründet hat:

Die Berührungspunkte der fünf Ebenen, die man durch eine Gerade g von F_3 so legen kann, daß sie anderwärts F_3 berühren, sind die Ecken eines Polfünfecks von F_3 (d. h. bezüglich des Kegelschnittes, den F_3 mit einer beliebigen Ebene durch g gemein hat, sind der Schnittpunkt mit der Verbindungslinie zweier der Punkte und die Schnittlinie mit der Verbindungsebene der drei übrigen Punkte Pol und Polare), und die zehn Diagonalpunkte dieses Fünfecks liegen auf F_3. Die ∞^4 Flächen 2. Ordnung, die sich dem Fünfeck umschreiben lassen, sind allen Kegelschnitten, die F_3 mit den Ebenen durch g gemein hat, harmonisch umschrieben (vgl. Bd. II[1], S. 265 und 280), *d. h. schneiden die Ebene eines beliebigen Γ dieser Kegelschnitte in Kegelschnitten, die Γ harmonisch umschrieben sind.*

Zu diesem und anderen Sätzen gelangt Segre, *Math. Ann.* **24**, 350 (1884), indem er die F_3 (mit einer Ebene zusammen) als Projektion des Schnittes V zweier dreidimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeiten im Raume von 4 Dimensionen aus einem Punkte von V auf den gewöhnlichen Raum auffaßt.

§ 6. Die kubische Quaternärform.

Die ersten Untersuchungen über die invarianten Bildungen einer F_3 verdankt man Salmon, *London Phil. Trans.* **150**, 229 (1860) (Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie II*, S. 418) und Clebsch, *J. f. Math.* **58**, 93, 109 (1860), die gleichzeitig ge-

funden haben, daß *alle Invarianten einer kubischen Quaternärform* U *sich mit Hilfe von fünf Fundamentalinvarianten, die der Reihe nach die Grade* 8, 16, 24, 32, 40 *haben, ausdrücken lassen.*

Wenn man die Gleichung von F_3 in der kanonischen Form (§ 4)

$$a_1 y_1^3 + a_2 y_2^3 + a_3 y_3^3 + a_4 y_4^3 + a_5 y_5^3 = 0,$$

wobei

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0,$$

voraussetzt und mit Salmon durch p, q, r, s, t der Reihe nach die Summe der a_i, die Summe ihrer Produkte zu zweien, zu dreien, zu vieren und das Produkt von ihnen allen bezeichnet, so *läßt jede Invariante von* U *sich als Funktion dieser fünf Größen darstellen.* Insbesondere werden die Ausdrücke für die fünf Fundamentalinvarianten der Reihe nach die folgenden:

$$\cdot 4rt, \quad B = t^3 p, \quad C = t^4 s, \quad D \qquad\qquad E = t^8$$

Mit Hilfe von A, B, C, D ergibt sich die Diskriminante von U in der Form (Salmon):

$$(A^2 - 64B)^2 - 2^{14}(D + 2AC).$$

Indessen lassen sich nicht alle Invarianten von U *rational* durch die fünf Fundamentalinvarianten ausdrücken, wie es Clebsch behauptet hat, der die *schiefen Invarianten* übersah, von denen sich nur die Quadrate rational durch die Fundamentalinvarianten ausdrücken lassen. Salmon hat als rationale Funktion der Fundamentalinvarianten das Quadrat der einfachsten schiefen Invariante berechnet, dies ist eine Invariante vom Grade 100, die er mit F bezeichnet, und man gelangt zu ihr, indem man die Diskriminante der Gleichung, welche zu Wurzeln a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 hat, als Funktion ihrer Koeffizienten ausdrückt.

Die Form U besitzt nach Salmon *vier lineare Kovarianten von den Graden* 11, 19, 27, 43, deren Ausdrücke für die kanonische Gleichungsform der F_3 lauten:

$$L = t^2 \sum a_i y_i, \quad L' = t^3 \sum a_2 a_3 a_4 a_5 y_1,$$
$$L'' = t^5 \sum a_i^2 y_i, \quad L''' = t^8 \sum a_i^3 y_i.$$

Die Bedingung dafür, daß die vier Ebenen, deren Gleichungen man findet, indem man diese vier Kovarianten gleich Null setzt, durch einen Punkt gehen, wird durch das Verschwinden der Invariante F *gegeben.*

Die vier linearen Kovarianten dienen zu einer *typischen Darstellung* der sämtlichen Kovarianten, da diese, die Grundform U einbegriffen, sich im allgemeinen als Funktionen von jenen mit invarianten Koeffizienten darstellen lassen.

Von den übrigen Kovarianten, die Salmon angibt, nennen wir die folgenden: die Hessesche Kovariante 4. Ordnung 4. Grades

$$H = \sum a_2 a_3 a_4 a_5 y_2 y_3 y_4 y_5,$$

die Kovariante 5. Ordnung 7. Grades

$$\Phi = t \sum a_1 a_2 y_1^2 y_2^2 y_3,$$

die Kovariante 5. Ordnung 15. Grades

$$t^3 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5,$$

die, gleich Null gesetzt, die fünf Seitenflächen des Sylvesterschen Pentaeders darstellt; endlich die Kovariante 9. Ordnung 11. Grades

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & H_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & H_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & H_3 \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & H_4 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & 0 \end{vmatrix}$$

(wo die Indizes 1, 2, 3, 4 die Derivierten nach x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen). Diese liefert, gleich Null gesetzt, den Ort der Punkte, deren Polarebene bezüglich der Kernfläche und deren quadratische Polare bezüglich der Grundfläche F_3 sich berühren.

Mit Hilfe von H, Φ und Θ erhält man die Gleichung

$$\Theta - 4 H \Phi^2 = 0$$

einer kovarianten Fläche S 9. Ordnung, deren Schnitt mit F_3 sich aus den 27 Geraden dieser Fläche zusammensetzt (vgl. § 2 und § 9).

Salmon hat auch für die kanonische Form die beiden Kontravarianten σ und τ berechnet, deren erste von der 4. Ordnung und dem 4. Grade, deren zweite von der 6. Ordnung und dem 6. Grade ist und durch welche die Tangentialgleichung von F_3 auf die Form gebracht wird

$$64 \sigma^3 - \tau^2 = 0.$$

Die Gleichungen $\sigma = 0$, $\tau = 0$ stellen zwei Flächen 4. und 6. Klasse dar, die von den F_3 in äquianharmonischen und in harmonischen Kurven 3. Ordnung (Bd. II[1], S. 353, 375) schneidenden Ebenen umhüllt werden. Diese Flächen sind beide der von den stationären Tangentialebenen von F_3 gebildeten abwickelbaren Fläche einbeschrieben; unter den in äquianharmonischen Kurven schneidenden Ebenen sind zehn, welche aus den Ecken des Sylvesterschen Pentaeders dessen gegenüberliegende Kanten projizieren (Cremona, *Grundzüge,* S. 171).

Die symbolischen Ausdrücke für die Fundamentalinvarianten sind sehr kompliziert. Clebsch hat a. a. O. gezeigt, daß sie einfacher werden, wenn man sie als Funktionen der Koeffizienten von H ausdrückt.

Die Tangentialgleichung von F_3 hat in symbolischer Form Clebsch, *J. f. Math.* **59**, 57 (1861) gegeben. Zahlreiche andere Ausdrücke hat Gordan, *Math. Ann.* **5**, 341 (1872) hinzugefügt.

Die geometrische Bedeutung vieler invarianten Bildungen, insbesondere der Fundamentalinvarianten, hat de Paolis, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **10**, 123 (1881) gezeigt, indem er das *polare Fünfeck* (oder *assoziierte Fünfeck*, nach Kohn, *Wien. Sitzber.* **93**, 314 (1886)) des Sylvesterschen Pentaeders betrachtete, das u. a. zu einem Tetraeder und einem tetraedralen Komplex führt, die zu F_3 kovariant sind.

Bobek, *Wien. Sitzber.* **103**, 887 (1894), *Monatsh. f. Math.* **8**, 145 (1897) hat die Invarianten von F_3 als Doppelverhältnisse behandelt, welche die dreifach berührenden Ebenen, die durch eine Gerade gehen, und die Tangentialebenen in den parabolischen Punkten der Geraden selbst bilden, oder auch die Berührungspunkte dieser Ebenen auf der Geraden selbst.

Nach Hilbert, *Math. Ann.* **42**, 367 (1893) *verschwinden sämtliche Invarianten einer F_3 dann und nur dann, wenn die F_3 entweder einen uniplanaren Doppelpunkt besitzt oder einen biplanaren Doppelpunkt von der Art, daß der Schnitt der zwei Ebenen, welche den zugehörigen Tangentialkegel bilden, ganz auf der Fläche liegt.*

§ 7. Erzeugung der Fläche dritter Ordnung.

Aus der allgemeinen linearen Erzeugung einer Fläche von beliebiger Ordnung, welche Graßmann aus seiner *„stereometrischen Multiplikation"* gewonnen hat (vgl. Kap. XXX, § 9), folgen für eine F_3 verschiedene Erzeugungsarten, von den die bemerkens-

werteste die ist, welche man gewöhnlich schlechthin als die *Graßmannsche Erzeugungsart* bezeichnet (*J. f. Math.* **49**, 62 (1855, datiert Juli 1852), *Werke II*[1], S. 195): *entsprechende Ebenen dreier kollinearen Ebenenbündel schneiden sich in den Punkten einer* F_3.

Diese Erzeugung wurde von Schroeter, *J. f. Math.* **62**, 265 (1863) weiter untersucht, der auf ihrer Grundlage die 27 Geraden der Fläche ableitete, indem er zeigte, daß sechsmal die drei einander entsprechenden Ebenen durch dieselbe Gerade gehen und die so gewonnenen sechs Geraden eine halbe Doppelsechs bilden. Vgl. Cremona, *Grundzüge*, S. 175; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 20; *J. f. Math.* **88**, 214 (1880), *Die Lehre von den geom. Verwandtschaften II*, Leipzig 1908, S. 183; Reye, *Geom. d. Lage III*, S. 74, 85.

Daß umgekehrt die *allgemeine* F_3 sich so erzeugen läßt, hat Cremona, *Grundzüge*, S. 182, bewiesen, aber mit einer Lücke im Beweis, die Sturm, *Archiv Math. Phys.* (3) **8**, 200 (1905) ausgefüllt hat. Einen strengen Beweis gaben Segre, ebenda **10**, 209 (1906) und Sturm, ebenda **10**, 216 (1906).

Wie Segre bemerkt, war der Beweis, der sich aus der Cayley-Salmonschen Gleichungsform (§ 3)

(1) $$y_1 y_2 y_3 + z_1 z_2 z_3 = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ z_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix}$$

ergibt, indem man von ihr zu einer dreireihigen Determinante, deren Elemente allgemeine lineare Formen der Punktkoordinaten sind, übergeht, Schläfli schon vom Jahre 1854 an bekannt: vgl. Schläfli, *Quart. J.* **2**, 114 (1858) und *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli*, herausg. von J. H. Graf, *Mitteil. der naturforsch. Gesellsch. Bern* 1896, S. 136, 137, 152.

Segre hat a. a. O. auch gezeigt, daß *alle besonderen* F_3 *mit Ausnahme einer einzigen* (der XX. Art in der Schläflischen Klassifikation, s. § 13) *sich auf die angegebene Art erzeugen lassen.*

Als besonderen Fall dieser Erzeugungsart erhält man die von Salmon, *Nouv. Ann.* (2) **2**, 24 (1863): wenn die vier Seitenflächen eines Tetraeders sich um vier feste Punkte drehen und gleichzeitig die drei Kanten, die einer Seitenfläche des Tetraeders an-

gehören, in drei festen Ebenen bleiben, so beschreibt die dieser Seitenfläche gegenüberliegende Ecke eine F_3. Vgl. auch Sturm, *Synth. Unters.*, S. 351; Schroeter, *J. f. Math.* **96**, 284 (1884), welche bemerkt haben, daß die so entstehende F_3 einen Doppelpunkt in dem Schnittpunkte der drei festen Ebenen besitzt.

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen derartigen Erzeugungen derselben F_3 haben untersucht F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 1 (1881); Reye, *Geom. d. Lage III,* S. 213; Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. II,* 1908, S. 190, 228, *III,* 1909, S. 544, und als Sonderfall einer allgemeineren Betrachtung (vgl. Kap. XXXI, § 1) Reye, *J. f. Math.* **104**, 211 (1889), **106**, 30, 315 (1890), **107**, 162 (1891), **108**, 89 (1891).

Drei andere Erzeugungen einer F_3 hat Graßmann, a. a. O., S. 64, *Werke II*^{1}, S. 197, angedeutet; diese erhält man, indem man eine projektive (d. h. durch Projizieren und Schneiden entstehende) Beziehung festlegt auch zwischen Gebilde verschiedener Stufe. Segre hat a. a. O. auf die Graßmannschen Erzeugungsarten die schon von Schläfli (s. den zitierten *Briefwechsel,* S. 152) gemachte Bemerkung angewendet, daß derartige Korrespondenzen wie die plurilinearen Korrespondenzen als ausgeartete, zwischen Gebilden derselben Stufe entstehende Projektivitäten angesehen werden können. Für solche Erzeugungen vgl. auch Sturm, *Archiv Math. Phys.* (3) **10**, 216 (1906).

Nimmt man drei Ebenenbüschel, so ergibt sich eine dieser von Graßmann herrührenden Erzeugungen in folgender Form (Sturm, *Math. Ann.* **14**, 19 (1879)): sind die drei Ebenenbüschel a, b, c der Reihe nach projektiv zu drei anderen Büscheln a', b', c' und ist eine Ebene π gegeben, so gehen durch einen veränderlichen Punkt von π drei Ebenen der Büschel $a, b, c,$ und es liegt der Schnittpunkt der drei entsprechenden Ebenen der Büschel a', b', c' auf einer allgemeinen F_3. Vgl. Sturm, *Synth. Unters.,* S. 44.

Diese Erzeugung kommt darauf hinaus, daß man zwischen den drei Ebenenbüscheln, deren Ebenen sich in den Punkten der F_3 schneiden, eine *trilineare Beziehung* annimmt. Aus der Gleichung (1) folgt diese Beziehung, indem man für die Gleichungen der drei Büschel nimmt

$$y_1 + \lambda z_1 = 0, \quad y_2 + \mu z_2 = 0, \quad y_3 + \nu z_3 = 0,$$

sofort in der Form

$$\lambda \mu \nu = 1,$$

auf welche sie sich immer zurückführen läßt. Vgl. August, *Diss.* Berlin 1862.

Eine andere Erzeugungsart der F_3 durch drei Ebenenbüschel, die in trilinearer Beziehung stehen, hat Fr. Deruyts, *Liège Mém.* (2) **14** (1888) angegeben: es sind drei Ebenen, drei Geraden und ein Punkt gegeben; eine Gerade durch den Punkt schneidet die drei Ebenen in drei Punkten, die aus den drei Geraden projiziert drei Ebenen liefern; der Schnittpunkt dieser drei Ebenen liegt dann auf einer F_3.

Vgl. noch Erzeugungen bei Fr. Deruyts, *Liège Mém.* (2) **17**, 166 (1890); Versluys, ebenda (2) **20** (1898), n⁰ 6.

Die allgemeine Erzeugung von F_3 durch drei in trilinearer Beziehung stehende Ebenenbüschel haben, auch mit Anwendung auf besondere Fälle, Schubert, *Math. Ann.* **17**, 457 (1880) und London, *Math. Ann.* **44**, 405 (1894) untersucht. Vgl. auch Sturm, *D. Lehre v. d. geom. Verw. I*, 1908, S. 324.

Die beiden übrigen Erzeugungsarten von Graßmann sind folgende:

Sind zwei Paare von windschiefen Geraden a_1, a_2 und a_1', a_2', außerdem ein Punkt P gegeben und sind X_1, X_2 und X_1', X_2' die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer um P sich drehenden Ebene, so wird der Ort der Schnittpunkte der Geraden X_1X_2 und $X_1'X_2'$ eine allgemeine F_3.

Sind zwei Punkte A_1, A_2, zwei Ebenen α_1, α_2, zwei Gerade r, s und ein weiterer Punkt P gegeben und sind x_1, x_2 die Schnittlinien von α_1, α_2 mit einer um P sich drehenden Ebene, R der Schnittpunkt derselben Ebene mit r, so liegt der Schnittpunkt der drei Ebenen A_1x_1, A_2x_2, Rs auf einer allgemeinen F_3.

Die vier Graßmannschen Erzeugungsarten und noch zwei andere hat Schroeter, *J. f. Math.* **96**, 282 (1884) eingehend untersucht.

Von den Graßmannschen Erzeugungsarten sind Abänderungen oder besondere Fälle die vier von Steiner, *Werke II*, S. 651 angegebenen Erzeugungen.

Die *erste Steinersche Erzeugung* besteht darin, daß von zwei konjugierten Triedern der Fläche ausgegangen wird und in den Ebenen durch einen festen Punkt P die Kurven 3. Ordnung konstruiert werden, die jedesmal durch P und die Schnittpunkte der Ebene mit den neun Schnittlinien der Flächen der beiden Trieder hindurchgehen; diese Kurven liegen dann auf der zu erzeugenden F_3. Vgl. Cremona, *Grundzüge*, S. 173; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 1; Reye, *Geom. d. Lage III*, S. 95.

Bei der *zweiten Steinerschen Erzeugung* wird die F_3 gewonnen als *der Ort der Kegelschnitte, in denen die Ebenen eines Ebenenbüschels von den entsprechenden Flächen eines zu dem Ebenenbüschel projektiven Büschels von Flächen 2. Ordnung getroffen werden.* Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 174; Sturm, *Synth. Unters.* S. 9; *J. f. Math.* **88**, 214 (1880); de Jonquières, *C. R.* **105**, 1203 (1887), **106**, 526, 907 (1888), **107**, 209 (1888).

Von dieser Erzeugung ist die *dritte Steinersche Erzeugung* nur ein besonderer Fall; hierbei erscheint die F_3 als der Ort aller Kegelschnitte, in denen die aus einem Punkte P an die Flächen eines Büschels von Flächen 2. Ordnung gelegten Tangentialkegel diese Flächen berühren. Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 175; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 16; Picquet, *Bull. Soc. math.* **4**, 133 (1876); Küpper, *Prag. böhm. Gesellsch. Abh.* (7) **2**, Nr. 3, 10 (1887—88), *Zschr. Math. Phys.* **34**, 129 (1889); Fr. Deruyts, *Liège Mém.* (2) **14**, 1888; Milne, *Quart. J.* **43**, 207 (1912). Nach Terracini, *Giorn. di Mat.* (3) **2**, 40 (1911) lassen sich alle F_3 auf diese Weise erzeugen mit Ausnahme der Arten XI, XX, XXI der Schläflischen Klassifikation (§ 13) und der Cayleyschen Regelfläche (§ 16).

Bei der *vierten Steinerschen Erzeugung* wird die F_3 als Ort der Pole einer Ebene bezüglich der Flächen 2. Ordnung eines Bündels gewonnen. Vgl. Sturm, *Synth. Unters.* S. 28; Reye, *Geom. d. Lage III*, S. 137. Diese Erzeugungsart findet sich schon bei Hesse, *J. f. Math.* **49**, 279 (1853), *Werke,* S. 345.

Über die Steinerschen Erzeugungen vgl. noch Geiser, *J. f. Math.* **69**, 197 (1868).

Eine weitere Erzeugung, die ebenfalls nach einer Mitteilung von Schläfli an Affolter von Steiner herrührt, besteht darin, daß *durch die Schnittpunkte der Seiten eines räumlichen Fünfseits mit den Ebenen eines Ebenenbüschels die Kegelschnitte gelegt werden; diese Kegelschnitte liegen auf einer F_3.* Vgl. Affolter, *Archiv Math. Phys.* **56**, 113 (1874) und Sturm, *Math. Ann.* **23**, 299 (1884).

Nach Kohn, *Wien. Sitzungsber.* **99**, 683 (1890) *ist der Ort aller Punkte, in denen die einem vollständigen räumlichen Fünfeck umschriebenen kubischen Raumkurven von Strahlen eines linearen Strahlenkomplexes berührt werden, eine allgemeine F_3, die durch die fünf Ecken und die zehn Diagonalpunkte des Fünfecks geht.*

Daraus erhält man die von Picquet,. *Bull. Soc. math.* **4**, 133 (1876) angegebene Erzeugung, indem man annimmt, daß der lineare Strahlenkomplex aus den eine feste Gerade treffenden

Strahlen besteht. *Ist ein vollständiges räumliches Fünfeck und ein Ebenenbüschel gegeben, so liegt in jeder Ebene des Büschels ein Kegelschnitt, der als ausgeartete Fläche 2. Klasse das Fünfeck zum Polfünfeck hat, so daß bezüglich des Kegelschnittes die Spuren der zehn Seiten die Pole von den Spuren der zehn gegenüberliegenden Seitenflächen des Fünfecks sind (auf dem Kegelschnitt liegen gleichzeitig die Berührungspunkte der Ebene mit kubischen Raumkurven, die dem Fünfeck umschrieben sind; der Ort aller dieser Kegelschnitte ist eine F_3, welche die Achse des Ebenenbüschels enthält und in jeder Ecke des Fünfecks die durch diese Ecke gehende Ebene des Ebenenbüschels berührt.*

Der Komplex der Kegelschnitte, welchen man auf solche Art für alle Ebenen des Raumes erhält, wurde von Humbert, *J. éc. polyt.* Cah. **64**, 123 (1894) untersucht.

Eine Erzeugung der allgemeinen F_3, sowie derer mit 1 bis 4 Doppelpunkten und der kubischen Regelflächen hat Majcen, *Math. Ver.* **14**, 438 (1905), *Agram Akad.* **161**, 62 (1905) aus der eindeutigen Abbildung einer linearen Strahlenkongruenz auf eine Fläche 2. Ordnung abgeleitet (vgl. über diese Abbildung Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie I,* Leipzig, 1892, S. 131). Die F_3 entsteht dabei als Ort der Schnittpunkte der Kongruenzstrahlen mit den Tangentialebenen in den entsprechenden Punkten der Fläche 2. Ordnung. Majcen, *Wien. Sitzungsber.* **117**, 631 (1908), *Agram Akad.* **175**, 87 (1909), **188**, 1 (1911) hat auch die hieraus folgende Abbildung der F_3 auf einer Fläche 2. Ordnung untersucht.

Eine Erweiterung der zweiten Steinerschen Erzeugung hat Sturm, *Synth. Unters.* S. 341, angegeben, indem er von zwei Büscheln von Flächen 2. Ordnung ausging, deren Grundkurven in je zwei Kegelschnitte K, K_1 und K', K_1' zerfallen, wobei K und K' derselben Ebene π angehören. Wenn die beiden Büschel so projektiv aufeinander bezogen werden, daß dem Ebenenpaar, das die Kegelschnitte K und K_1 enthält, das Ebenenpaar entspricht, in dem K' und K_1' liegen, dann erfüllen die Schnittkurven entsprechender Flächen (außer der Ebene π) eine F_3.

Sturm, *Synth. Unters.* S. 346 und Reye, *Math. Ann.* **1**, 464 (1869) haben die F_3 auch als Ort der Punkte gewonnen, in denen die Strahlen eines Strahlenbündels von den Flächen eines dazu reziproken Bündels von Flächen 2. Ordnung getroffen werden. Vgl. N. Neumann, *Diss.* Breslau 1909.

Diese Erzeugung wurde weiter untersucht von v. Escher-

ich, *Wien. Sitzungsber.* **75**, 523 (1877), **85**, 526, 893 (1882), **90**, 1036 (1885), und F. Schur, *Math. Ann.* **23**, 437 (1884), die sie zur linearen Konstruktion der durch 19 Punkte gegebenen F_3 verwendet haben.

Man kann die F_3 auch gewinnen als *Ort der Punkte, in denen sich zwei Strahlen aus zwei Strahlenbündeln und eine Ebene eines Ebenenbündels schneiden, wenn die drei Bündel in trilinearer Beziehung stehen.* Von dieser Erzeugung ausgehend hat Pannelli, *Ann. di Mat.* (2) **22**, 237 (1894) eine Konstruktion der durch 19 Punkte festgelegten F_3 gegeben.

Diese und andere Konstruktionen hat Le Paige, *C. R.* **97**, 34, 158 (1883), *Amsterdam Versl.* (2) **19**, 328 (1883), *Acta Math.* **3**, 181 (1883) auf die trilineare Korrespondenz zwischen drei Grundgebilden 1. Stufe gegründet. Ferner hat er *C. R.* **98**, 971 (1884), *Acta Math.* **5**, 195 (1884) die F_3 gewonnen als Ort der Punkte, in denen sich jedesmal vier Ebenen begegnen, die aus vier festen Geraden einer Ebene die Schnittpunkte einer veränderlichen Ebene mit vier festen, paarweise windschiefen und nicht auf einer quadratischen Regelfläche enthaltenen Geraden projizieren. Vgl. noch Le Paige, *Belg. Bull.* (3) **8**, 238, 555 (1884); F. Schur, *Leipzig. Ber.* **36**, 128 (1884).

Als Ort der einen Ecke eines beweglichen Dreiecks, von dem die dieser Ecke gegenüberliegende Seite einen gegebenen Strahlenbüschel durchläuft, während die anderen beiden je zwei gegebene Geraden treffen, hat Fr. Deruyts, *Belgique Bull.* (3) **22**, 35 (1891) die F_3 gefunden. Vgl. noch *Liège Mém.* (2) **17**, 32 (1890).

Verschiedene konstruktive Probleme hat Petot, *C. R.* **102**, 737, 805 (1886), *Ann. éc. norm.* (3) **5**, *Supplément* (1888) gelöst, indem er von der Beziehung ausging, die zwischen drei windschiefen Geraden der F_3 und acht Punkten auf ihr besteht.

Eine Aufzählung von 13 Erzeugungsarten, unter denen sich viele der obengenannten finden, hat Sturm, *Math. Ann.* **23**, 308 (1884) gegeben.

§ 8. Ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung.

Die Abbildung einer F_3 auf eine Ebene haben gleichzeitig Clebsch, *J. f. Math.* **65**, 359 (1866) und Cremona, *Grundzüge,* S. 175, 185 gewonnen, indem sie von der Graßmannschen Erzeugung durch drei kollineare Ebenenbündel ausgingen. Vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 524; Reye, *Geom. d. Lage*

III, S. 74; Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV,* Leipzig 1909, S. 98, 272.

Clebsch leitet aus den Gleichungen der drei Bündel die Darstellung für die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes von F_3 her:

$$(1) \qquad \varrho x_i = f_i(y_1\, y_2, y_3),$$

wobei ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist und f_1, f_2, f_3, f_4 kubische Formen von y_1, y_2, y_3, die sechs Nullstellen gemein haben, bedeuten. Betrachtet man nun y_1, y_2, y_3 als homogene Koordinaten eines veränderlichen Punktes in einer Ebene π, so stellt die Gleichung

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ veränderliche Parameter bedeuten, in π ein lineares System von ∞^3 Kurven 3. Ordnung mit sechs Fundamentalpunkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 dar. Jeder andere Punkt P von π bestimmt in diesem Kurvenkomplex ein Netz von Kurven 3. Ordnung, dem ein Punkt von F_3 als Mittelpunkt eines bestimmten Ebenenbündels zugeordnet ist, und umgekehrt, so daß zwischen den Punkten von F_3 und den Punkten von π eine wechselweise eindeutige algebraische Beziehung besteht, in welcher die Kurven 3. Ordnung des Komplexes die Bilder der ebenen Schnittkurven von F_3 sind.

Nur die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden eine Ausnahme, indem für sie die Formeln (1) unbestimmt werden. Wenn man indessen die Punkte von π ins Auge faßt, die einem der Fundamentalpunkte in allen möglichen Richtungen unendlich benachbart sind, so findet man, daß die entsprechenden Punkte von F_3 alle auf einer Geraden liegen. Die sechs so den Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 zugeordneten Geraden bilden eine halbe Doppelsechs $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$. Die übrigen Geraden $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ der Doppelsechs haben zu Bildern die durch je 5 Fundamentalpunkte hindurchgehenden Kegelschnitte, und zwar b_i den Kegelschnitt, der durch die von i verschiedenen Fundamentalpunkte geht. Die 15 weiteren Geraden von F_3 haben zu Bildern die 15 Geraden, welche die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 paarweise verbinden: c_{ik} hat zum Bild die Gerade ik.

Cremona gelangt zu der Abbildung einer F_3 auf eine Ebene, indem er die Beziehung zwischen F_3 und der Ebene als Teil der birationalen kubischen Transformation auffaßt, die zwischen zwei Räumen entsteht, wenn man jedem Punkte des einen Raumes den Schnittpunkt der ihm in drei Korrelationen entsprechenden Ebenen zuordnet. Diese Transformation läßt sich analytisch durch drei in

den Punktkoordinaten bilineare Gleichungen darstellen und war schon von Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der anal. Geom. des Raumes,* Berlin 1837, § 84, und in dem besonderen Fall, wo die Gleichungen symmetrisch sind (also die drei Korrelationen zu drei Polaritäten werden), von Magnus, a. a. O., § 75, 76, 83; Hesse, *J. f. Math.* **49**, 279 (1855), *Werke,* S. 345 u. a. untersucht worden. Vgl. z. B. Reye, *Geom. d. Lage III,* S. 140; Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. III,* Leipzig 1909, S. 479, *IV,* 1909, S. 391; Doehlemann, *Geom. Transformationen II,* Leipzig, 1908, S. 286.

Jeder Ebene des ersten Raumes entspricht dabei eine F_3, die durch drei kollineare Bündel erzeugt wird, und alle diese ∞^3 Flächen gehen durch dieselbe Raumkurve R_6 6. Ordnung vom Geschlecht $p = 3$ (vgl. Kap. XXXVII, § 7), von der jeder Punkt allen Punkten einer Geraden entspricht. Die einer gegebenen Ebene π entsprechende F_3 ist auf diese Ebene eindeutig abgebildet, wobei die Fundamentalpunkte der Abbildung durch die 6 Schnittpunkte mit R_6, denen auf F_3 die Geraden einer halben Doppelsechs entsprechen, gegeben werden.

Die ebene Abbildung läßt sich demnach auf 72 verschiedene Arten erhalten, entsprechend den 72 Sextupeln. Zwei Abbildungen heißen konjugiert, wenn die zugehörigen Sextupel sich zu einer Doppelsechs ergänzen.

Die *Wurfrelationen,* welche zwischen den 36 Doppelsechsen einer F_3 bestehen, hat Kohn, *Wien. Sitzungsber.* **114**, 1431 (1905) untersucht (über den Wurfbegriff vgl. Kohn, *Math. Ann.* **46**, 285 (1895)) und sie auf die Beziehungen zwischen den 72 ebenen Abbildungen der F_3 angewendet.

Eine direkte geometrische Konstruktion für die ebene Abbildung einer F_3 auf eine Ebene π kann man durch Steiners *schiefe Projektion (Systematische Entwicklung* usw. Berlin 1839, Nr. 59, *Werke I,* S. 409) erhalten, indem man zwei windschiefe Geraden r, s von F_3 festlegt und zwei Punkte von F_3 und π einander entsprechen läßt, wenn sie auf einer r und s treffenden Geraden liegen. Die ebenen Schnittkurven von F_3 haben dann zu Bildern ein System von Kurven 4. Ordnung mit 7 Grundpunkten, darunter 2 doppelten und 5 einfachen. Von dieser Abbildung kann man zu der früheren zurückkehren durch eine quadratische Transformation von π. Vgl. z. B. Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV,* Leipzig 1909, S. 286.

Aber die ursprüngliche Abbildung läßt sich, wie Clebsch,

Math. Ann. **5**, 419 (1872) gezeigt hat, direkt finden, indem man für π eine Ebene nimmt, welche durch eine der r und s gleichzeitig treffenden 5 Geraden von F_3 hindurchgeht. Die Grundpunkte in π sind dann die Spuren von r, s und der vier anderen Geraden von F_3, die r und s treffen.

§ 9. Kurven auf einer Fläche dritter Ordnung.

Die ebene Abbildung einer F_3 (§ 8) liefert das einfachste Mittel, die Kurven auf F_3 und ihre gegenseitigen Beziehungen zu untersuchen.

Die Kurve von der Ordnung 3μ, welche den Schnitt von F_3 mit einer Fläche von der Ordnung μ bildet, hat zum Bilde eine Kurve von der Ordnung 3μ, welche in jedem der Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 (wenigstens) die Multiplizität μ besitzt, und umgekehrt.

Indem wir diesen Satz auf die Kurve 27. Ordnung anwenden, die von den 15 Verbindungslinien der Fundamentalpunkte und den 6 Kegelschnitten, die durch je 5 Fundamentalpunkte hindurchgehen, gebildet wird, ergibt sich die bereits (§ 2 und § 6) hervorgehobene Tatsache, daß *die 27 Geraden von F_3 den Schnitt von F_3 mit einer Fläche 9. Ordnung (und damit mit unendlich vielen) bilden.*

Wenn eine Kurve R_n von der Ordnung n, die auf F_3 liegt, keine mehrfachen Punkte enthält und das Geschlecht p hat, so wird ihr Bild eine Kurve R_ν' von einer gewissen Ordnung ν, die in 1, 2, 3, 4, 5, 6 gewisse Multiplizitäten $s_1, s_2, \ldots s_6$ hat und keine anderen mehrfachen Punkte besitzt, ferner dasselbe Geschlecht p hat, so daß

$$\sum_{i=1}^{6} s_i = 3\nu - n, \quad \sum_{i=1}^{6} s_i^2 = \nu^2 - n - 2p + 2.$$

Diese R_ν' bilden ein *reguläres* lineares System (vgl. Bd. II[1], S. 335) von der Dimension $n + p - 1$, so daß *die Kurven von der Ordnung n und dem Geschlecht p ohne mehrfache Punkte, die auf F_3 liegen, eine gewisse endliche Anzahl von linearen Systemen der Dimension $n + p - 1$ bilden,* deren Bestimmung mit Hilfe der vorstehenden Formeln ausgeführt werden kann.

Der größte Wert von p, der einem gegebenen Wert von n entspricht, wird durch die größte in $\frac{n(n-3)}{6} + 1$ enthaltene ganze Zahl gegeben. Diese R_n von höchstem Geschlechte ergeben sich

als der vollständige Schnitt von F_3 mit einer F_μ, wenn $n = 3\mu$ ist, und als der Restschnitt von F_3 mit einer F_μ, die durch eine Gerade oder einen Kegelschnitt von F_3 hindurchgeht, wenn $n = 3\mu - 1$ oder $n = 3\mu - 2$ ist. In dem ersten dieser drei Fälle wird

$$p = \frac{n(n-3)}{6} + 1,$$

in den anderen beiden

$$p \qquad \underline{(n-1)(n-2)}$$

Auf der allgemeinen F_3 liegen Kurven von jeder gegebenen Ordnung n und jedem Geschlechte p, das nicht größer als die angegebene Höchstzahl ist, mit Ausnahme gewisser besonderer Werte, z. B. fehlen unter den Kurven 10. Ordnung die vom Geschlecht $p = 1$.

Wir wollen insbesondere die Kegelschnitte und kubischen Raumkurven auf F_3 angeben.

Es gibt 27 Systeme von ∞^1 Kegelschnitten, die in den Ebenen durch die 27 Geraden liegen. Die Kegelschnitte, die in den Ebenen durch eine Gerade a_i liegen, werden abgebildet durch Kurven 3. Ordnung, die durch 1, 2, 3, 4, 5, 6 gehen und in i einen Doppelpunkt haben; die Kegelschnitte, die in den Ebenen durch eine Gerade b_i liegen, haben zu Bildern die Strahlen des Büschels mit dem Mittelpunkt i; die Kegelschnitte, die in den Ebenen durch eine Gerade c_{ik} liegen, haben zu Bildern Kegelschnitte, die durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit Ausschluß von i und k gehen.

Auf F_3 sind 72 Systeme von ∞^2 kubischen Raumkurven enthalten, die paarweise konjugiert sind, nämlich derart, daß zwei kubische Raumkurven aus konjugierten Systemen den vollen Schnitt von F_3 mit einer Fläche 2. Ordnung bilden. Ein Paar konjugierter Systeme wird durch die Geraden der Bildebene und die Kurven 5. Ordnung, die durch die Fundamentalpunkte doppelt hindurchgehen, gegeben, weitere 20 Paare durch die Kegelschnitte, die durch drei Fundamentalpunkte, und die Kurven 4. Ordnung, die durch diese Punkte einfach und die übrigen drei doppelt hindurchgehen, und die letzten 15 Paare durch die Kurven 3. Ordnung, die durch vier Fundamentalpunkte gehen und in dem einen oder anderen der übrigen beiden Punkte einen Doppelpunkt haben.

Jedes der 36 Paare konjugierter Systeme ist einer Doppelsechs zugeordnet derart, daß die Kurven der beiden Systeme jede der durch die Doppelsechs ausgeschlossenen Geraden in einem Punkte treffen, während die Kurven des einen Systems die Geraden des

einen Sextupels der Doppelsechs in zwei Punkten und die des anderen Sextupels nicht treffen, dagegen die Kurven des konjugierten Systems die Geraden des zweiten Sextupels in zwei Punkten und die des ersten nicht treffen.

Zwei kubische Raumkurven desselben Systems haben einen Punkt gemein, zwei Kurven aus konjugierten Systemen haben fünf Punkte gemein, zwei Kurven aus verschiedenen, aber nicht konjugierten Systemen dagegen vier, drei oder zwei Punkte. Einige Eigenschaften der Systeme, deren Kurven zwei Punkte gemein haben, hat Castelnuovo, *Ist. Ven. Atti* (6) **5**, 1106 (1887) angegeben.

Das allgemeine Problem, alle Familien von Kurven bestimmter Ordnung und bestimmten Geschlechtes, die auf F_3 liegen, zu bestimmen, haben Sturm, *Math. Ann.* **21**, 457 (1883) und Rohn, *Leipzig. Ber.* **46**, 84 (1894) behandelt: der erste, indem er die schiefe Projektion von Steiner benutzte, der zweite mit Hilfe der zugehörigen Restkurven, welche die betrachteten Kurven zu einem vollen Schnitt ergänzen, indem er die Sätze über lineare Scharen von Punktgruppen (Bd. II[1], Kap. XIV) heranzog. S. auch Sturm, *J. f. Math.* **88**, 233 (1880) und die Preisschriften von Halphen, *J. éc. polyt.* **52**, 122 (1882) und Noether, *Berl. Abh.* 1882, S. 75. Vgl. ferner Baker, *London M. S. Proc.* (2) **11**, 285 (1912), der von dem allgemeinen *Basissatz* ausgeht (Kap. XXXIII, § 6), welchen man für eine beliebige algebraische Fläche Severi, *Math. Ann.* **62**, 194 (1906), Auszug *C. R.* **140**, 361 (1905), verdankt.

Für eine allgemeine F_3 erhält man die Basis sofort aus der (eine Gerade bildenden) Basis der Ebene durch die eindeutige Abbildung von F_3 auf die Ebene (vgl. Severi, a. a. O., § 7). Während es nach Poincaré, *Ann. éc. norm.* (3) **27**, 88 (1910) eine aus sechs Geraden gebildete Basis geben soll, findet man auf diesem Wege, daß die Basis auf F_3 aus den sieben Geraden besteht, welche in der ebenen Abbildung von F_3 die sechs Fundamentalpunkte und eine der Verbindungslinien zweier von ihnen zu Bildern haben. Die Richtigkeit dieses Resultates, d. h. daß die sieben Geraden wirklich *algebraisch unabhängig* sind, derart daß die Basis aus einer geringeren Anzahl von Geraden nicht gebildet werden kann, ergibt sich (nach dem Satz VII von Severi, a. a. O., S. 214) daraus, daß die Diskriminante ihrer Gruppierung von Null verschieden ist, und auch aus einer Formel von Picard, *Ann. éc. norm.* (3) **22**, 69 (1905), Auszug *C. R.* **139**, 949 (1904), für die Anzahl von Doppelintegralen zweiter Gattung einer algebraischen Fläche; vgl. auch Picard und Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indép. II,* Paris 1906, p. 373, 387ff.

Wenn wir mit Sturm durch (n, p) eine Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p bezeichnen, die auf F_3 liegt, mit h die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte (vgl. Kap. XXXVI, § 2), mit $t_3 = n + p - 1$ ihre Mächtigkeit auf F_3, mit u_3 ihre Mächtigkeit im Raume (die für $n > 6$ im allgemeinen kleiner als die Mächtigkeit der allgemeinen Kurven von der Ordnung n und dem Geschlecht p ist), mit v die Dimension des linearen Systems von F_3, das durch die Kurve hindurchgeht, so daß $u_3 = t_3 + 19 - v$, dann finden wir für die Kurven von den Ordnungen 3, 4, 5, 6, die auf F_3 liegen, die folgende Tabelle, in der g_i die Anzahl der Geraden von F_3 bedeutet, welche die Kurve i-mal treffen.

$n = 3$

	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3	v
1) (3, 0)	6	15	6	1	2	12	9
2) (3, 1)	—	27	—	—	3	12	10

$n = 4$

	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3	v
1) (4, 0)	2	10	10	5	3	3	16	6
2) (4, 1)	—	10	16	1	2	4	16	7

$n = 5$

	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3	v
1) (5, 0)	1	5	10	6	5	6	4	20	3
2) (5, 1)	—	5	10	10	2	5	5	20	4
3) (5, 2)	—	1	16	10	—	4	6	20	5

$n = 6$

	g_5	g_4	g_3	g_2	g_1	g_0	h	t_3	u_3	v
1) (6, 0)′	1	1	10	5	5	5	10	5	23	1
2) (6, 0)″	—	6	—	15	—	6	10	5	24	—
3) (6, 1)	—	3	6	9	6	3	9	6	24	1
4) (6, 2)	—	1	8	9	8	1	8	7	24	2
5) (6, 3)	—	—	6	15	6	—	7	8	24	3
6) (6, 4)	—	—	—	27	—	—	6	9	24	4

Verschiedene der vorstehenden Kurven hatten schon Clebsch, *J. f. Math.* **65**, 359 (1866); Cremona, *Grundzüge*, S. 187; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 181 gefunden, teils durch die ebene Abbildung von F_3, teils direkt durch die Untersuchung der verschiedenen

besonderen Fälle, welche sich beim Schnitt einer F_3 mit einer F_2 oder einer anderen F_3 darbieten können.

Dabei war ihnen jedoch die Kurve $(6, 0)'$ entgangen, die dann Noether in der angeführten *Preisschrift*, S. 86, fand; vgl. auch Sturm, *Math. Ann.* **21**, 497 (1883). Diese Kurve ist der Restschnitt zweier F_3, die zwei windschiefe Gerade gemein und in allen Punkten der einen dieselbe Tangentialebene haben. Die letztere Gerade ist für die Kurve eine fünfpunktige Sehne, die andere eine vierpunktige. Bei der ebenen Abbildung einer F_3 hat eine solche Kurve zum Bild eine Kurve 3. Ordnung, die durch einen Fundamentalpunkt doppelt und nur durch einen einzigen anderen einfach hindurchgeht, woraus sich zeigt, daß sie von den 27 Geraden eine in 5, eine in 4, zehn in 3, fünf in 2, fünf in einem und fünf in keinem Punkte treffen.

Während *im Raum* diese Kurve $(6, 0)'$, welche die Konstantenzahl 23 hat, ein besonderer Fall der $(6, 0)''$ ist, die aus dem Teilschnitt einer F_3 mit einer F_4 hervorgeht und die Konstantenzahl 24 besitzt, stimmt dies nicht *auf der Fläche* F_3, wo beide Klassen von Kurven in derselben Mannigfaltigkeit 5 auftreten und zwei verschiedene Kurvenfamilien bilden.

Nur für $n = 6$ existieren auf einer F_3 zwei voneinander verschiedene Klassen von rationalen Kurven der Ordnung n: Sturm, *Math. Ann.* **21**, 483 (1883); Rohn, *Leipzig. Ber.* **46**, 101 (1894).

Über den Schnitt zweier Flächen 3. Ordnung und seine Ausartungen vgl. auch Schoute, *Archive Teyler* (2) 7^3, 219 (1901), *Math. Ver.* **9**, 103 (1901).

Wir führen noch die folgende charakteristische Eigenschaft der Gruppe von 10 Kurven einer F_3 an, zu der Lie, *Leipz. Ber.* **49**, 229 (1897) von dem Abelschen Theorem aus als Spezialfall viel allgemeinerer Eigenschaften gelangte: *wenn zehn Kurven von der Art sind, daß eine allgemeine Ebene sie in zehn Punkten, die auf einer einzigen irreduziblen Kurve 3. Ordnung liegen, schneidet, so geht durch die zehn Kurven eine Fläche 3. Ordnung hindurch.*

§ 10. Flächen zweiter Ordnung, welche eine Fläche dritter Ordnung in drei Kegelschnitten treffen. Sätze über die 135 Schnittpunkte der 27 Geraden.

Steiner, *Werke II*, S. 654, hat den folgenden Satz ausgesprochen:

Wenn drei Kegelschnitte von F_3 den vollständigen Schnitt von F_3

mit einer Fläche 2. Ordnung bilden, so gehören die drei Geraden, in welchen die Ebenen der Kegelschnitte die F_3 *noch schneiden, derselben Ebene an. Umgekehrt, wenn man durch drei Gerade* g_1, g_2, g_3 *von* F_3*, die in einer Ebene* π *liegen, willkürlich drei Ebenen* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *legt, so schneiden diese* F_3 *noch in drei Kegelschnitten* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$*, die auf einer Fläche 2. Ordnung liegen.*

Die sechs Asymptotenpunkte auf g_1, g_2, g_3 *liegen zu je dreien auf vier Geraden, welche die Berührungslinien der Ebene* π *mit vier Kegeln 2. Grades bilden, die je drei der sechs,* g_1, g_2, g_3 *in den genannten Punkten berührenden Kegelschnitte von* F_3 *enthalten, und die Spitzen dieser vier Kegel liegen auf einer Geraden von* π.

So gehen aus der Ebene π ∞^3 *Flächen 2. Ordnung hervor, unter ihnen sind* ∞^2 *Kegel enthalten, und deren Spitzen bilden eine Fläche 4. Ordnung* F_4.

Die Beweise hierfür findet man bei Cremona, *Grundzüge*, S. 196; Sturm, *Synth. Unters.*, S. 76, 80.

Wenn man die Geraden $\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2$ *der Reihe nach um die Punkte* g_2g_3, g_3g_1, g_1g_2 *rotieren läßt, so erzeugen ihre reziproken Polaren bezüglich der Büschel von* F_2*, die durch* Γ_2 *und* Γ_3*,* Γ_3 *und* Γ_1*,* Γ_1 *und* Γ_2 *hindurchgehen, drei Strahlenkongruenzen 2. Ordnung 6. Klasse, von denen* F_4 *die gemeinsame Brennfläche ist.*

Dieser Satz rührt von Cremona, *Grundzüge*, S. 196, her und wurde aufs neue bewiesen von F. Schur, *J. f. Math.* **95**, 207 (1883), der hinzufügte, daß *die 12 Knotenpunkte von* F_4 *die Schnittpunkte der 12 Geradenpaare von* F_3 *bilden, die in den von* π *verschiedenen, durch* g_1, g_2, g_3 *hindurchgehenden dreifach berührenden Ebenen enthalten sind,* außerdem daß *die drei Tetraeder, deren Ecken zu den 12 Punkten gehören und von den durch je eine der drei Geraden* g_1, g_2, g_3 *hindurchgehenden dreifach berührenden Ebenen herrühren, ein desmisches System bilden.*

Über desmische Tetraeder s. Hermes, *J. f. Math.* **56**, 204 (1858); Beltrami, *Giorn. di Mat.* (1) **1**, 208, 354 (1863), *Opere I*, p. 73; Stephanos, *Bull. Sc. math.* (2) $\mathbf{3}^1$, 424 (1879); Veronese, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **9**, 306 (1881); Reye, *Acta Math.* **1**, 97 (1882): *sie sind von der Art, daß irgend zwei von ihnen auf vier Arten perspektiv sind, wobei die Perspektivitätszentren die Ecken des dritten Tetraeders bilden.*

Man kann auch sagen, daß *aus den 135 Schnittpunkten der 27 Geraden von* F_3 *sich 45 Gruppen von je 12 herausgreifen lassen, welche die Ecken von drei desmischen Tetraedern bilden.*

Die F_4 ist demnach eine sogenannte *desmische Fläche,* die zu der Krümmungsmittelpunktsfläche einer F_2 reziprok ist (Veronese, a. a. O., p. 333). Nach Schur schneidet sie F_3 in den drei Raumkurven 4. Ordnung 1. Art, in denen F_3 von den ersten Polaren der Ecken des Dreiseits $g_1 g_2 g_3$ außerhalb dieser Geraden selbst getroffen wird, außerdem wird F_4 von π in einer Kurve 4. Ordnung geschnitten, die auf der Kernfläche von F_3 liegt.

Schur hat auch die umgekehrte Frage behandelt, die F_3 zu bestimmen, wenn eine desmische Fläche F_4 willkürlich gegeben ist und ebenso die Ebene π, und hat gefunden, daß es sechs zugehörige F_3 gibt. Daraus folgt (nach einem Satz von Lüroth, Bd. II^1, S. 418), daß jede desmische Fläche 4. Ordnung von einer beliebigen Ebene in einer Kurve geschnitten wird, welcher ∞^1 vollständige Fünfseite einbeschrieben werden können.

Über die vorstehenden Eigenschaften s. auch S. Kantor, *Wien. Denkschr.* **46**, 118 (1882); Humbert, *J. de Math.* (4) **7**, 391 (1891); Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie III,* Leipzig 1896, S. 505; Brües, *Diss.* Bonn 1910, S. 25.

Die 135 Schnittpunkte der 27 Geraden sind auch eng verknüpft mit den involutorischen quadratischen Transformationen (Inversionen), die F_3 in sich transformieren. Der Fundamentalpunkt O einer beliebigen von ihnen ist der Schnittpunkt zweier Geraden g, h von F_3, der Grundkegelschnitt ist der weitere Schnitt von F_3 mit einer Ebene π, die durch die dritte Gerade k von F_3, welche in der Ebene gh liegt, hindurchgeht, und die F_2, auf welcher die sich selbst entsprechenden Punkte liegen, geht durch die Kurve γ 4. Ordnung erster Art hindurch, in der F_3 außer in g und h von der ersten Polare des Punktes O geschnitten wird, und entspricht π in der projektiven Beziehung zwischen dem Ebenenbüschel mit der Achse k und dem F_2-Büschel mit der Grundkurve γ, durch welche (§ 7) F_3 erzeugt wird. *Die angeführten Transformationen verteilen sich also auf 27 ∞^1-fache Scharen, die den 27 Geraden von F_3 zugeordnet sind.*

Vgl. hierüber Küpper, *Prag. Böhm. Gesellsch. Abh.* (7) **2**, Nr. 10 (1888), *Zschr. Math. Phys.* **34**, 129 (1889); Montesano, *Ist. Ven. Atti* (6) **6**, 1425 (1888); Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtschaften IV,* Leipzig 1909, S. 405.

Montesano hat hinzugefügt, daß die fünf Punkte, in denen die durch eine Gerade von F_3 gehenden dreifach berührenden Ebenen F_3 außerhalb dieser Geraden berühren, die Mittelpunkte von fünf Strahlenbündeln bilden, die durch ihre Schnittpunkte mit F_3 fünf

untereinander vertauschbare und als Produkt die Identität liefernde Involutionen bestimmen.

§ 11. Weitere Sätze über die Doppelsechse. Vollständige Fünfflache, die der Fläche dritter Ordnung einbeschrieben sind.

F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 9 (1881) hat den bemerkenswerten Satz bewiesen, daß *die konjugierten Geraden einer Doppelsechs auf F_3 reziproke Polaren bezüglich derselben Fläche 2. Ordnung H_2 sind.*

Andere Beweise desselben Satzes gaben Montesano, *Ann. di Mat.* (3) **1**, 343 (1898); Baker, *London M. S. Proc.* (2) **9**, 178 (1911).

Als Folgerung aus einer allgemeineren Eigenschaft leitet Montesano, a. a. O., S. 344 ab, daß, *wenn man die beiden Sextupel einer Doppelsechs mit einer Ebene schneidet, man zwei linear abhängige Punktsysteme* (nach der Bezeichnung von Rosanes, *J. f. Math.* **88**, 241 (1880)) *erhält.* Vgl. auch S. Kantor, *Wien. Denkschr.* **46**, 92 (1882).

Verschiedene Sätze hat Kohn, *Wien. Sitzungsber.* **117**², 53 (1908) aus der Bemerkung abgeleitet, daß *auf der Kurve 3. Ordnung, welche einen ebenen Schnitt von F_3 bildet, die Spuren der Geraden einer Doppelsechs sechs Punktepaare einer wechselweise eindeutigen Punktkorrespondenz von der 2. Art bilden* (vgl. Bd. II¹, S. 354). S. auch Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV*, 1909, S. 187.

Es ergibt sich u. a., daß *die 45 Punkte, in denen sich die 15 übrigbleibenden Geraden von F_3 schneiden, in 15 Tripel bezüglich der obengenannten Fläche H_2 konjugierter Punkte zerfallen.* In der Schläflischen Bezeichnung wird, wenn man die von den Geraden $a_1, \ldots a_6$ und $b_1, \ldots b_6$ gebildete Doppelsechs betrachtet, ein solches Tripel von den Punkten $c_{ik}c_{lm}$, $c_{il}c_{km}$, $c_{im}c_{kl}$ gebildet, wo i, k, l, m irgend vier der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnen.

Reye, *Math. Ann.* **55**, 257 (1902) gelangte zu dem Schurschen Satz, indem er von den zwei konjugierten Netzen kubischer Raumkurven auf F_3 ausging, die der gegebenen Doppelsechs zugeordnet sind (§ 9). Zwei Kurven der beiden Netze liegen, da sie fünf Punkte gemein haben, auf einer F_2. Die ∞^4 sich so ergebenden F_2 bilden kein lineares System, aber sie sind in einem linearen System von ∞^8 Flächen enthalten. Dieses bestimmt eine Fläche

2. Klasse, welche sich auf alle jene Flächen stützt, und dies ist eben die Fläche H_2, bezüglich deren die sechs Geradenpaare der Doppelsechs reziproke Polaren sind.

Die kubischen Raumkurven der beiden Netze sind kubische Polkurven von H_2, d. h. es existieren ∞^2 Polfünfecke von H_2, die jeder dieser Kurven einbeschrieben sind und zu Ecken ihre fünf Schnittpunkte mit je einer Kurve des konjugierten Netzes haben. Alle diese ∞^4 Polfünfecke sind zur gleichen Zeit einer Fläche 3. Klasse Φ_3 umschrieben, welche zu F_3 bezüglich H_2 reziprok ist und F_3 in den Geraden der Doppelsechs schneidet (vgl. auch Schur, a. a. O., S. 12).

F_3 und Φ_3 kann man auch erhalten, indem man von zwei kubischen Raumkurven mit *einem* Schnittpunkt P ausgeht: F_3 ist dann die Fläche 3. Ordnung, welche diese beiden Raumkurven enthält, und Φ_3 die Hüllfläche der Ebenen, welche die beiden Kurven in sechs Punkten eines Kegelschnittes schneiden. Von den zehn gemeinsamen Sehnen der beiden kubischen Raumkurven bilden die sechs, die nicht durch P gehen, ein Sextupel der Doppelsechs, deren 12 Geraden auf F_3 und Φ_3 liegen.

Über die vorstehenden Sätze vgl. auch Kasner, *Am. J.* **25**, 107 (1903); Baker, *London M. S. Proc.* (2) **11**, 300 (1912); Grieve, ebenda (2) **12**, 315 (1913); außerdem Le Paige, *C. R.* **99**, 537 (1884).

Nach Reye bildet ein beliebiges der genannten ∞^4 Polfünfecke und das zu ihm bezüglich H_2 reziproke Pentaeder eine Konfiguration $(15_6, 20_3)$, welche 15 Paare perspektiver Tetraeder enthält, der Fläche F_3 einbeschrieben (vgl. § 5) und Φ_3 umschrieben ist.

Daß ∞^5 einer F_3 einbeschriebene vollständige Fünfflache existieren, erkannten Le Paige, *Acta Math.* **5**, 195 (1884) und Zeuthen, ebenda, S. 203.

Le Paige, *Wien. Sitzungsber.* **91**^{2}, 981 (1885) hat auch die der Kernfläche von F_3 einbeschriebenen vollständigen Fünfflache bestimmt.

§ 12. Zusammenhang mit der Theorie der ebenen Kurven vierter Ordnung.

Eine Verknüpfung zwischen der Theorie der F_3 und der der ebenen Kurven 4. Ordnung findet man nach Geiser, *Math. Ann.* **1**, 129 (1869), indem man den Kegel betrachtet, welcher der Fläche F_3 aus einem einfachen Punkte P auf ihr umschrieben ist. Dieser Kegel

ist vom 4. Grade, und sein Schnitt mit einer Ebene π wird eine Kurve c_4 4. Ordnung; umgekehrt läßt sich jede ebene c_4 derart aus einer F_3 erhalten. Die Doppeltangenten von c_4 sind die Spuren der Tangentialebene von F_3 in P und der Ebenen, welche aus P die Geraden von F_3 projizieren. Die Kurve c_4 erhält einen Doppelpunkt entweder als Projektion eines Doppelpunktes von F_3 oder wenn der Punkt P auf einer Geraden von F_3 liegt.

Der Geisersche Satz folgt sofort aus der Bemerkung, daß, wenn man den Punkt $(0, 0, 0, 1)$ mit P zusammenfallen läßt und als Ebene $x_1 = 0$ die Tangentialebene in P wählt, die Gleichung von F_3 sich in die Form bringen läßt

$$x_4^2 x_1 + 2x_4 f_2 + f_3 = 0,$$

wo f_2, f_3 Formen 2. und 3. Ordnung von x_1, x_2, x_3 bezeichnen, so daß der scheinbare Umriß der aus P auf die Ebene $x_4 = 0$ projizierten Fläche

$$f_2^2 - x_1 f_3 = 0$$

wird, d. h. eine Kurve 4. Ordnung, von der $x_1 = 0$ eine Doppeltangente ist. Umgekehrt kann man auch von der zweiten zur ersten Gleichung übergehen.

Einen aus der Theorie der linearen Scharen (Bd. II[1], Kap. XIV) abgeleiteten Beweis hat Bertini, *Palermo Rend. Circ. Mat.* **30**, 47 (1910) gegeben.

Über die Anwendung dieser Methode auf die Untersuchung der Doppeltangenten von c_4 (vgl. Bd. II[1], S. 412) s. noch Geiser, *J. f. Math.* **72**, 376 (1870); Klein, *Math. Ann.* **36**, 51 (1890); Zacharias, *Diss.* Rostock 1903; Baker, *London M. S. Proc.* (2) **9**, 145 (1911); Long, ebenda, p. 205.

Um ein Beispiel für die Anwendung der Methode auf die Untersuchung der F_3 zu geben, führen wir den folgenden Satz (Baker, a. a. O., p. 167) an, der aus einem Satz von Steiner (Bd. II[1], S. 408) über die Doppeltangenten einer ebenen c_4 folgt: *Die sechs Geraden, welche von einem Punkte des Raumes ausgehen und die sechs Paare konjugierter Geraden einer Doppelsechs treffen, liegen auf einem Kegel 2. Grades.*

Durch die von P ausgehenden Projektionsstrahlen wird zwischen der Ebene π und F_3 eine ein-zweideutige Beziehung hergestellt oder F_3 auf die Doppelebene π abgebildet, wobei c_4 die Übergangskurve bildet (vgl. Bd. II[1], S. 367). Hierüber und über die Verknüpfung dieser Abbildung mit der ein-eindeutigen ebenen Abbildung in § 8 s. Clebsch, *Math. Ann.* **3**, 59 (1871).

§ 13. Flächen dritter Ordnung mit einer endlichen Anzahl von Doppelpunkten.

Wenn eine F_3 Doppelpunkte bekommt, ohne eine Regelfläche zu werden, so rücken einzelne von den 27 Geraden einander unendlich nahe. Man sagt dann, daß eine Gerade der Grenzfläche eine *unäre, binäre* usw. ist, je nachdem sie als die Grenzlage einer einzigen, zweier usw. Geraden der allgemeinen Fläche erscheint. Analoge Benennungen gelten für die dreifach berührenden Ebenen. Wenn z. B. F_3 einen konischen Doppelpunkt O hat, so besitzt sie sechs binäre Geraden, die in O zusammentreffen, und 15 unäre Gerade, welche dieselbe Konfiguration darbieten wie die 15 nach Ausschluß einer Doppelsechs übrigbleibenden Geraden einer allgemeinen Fläche. Von den dreifach berührenden Ebenen sind 15 binäre und enthalten zwei binäre und eine unäre Gerade, 15 sind unäre und enthalten je drei unäre Geraden.

Salmon, *Cambridge and Dublin Math. J.* **2**, 65 (1847) hat für die F_3 als besonderer Fall einer F_n gefunden, daß die Klasse 12 der allgemeinen F_3 sich durch das Vorhandensein eines gewöhnlichen konischen, biplanaren, uniplanaren Doppelpunktes um 2, 3, 6 Einheiten erniedrigt; ebenda **4**, 256 (1849) hat er die Abzählung der 27 Geraden für die verschiedenen Kombinationen von jenen Knotenpunkten ausgeführt.

Die Behandlung der verschiedenen Singularitäten hat dann Schläfli, *London Phil. Trans.* **153**, 193 (1863) vollendet und darauf eine Einteilung der irreduziblen F_3 in 23 Arten, mit Einschluß zweier Arten von kubischen Regelflächen aufgebaut.

Cayley, *London Phil. Trans.* **159**, 201, 231 (1869), *Papers VI*, p. 329, 359, hat für die verschiedenen Arten die reziproke Fläche untersucht, ebenso die Multiplizitäten und Anordnungen der Geraden und dreifach berührenden Ebenen. Hier und bei Zeuthen, *Math. Ann.* **10**, 536 (1876) sind auch für die verschiedenen Arten der F_3 die Werte der Zahlen angegeben, die bei dem Problem der Reziprokalflächen (Kap. XXXI, § 3) auftreten.

Indem wir die Regelflächen auslassen (über diese s. § 16), geben wir eine Übersicht über die 21 Arten der Schläflischen Klassifikation mit Angabe der Singularität und Klasse, indem wir mit C_i einen konischen, mit B_i einen biplanaren, mit U_i einen uniplanaren Doppelpunkt bezeichnen und mit dem Index i die Anzahl Einheiten, um die er die Klasse der Fläche erniedrigt.

Art	Singularität	Klasse	Art	Singularität	Klasse
I	—	12	XII	U_6	6
II	C_2	10	XIII	$B_3 + 2C_2$	5
III	B_3	9	XIV	$B_5 + C_2$	5
IV	$2C_2$	8	XV	U_7	5
V	B_4	8	XVI	$4C_2$	4
VI	$B_3 + C_2$	7	XVII	$2B_3 + C_2$	4
VII	B_5	7	XVIII	$B_4 + 2C_2$	4
VIII	$3C_2$	6	XIX	$B_6 + C_2$	4
IX	$2B_3$	6	XX	U_8	4
X	$B_4 + C_2$	6	XI	$3B_3$	3
XI	B_6	6			

Vgl. hierüber noch Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie II*, S. 374, wo auch die kanonischen Gleichungen der verschiedenen Arten angegeben sind.

Auf einem mehr geometrischen Wege gelangte Bobek, *Wien. Sitzungsb.* **96**, 355 (1888) zu derselben Klassifikation, indem er auch zeigte, wie jede der Arten sich aus einem Ebenenbüschel und einem dazu projektiven F_2-Büschel erzeugen läßt.

Aus den Arbeiten von Schläfli und Cayley lassen sich alle Fälle ableiten, in denen die Kernfläche zerfällt. Damit insbesondere eine irreduzible F_3 einen Teil der Kernfläche einer anderen Fläche 3. Ordnung bildet, ist notwendig und hinreichend, daß sie zwei biplanare Punkte vom Typus B_3 oder einen vom Typus B_6 besitzt (wozu jedesmal noch ein C_2 treten kann). Zu denselben Resultaten gelangte auf direktem Wege Ciani, *Rom Acc. Lincei Rend.* (4) **6**[1], 55 (1890), *Ist. Lomb. Rend.* (2) **26**, 498, 523, 557 (1893), **27**, 222 (1894). Einzelne Sätze über F_3 mit Doppelpunkten gab Kohn, *Wien. Sitzungsb.* **96**, 1298 (1887).

Über das Auftreten von besonderen F_3 bei der Untersuchung der quadratischen Strahlenkomplexe vgl. z. B. Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie III,* Leipzig 1896, S. 63, 76, 97, 282, 375, 438, 447.

Über die reziproken Flächen der Arten XVI bis XX vgl. Segre, *Math. Ann.* **24**, 406, 418, 433 (1884).

Eine besondere F_3 mit drei C_2 findet man als die kubische Polfläche einer Ebene bezüglich der ∞^2 F_2, die sich durch eine kubische Raumkurve legen lassen. Ihre drei Doppelpunkte liegen in den Schnittpunkten der Ebene mit der kubischen Raumkurve, und diese ist für die F_3 eine Haupttangentenkurve. Wenn die

Ebene die kubische Raumkurve oskuliert, so wird die F_3 eine Cayleysche Regelfläche. Vgl. Geiser, *J. f. Math.* **69**, 216 (1868); Sturm, *J. f. Math.* **70**, 239 (1869), *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV*, Leipzig 1909, S. 408; Cantone, *Napoli Rend.* **15**, 181 (1886); Schoute, *Amsterdam Nieuw Archief voor Wisk.* (2) **4**, 90 (1899); Reye, *Die Geom. d. Lage II*, 4. Aufl. 1907, S. 183; Bioche, *C. R.* **125**, 15 (1897), *Bull. Soc. math.* **26**, 217 (1898), **27**, 96 (1899), **35**, 70 (1907), von denen der letzte noch hinzugefügt hat, daß umgekehrt jede F_3, welche eine kubische Raumkurve als Haupttangentenkurve besitzt, sich auf diese Weise erzeugen läßt.

Über die Transformation einer F_3 von der Art XXI und der kubischen Regelflächen in sich durch eine polare Verwandtschaft vgl. Dumont, *Bull. Soc. math.* **25**, 74 (1897).

Mit Hilfe einer ein-dreideutigen ebenen Abbildung einer F_3 von der Art XXI hat S. Kantor, *J. f. Math.* **95**, 147 (1883) viele Sätze über gewisse Punktgruppen auf einer allgemeinen ebenen Kurve 3. Ordnung bewiesen.

Die F_3 von der Art XXI, welche die einzigen nicht geradlinigen Flächen 3. Ordnung 3. Klasse sind, bieten sich auch dar bei der Aufsuchung der irreduziblen Strahlenkongruenzen 3. Ordnung, die aus Haupttangenten einer Fläche bestehen. Fano, *Torino Atti* **37**, 501 (1902) hat gezeigt, daß diese Kongruenzen alle von der 3. Klasse sind, sich auf einer Ebene abbilden lassen und in einem tetraedralen Komplex enthalten sind, ferner daß sie entweder aus den von den Erzeugenden verschiedenen Haupttangenten einer kubischen Regelfläche oder aus den Haupttangenten des einen oder anderen Systems auf einer F_3 der Art XXI bestehen.

Besonders beachtenswert ist die F_3 mit vier konischen Doppelpunkten. Von dieser Art ist z. B. die kubische Polarfläche einer Ebene bezüglich einer allgemeinen F_3 (§ 4). Legt man in die Doppelpunkte die Ecken des Grundtetraeders, so läßt sich der Gleichung einer F_3 der betrachteten Art die Form geben

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 0.$$

Die reziproke Fläche hat die Gleichung

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0$$

und ist die sogenannte *Steinersche Fläche* 4. Ordnung (s. Kap. XXXV).

Diese F_3 wurde zuerst von Cayley, *J. de Math.* (1) **9**, 285

(1844), *Papers I*, p. 183 bemerkt, der den Satz aufstellte, daß *ihre Tangentialebenen längs zwei Gegenkanten des von den Doppelpunkten gebildeten Tetraeders sich paarweise in einer von drei Geraden schneiden, die in einer Ebene liegen und der Fläche angehören.*

Später wurde diese F_3 untersucht von Beltrami, *Giorn. di Mat.* (1) **1**, 208, 354 (1863), *Opere I*, p. 73 und von Eckardt, *Progr.* Reichenbach 1869, *Math. Ann.* **5**, 30 (1872), die sie aus der eindeutigen Punkttransformation ableiteten, die durch die einfachen Gleichungen

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} : \frac{1}{x_4}$$

gegeben wird. Vgl. noch Painvin, *J. f. Math.* **63**, 58 (1864); Townsend, *Quart. J.* **10**, 264 (1870); Eckardt, *Math. Ann.* **7**, 600 (1874); Jaeckel, *Progr.* Gymn. Ohlau 1909; Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie II*, Leipzig 1893, S. 360; *Die Lehre v. d. geom. Verw. III*, Leipzig 1909, S. 367; Zacharias, *Archiv Math. Phys.* (3) **18**, 289 (1911); Roth, *Monatsh. f. Math.* **22**, 64 (1911); Timerding, *Gött. Nachr.* 1900, S. 103, *Archiv Math. Phys.* (3) **20**, 98 (1912).

Laguerre, *Nouv. Ann.* (2) **11**, 319, 337, 418 (1872), **12**, 55 (1873), *Bull. Soc. math.* **1**, 21 (1873), *Œuvres II*, p. 275, 281, 319 hat insbesondere die Haupttangentenkurven der Fläche untersucht und dafür die folgende Konstruktion angegeben. Nimmt man auf F_3 einen Punkt P an, so zerfällt der von P aus der Fläche umschriebene Kegel in zwei quadratische Kegel, von denen jeder die Fläche längs einer kubischen Raumkurve berührt, die Tangentenflächen dieser beiden Raumkurven schneiden dann F_3 außerdem in den zwei Haupttangentenkurven, die durch P gehen.

Die Haupttangentenkurven liegen auf den Flächen 2. Ordnung

$$\lambda^2(x_2x_3 + x_1x_4) + \mu^2(x_3x_1 + x_2x_4) + \nu^2(x_1x_2 + x_3x_4) = 0,$$

wobei λ, μ, ν der Beziehung $\lambda + \mu + \nu = 0$ genügen. Wie Lecornu, *Acta Math.* **10**, 233 (1887) bemerkt hat, ist die Hüllfläche dieser ∞^1 F_2 die Kernfläche von F_3.

Nach Segre, *J. f. Math.* **98**, 302 (1884) sind die Haupttangentenkurven von F_3 auch die Restschnitte von F_3 mit Flächen 3. Ordnung, die durch die drei keine zwei Doppelpunkte von F_3 verbindenden Geraden von F_3 gehen.

Beltrami hat a. a. O. auch die Transformation betrachtet,

die entsteht, wenn man bezüglich eines gegebenen Grundtetraeders die Punkte des Raumes in Gruppen von acht Punkten einteilt, die bis auf das Vorzeichen dieselben homogenen Koordinaten besitzen (vgl. hierüber Painvin, a. a. O.; Veronese, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **9**, 265, 306 (1881); Segre, *Giorn. di Mat.* (1) **21**, 355 (1883); Timerding, *Ann. di Mat.* (3) **1**, 95 (1898); Reye, *Geom. d. Lage III*, S. 233, 248) und hat gefunden, daß, wenn man eine solche Punktgruppe ins Auge faßt und ihre 28 Verbindungslinien mit einer beliebigen Ebene schneidet, dann die vierten harmonischen Punkte zu diesen Schnittpunkten und den zugehörigen zwei der acht Punkte auf einer F_3 liegen, von welcher die Ecken des Tetraeders vier Doppelpunkte bilden.

Die ebene Abbildung einer F_3 mit Doppelpunkten erhält man am einfachsten durch ihre Projektion aus einem Doppelpunkte. So wurde sie von Clebsch, *J. f. Math.* **65**, 378 (1866) für den Fall eines einzigen konischen Doppelpunktes angegeben und dann von Diekmann, *Math. Ann.* **4**, 442 (1871) für alle Fälle, in denen F_3 einen konischen, biplanaren oder uniplanaren Doppelpunkt besitzt, genauer untersucht.

Wenn F_3 nur einen einzigen konischen Doppelpunkt besitzt, kann man drei Abbildungsarten finden, die durch die Lage der sechs Fundamentalpunkte gekennzeichnet sind; diese können nämlich entweder alle auf einem Kegelschnitt oder drei von ihnen auf einer geraden Linie oder zwei unendlich benachbart liegen. Die drei Arten sind indessen nicht wesentlich verschieden, da man von der einen zur anderen durch eine quadratische Transformation übergehen kann. Die übrigen Fälle führen, was die Lage der Fundamentalpunkte betrifft, zu Kombinationen der angegebenen drei Arten. Für eine F_3 mit 2, 3, 4 konischen Doppelpunkten genügt es z. B. vorauszusetzen, daß die sechs Fundamentalpunkte auf einem Kegelschnitt liegen und ein, zwei, drei Paare von ihnen unendlich benachbart sind. Eine F_3 mit vier Knotenpunkten läßt sich auch durch die Kurven 3. Ordnung abbilden, die einem vollständigen Vierseit umschrieben sind (die Haupttangentenkurven werden dann durch die dem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte abgebildet).

§ 14. Flächen dritter Ordnung, welche Kollineationen in sich zulassen. Eckardtsche Flächen. Clebschs Diagonalfläche.

Als *Eckardtsche Fläche* bezeichnet man eine F_3, auf der drei der 27 Geraden in einem einfachen Punkt P (dem *Eckardt-*

schen Punkt oder *Ovalpunkt* nach Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 416, vgl. § 15) zusammenstoßen; sie wurde zuerst untersucht von Eckardt, *Progr.* Chemnitz 1875, *Math. Ann.* **10**, 227 (1876) und mit Hilfe der ebenen Abbildung von Wieleitner, *Diss.* München 1901, *Progr.* Gymn. Speyer 1901, vgl. auch *Archiv Math. Phys.* (3) **16**, 206 (1910). Der Punkt P ist eine Ecke des Sylvesterschen Pentaeders und die Ebene, in welcher die drei Geraden liegen, eine Diagonalebene des Pentaeders. Diese Ebene berührt die Kernfläche längs der P gegenüberliegenden Kante des Pentaeders und schneidet sie außerdem in zwei Geraden, die durch P gehen (aber keine Kanten des Pentaeders sind).

Dies kann ein, zwei, drei, vier, sechs, zehnmal eintreten, aber, wenn die Kernfläche zerfällt, auch neun oder 18 Male. Denkt man sich die Gleichung von F_3 in der kanonischen Form des § 4 geschrieben, so entsprechen die sechs ersten Fälle der Gleichheit zweier der Koeffizienten a_i oder zweier und zwei anderer oder dreier oder zweier und der drei anderen oder vierer oder aller fünf. Den dritten Fall hatte schon Cayley, *Phil. Mag.* **27**, 493 (1864), *Papers V*, p. 138, untersucht.

Der interessanteste Fall ist der letzte, bei dem die Flächengleichung lautet

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 + y_5^3 = 0,$$

wenn

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0.$$

Diese Fläche hatte schon Clebsch, *Math. Ann.* **4**, 331 (1871) bei der Untersuchung der quadratischen Transformation der Binärformen und ihrer geometrischen Darstellung gefunden und als die *Diagonalfläche* des Sylvesterschen Pentaeders bezeichnet, weil *sie die 15 Diagonalen der vollständigen Vierseite enthält, die in jeder Ebene des Pentaeders durch dessen vier andere Ebenen bestimmt werden. Die 12 übrigen Geraden von F_3 bilden eine Doppelsechs.*

Die Diagonalfläche ist demnach eine kovariante Fläche des Pentaeders. Dieses besitzt auch eine einzige kovariante F_2, die durch die Gleichung

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 0$$

dargestellt wird; ihr gehören die 24 Asymptotenpunkte der 12 nicht in den Ebenen des Pentaeders enthaltenen Geraden von F_3 an (die Asymptotenpunkte der 15 übrigen Geraden fallen in die Ecken des Pentaeders). Die F_2 ist sonach die, bezüglich deren die sechs

Paare konjugierter Geraden der Doppelsechs reziproke Polaren sind (§ 11): F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 12 (1881).

Vgl. auch Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Leipzig 1884, S. 166, 226. Hier wird auch die irreduzible Kurve 6. Ordnung vom Geschlecht $p = 4$ behandelt, in der sich die Diagonalfläche und die vorstehende F_2 schneiden, sie wird die *Bringsche Kurve* genannt, weil sie in der Kleinschen Theorie die Gleichung 5. Grades in der Bringschen Form darstellt.

Andere Eigenschaften der Eckardtschen Flächen und insbesondere der Diagonalfläche, die sich auf die Geometrie des Pentaeders beziehen, findet man bei Ciani, *Rom Acc. Lincei Rend.* (4) **6**¹, 399 (1890), (4) **7**¹, 209, 227 (1891); Ascione, *Rend. Acc. Napoli* (2) **6**, 147 (1892), (2) **7**, 39 (1893); Grüttner, *Diss.* Breslau 1903. Vgl. auch Klein, *Math. Ann.* **4**, 346 (1871).

Über die Diagonalfläche und ihre Kernfläche in Beziehung zu der geometrischen Darstellung der Binärformen s. Waelsch, *Wien. Sitzungsb.* **100**, 574 (1891), **105**, 741 (1896).

Die Auflösung der Gleichung 27. Grades, von der die Aufsuchung der 27 Geraden von F_3 abhängt, erfordert, wenn es sich um die Diagonalfläche handelt, nur die Lösung der beim Pentaeder auftretenden Gleichung 5. Grades und die Bestimmung von fünften Einheitswurzeln.

Die Gleichung 36. Grades, von der im allgemeinen die Aufsuchung der 36 Doppelsechse abhängt, hat für die Diagonalfläche eine rationale Wurzel, folglich ist von den 36 Paaren konjugierter ebener Abbildungen der Diagonalfläche ein Paar rational, und die Sonderung der beiden zugehörigen Abbildungen hängt von der Lösung einer quadratischen Gleichung ab. Clebsch, a. a. O. S. 336, hat bemerkt, daß *bei diesen beiden konjugierten Abbildungen die sechs Fundamentalpunkte die Ecken eines Sechsecks bilden, das auf zehn verschiedene Arten ein Brianchonsches Sechseck ist,* und hat außerdem bewiesen, daß *alle Sechsecke, die diese Eigenschaft haben, zueinander kollinear sind.* Ein solches Sechseck wird z. B. durch ein reguläres Fünfeck und seinen Mittelpunkt gegeben. Über diese Sechsecke vgl. noch Klein, *Math. Ann.* **12**, 531 (1877), *Vorlesungen über das Ikosaeder,* S. 216; Heß, *Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung*, Leipzig 1883, S. 422, *Math. Ann.* **28**, 202 (1887); Schroeter, *Math. Ann.* **28**, 457 (1887); Clebsch-Lindemann, *Vorl. üb. Geometrie*, 2. Aufl., 1 I, Leipzig 1910, S. 583ff.

Die Diagonalfläche wird als kovariante Fläche des Pentaeders in sich transformiert durch die 120 Kollineationen, welche das Pentaeder in sich überführen, diese bilden eine Gruppe, die mit der erweiterten Gruppe des Ikosaeders (vgl. Klein, *Vorl. üb. d. Ikosaeder,* S. 23) holoedrisch isomorph ist.

Die Untersuchung der F_3 mit oder ohne singuläre Punkte, die Kollineationen in sich zulassen, und der Gruppen dieser Kollineationen, wurde ausgeführt von S. Kantor, *Acta Math.* **19**, 143 (1895), *Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene,* Berlin 1895, S. 64; Wiman, *Math. Ann.* **48**, 212 (1897); Bobek, *Monatsh. f. Math.* **10**, 122, 307 (1899). Diese Flächen sind keine anderen wie die Eckardtschen Flächen.

§ 15. Realitätsfragen und gestaltliche Verhältnisse.

Schläfli, *Quart. J.* **2**, 117 (1858), *London Phil. Trans.* **153** 193 (1863); August, *Diss.* Berlin 1862, haben die verschiedenen Arten von F_3 ohne und mit Doppelpunkt, indem sie sie als reelle (d. h. nur durch eine auf ein reelles Tetraeder bezogene Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellt) ansahen, weiter eingeteilt nach der Realität ihrer Geraden und dreifach berührenden Ebenen. Zu denselben Resultaten gelangten auf geometrischem Wege Cremona, *Grundzüge,* S. 210 und Sturm, *Synth. Unters.,* S. 281, 349.

Indem man *punktiert* oder *imaginär (schlechthin imaginär)* eine nicht reelle Gerade nennt, je nachdem sie einen reellen Punkt enthält oder nicht, findet man, daß eine allgemeine reelle F_3 zwei verschiedene Arten von reellen und drei Arten von imaginären dreifach berührenden Ebenen besitzen kann. Eine reelle dreifach berührende Ebene ist von der ersten oder zweiten Art, je nachdem sie drei reelle Gerade von F_3 oder eine reelle und zwei konjugierte punktierte Gerade enthält. Eine imaginäre Ebene ist von der ersten, zweiten oder dritten Art, je nachdem sie eine reelle Gerade und zwei imaginäre oder eine punktierte und zwei imaginäre oder drei einander paarweise nicht konjugierte punktierte Gerade enthält.

Dies vorausgeschickt, kann man *fünf Arten allgemeiner reeller* F_3 unterscheiden:

1. Art. Die 27 Geraden sind reell, und die 45 dreifach berührenden Ebenen sind reell von der ersten Art.

2. Art. 15 Gerade sind reell, die übrigen 12 sind imaginär

und bilden eine Doppelsechs. Von den dreifach berührenden Ebenen sind die 15, welche je drei der reellen Geraden enthalten, reell von der ersten Art, die übrigen imaginär von der ersten Art.

3. Art. Sieben Gerade sind reell und sechs von ihnen verteilen sich zu je zweien auf drei dreifach berührende Ebenen, die durch die siebente, *a*, gehen. Die vier anderen Geraden, die *a* treffen, bilden zwei Paare konjugierter punktierter Geraden, die 16 übrigen sind imaginär. Durch *a* gehen drei reelle Ebenen erster Art und zwei zweiter Art, die übrigen Ebenen sind alle imaginär, 24 von der ersten Art und 16 von der zweiten Art.

4. Art. Nur drei Gerade sind reell und liegen in einer Ebene; von den übrigen sind 12 punktiert und 12 imaginär, jede der reellen Geraden wird von vier der einen und vier der anderen Art getroffen. Durch jede der reellen Geraden gehen außer der reellen Ebene erster Art, die sie enthält, zwei reelle Ebenen zweiter Art und zwei imaginäre Ebenen erster Art; von den übrigen sind 24 imaginär von der zweiten Art und acht imaginär von der dritten Art.

5. Art. Nur drei Gerade sind reell und liegen in einer Ebene; die 24 übrigen sind punktiert. Durch jede der reellen Geraden gehen außer der reellen Ebene erster Art, die sie enthält, vier reelle Ebenen zweiter Art; die übrigen 32 Ebenen sind imaginär von der dritten Art.

Von den 120 Paaren konjugierter Trieder sind bei der ersten Flächenart alle reell, bei den übrigen Arten betragen die Anzahlen reeller Paare der Reihe nach 30, 12, 10, 16.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß *eine Fläche 5. Art sich nicht auf reelle Weise durch drei kollineare Ebenenbündel erzeugen läßt.* Hingegen *läßt sich jede reelle Fläche auf reelle Weise durch die erste und die zweite Steinersche Erzeugungsart gewinnen* (§ 7). Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 212, 218; Sturm, *Synth. Unters.* S. 301, 310, 317, 338.

Eine Reihe anderer negativer Eigenschaften der F_3 5. Art hat Sturm, *Math. Ver.* **14**, 24 (1905) angegeben: sie läßt sich auch nicht auf reelle Art durch trilineare Ebenenbüschel erzeugen, enthält keine reelle kubische Raumkurve usw.

Die gestaltlichen Verhältnisse der reellen F_3 wurden von Schläfli, Klein und Zeuthen untersucht. Während die F_3 der vier ersten Arten aus einem einzigen unpaaren Mantel bestehen, besteht die fünfte Art aus zwei Mänteln, einem paaren und einem unpaaren; vgl. Schläfli, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 289 (1872).

Im Anschluß an die Modelle von F_3 mit vier reellen konischen Doppelpunkten, die auf seinen Rat von Neesen (vgl. *Gött. Nachr.* 1872, S. 403) und Weiler (1873) konstruiert wurden, zeigte Klein, *Math. Ann.* 6, 551 (1873), wie man aus einer derartigen F_3 durch die beiden Prozesse des *Verbindens* und des *Trennens* der in einem Knotenpunkt zusammenstoßenden Flächenteile (ähnlich wie man aus dem reellen Kegel zweiten Grades durch Verbinden oder Trennen das einschalige oder zweischalige Hyperboloid erhält) alle Schläflischen Arten von F_3 mit 3, 2, 1, 0 reellen Doppelpunkten erhalten kann. Was den eventuellen Übergang eines Knotenpunktes durch die Form eines biplanaren Punktes betrifft, so bildet eine F_3 mit biplanarem Knoten den Übergang zwischen zweierlei Flächen mit konischen Knoten; wendet man aber auf diese Knoten die beiden in jedem Falle zulässigen Auflösungsprozesse an, so sind die Resultate bei beiden Flächen dieselben. Alle F_3 derselben Schläflischen Art können durch kontinuierliche Änderung der Koeffizienten ineinander übergeführt werden. Klein hat insbesondere die Lagenverhältnisse der F_3 erster Art (mit 27 reellen Geraden) untersucht, indem er diese F_3 durch kontinuierliche Transformation aus der Clebschschen Diagonalfläche (§ 14) ableitete und sich auf ein Modell dieser Fläche stützte, das Weiler nach Angaben von Clebsch (vgl. *Gött. Nachr.* 1872, S. 402) konstruiert hatte.

Zu den fünf Schläflischen Arten allgemeiner F_3 gelangte Zeuthen, *Math. Ann.* 7, 410 (1874) durch Anwendung seiner Sätze (vgl. Bd. II[1], S. 398) über die verschiedenen Typen von reellen ebenen Kurven 4. Ordnung, indem er (vgl. § 12) eine ebene c_4 als scheinbaren Umriß einer F_3 deutete. Dieser Umriß setzt sich für die F_3 erster bis vierter Art der Reihe nach aus 4, 3, 2, 1 einander ausschließenden Zügen zusammen, dagegen besteht er für eine F_3 fünfter Art aus zwei Zügen, von denen der eine im anderen enthalten ist, wenn das Projektionszentrum auf dem unpaaren Mantel liegt und besitzt keinen reellen Zug, wenn das Projektionszentrum auf dem paaren Mantel liegt.

Dieselbe Methode der *stereographischen Projektion* hat Zeuthen, *Math. Ann.* 8, 1 (1875) für eine weitergehende Untersuchung der Gestalt der allgemeinen reellen F_3 benutzt und so für die F_3 mit 27 reellen Geraden die Resultate von Klein über die aus Geraden der F_3 gebildeten geschlossenen Drei-, Vier- und Fünfseite und über die parabolische Kurve der Fläche wiedergefunden und außerdem für die anderen vier Arten von F_3 diese und andere Fragen gelöst.

Auf einer allgemeinen reellen F_3 erster bis fünfter Art liegen der Reihe nach 12, 6, 2, 0, 0 reelle Geraden, deren Asymptotenpunkte imaginär sind; im ersten Falle bilden die 12 Geraden eine Doppelsechs. Vgl. hierüber auch Korteweg, *Wien. Sitzungsber.* **98**, 1189 (1890).

Eine F_3 erster Art wird durch ihre Geraden in zehn Dreiecke, 90 Vierecke, 30 Fünfecke zerlegt; die parabolische Kurve besteht aus zehn Ovalen, deren jedes einem der zehn Dreiecke einbeschrieben ist.

Eine F_3 zweiter Art wird von ihren 15 reellen Geraden in sechs den Zügen der parabolischen Kurve umschriebene Dreiecke, in 18 Vierecke und 18 Fünfecke zerlegt.

Eine F_3 dritter Art wird von ihren sieben reellen Geraden in vier der parabolischen Kurve umschriebene Dreiecke und in vier Sechsecke zerlegt.

Eine F_3 vierter Art und der unpaare Mantel einer F_3 fünfter Art werden von ihren drei reellen Geraden in drei den Zügen der parabolischen Kurve umschriebene Dreiecke zerlegt; in jedem Punkte des paaren Mantels einer F_3 fünfter Art ist hingegen die Krümmung elliptisch.

Wenn eines der vorstehenden Dreiecke sich auf einen Punkt reduziert, so hat die parabolische Kurve hier einen isolierten Punkt, und das erklärt den diesem Punkt gegebenen Namen *Ovalpunkt* (§ 14).

Klein und Zeuthen haben auch die ebenen Schnitte einer allgemeinen reellen F_3 untersucht. Wenn es sich z. B. um eine F_3 mit 27 reellen Geraden handelt, so können diese Schnitte vier Fälle darbieten, je nachdem sie aus einem einzigen unpaaren Zug oder einem unpaaren Zug und einem Oval bestehen, wobei das Oval von 0, 12 (eine Doppelsechs bildenden) oder 16 Geraden der F_3 getroffen werden kann. Betrachtet man den Schnitt mit der unendlich fernen Ebene und setzt voraus, daß diese die F_3 nicht berührt, so gelangt man derart zu einer Einteilung der F_3 mit 27 reellen Geraden in vier Unterarten.

Die gestaltlichen Verhältnisse einer F_3 und ihrer parabolischen Kurve hat ebenfalls durch stereographische Projektion untersucht Herting, *Diss.* München 1887, *Progr.* Augsburg 1887. Mit Hilfe der ebenen Abbildung von F_3 hat sie studiert Niesen, *Diss.* Groningen 1910.

Wie sich das Sylvestersche Pentaeder in den verschiedenen

Fällen, wo F_3 einen oder mehrere Doppelpunkte hat, verhält, hat Rodenberg, *Diss.* Göttingen 1874 untersucht. Er hat ferner *Math. Ann.* **14**, 46 (1874) umgekehrt, auch was die Realitätsverhältnisse betrifft, alle F_3 bestimmt, die zu einem gegebenen Pentaeder gehören, indem er die verschiedenen Fälle in Betracht zog, die sich bei diesem darbieten können. Die Grundlage einer solchen Klassifikation ist der schon angeführte Satz von Klein, daß alle F_3 ohne Singularitäten und von derselben Schläflischen Art durch kontinuierliche Änderung der Koeffizienten ineinander übergeführt werden können, ohne daß hierbei ein Knotenpunkt auftritt.

Im Zusammenhang hiermit hat Rodenberg 1881 eine Reihe von 26 Gipsmodellen von F_3 und einigen ihrer Kernflächen bei L. Brill in Darmstadt erscheinen lassen, s. *Katalog math. und math.-phys. Modelle* von Dyck, München 1892, S. 263. Vgl. Korteweg, *Amsterdam Nieuw Archief voor Wisk.* **20**, 63 (1893).

Auf Grund der Rodenbergschen Modelle hat Bauer, *München. Ber.* **13**, 320 (1883) die gestaltlichen Verhältnisse der parabolischen Kurven auf den F_3 mit Knotenpunkten untersucht.

Ein Stabmodell der F_3 mit 27 reellen Geraden hatte schon W. Fiedler konstruiert, s. *Zschr. Math. Phys. (Hist. Lit. Abt.)* **14**, 32 (1869); ein Gipsmodell konstruierte Chr. Wiener 1869 auf Anregung von Clebsch.

Berechnungen von Doppelsechsen zum Zweck der Konstruktion von Modellen stellten an Cayley, *Quart. J.* **10**, 58 (1869), *Cambridge Phil. Trans.* **12**¹, 366 (1873), *Papers VII*, p. 316; *VIII*, p. 366; Frost, *Quart. J.* **18**, 89 (1881).

Über die Konstruktion von Modellen vgl. noch Blythe, *Cambridge Phil. Soc. Proc.* **9**, 6 (1898), *Quart. J.* **29**, 206 (1898), **32**, 266 (1901), **34**, 73 (1902), außerdem *On Models of cubic Surfaces*, Cambridge 1905.

Schläfli, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 289 (1872), (2) **7**, 193 (1875) und Klein, *Math. Ann.* **6**, 578 (1873), **7**, 549 (1874), **9**, 476 (1876) haben die allgemeinen reellen F_3 auch vom Standpunkt der Topologie untersucht. Es ergibt sich, daß die F_3 erster bis fünfter Art der Reihe nach den Zusammenhang (Bd. II¹, S. 184) 8, 6, 4, 2, 0 haben (wenn $2p$ der Zusammenhang oder p das Geschlecht ist, lassen sich höchstens p geschlossene Kurven ziehen, welche die Fläche nicht zerstückeln).

Die zweidimensionalen Zykeln der reellen geschlossenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit, welche das Bild einer F_3 (vgl.

Kap. XXX, § 1) bildet, hat Poincaré, *J. de Math.* (6) **2**, 179 (1906) untersucht. Für die besondere F_3 mit der Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

vgl. auch Picard, *C. R.* **126**, 1457 (1898), **132**, 929 (1901), **134**, 629 (1902), **137**, 594 (1903), *Ann. éc. norm.* (3) **19**, 75 (1902), (3) **20**, 560 (1903).

Wenn man als *einfache Fläche* eine kontinuierliche und in projektivem Sinne geschlossene Fläche bezeichnet, deren Tangentialebene und Hauptkrümmungsradien sich kontinuierlich ändern, und als ihre Ordnung die Höchstzahl der Punkte, in denen sie von einer Geraden getroffen wird, so soll nach Juel, *C. R.* **152**, 1219 (1911) die ganze Geometrie der Lage auf einer F_3 unabhängig von dem algebraischen Charakter der Fläche sein und sich auf eine beliebige einfache (nicht geradlinige) Fläche 3. Ordnung ohne Doppelpunkte ausdehnen lassen, indem diese immer 3 oder 7 oder 15 oder 27 reelle Geraden enthält. Vgl. auch Juel, *Compte rendu du 2. Congrès des math. scandinaves* 1911, p. 91.

§ 16. Kubische Regelflächen.

Eine allgemeine kubische Regelfläche R_3 besitzt zwei windschiefe gerade Leitlinien, eine doppelte d und eine einfache e, die von allen Erzeugenden der Fläche getroffen werden. Durch jeden Punkt von d gehen zwei Erzeugende, und ihre Schnittpunkte mit e bilden eine Involution, die zu der Punktreihe d projektiv ist. Dual entsprechend liegen in jeder Ebene durch e zwei Erzeugende, und die Ebenen, die sie mit d verbinden, bilden eine Involution, die zu dem Ebenenbüschel e projektiv ist, indem sie zu der vorhergehenden Involution perspektiv wird.

Wenn U, V die Doppelpunkte der Involution auf e und U', V' die entsprechenden Punkte auf d sind, so stellt jede der Geraden $h = UU'$ und $l = VV'$ zwei unendlich benachbarte Erzeugende dar, die von U' und V' ausgehen. Die R_3 hat mithin zwei Torsallinien (Kap. XXXII, § 3) h, l, zwei Kuspidalpunkte U', V' und zwei Kuspidalebenen eU', eV'.

Die allgemeine R_3 läßt sich auf verschiedene Arten projektiv erzeugen, die bemerkenswertesten sind folgende:

1. Wir beziehen die Punkte einer Geraden d projektiv auf die Punktepaare einer Involution auf einer zu d windschiefen Geraden e und verbinden die Paare entsprechender Punkte.

2. Wir verbinden die Paare entsprechender Punkte einer Geraden e und eines Kegelschnitts γ, der mit e keinen Punkt gemein hat und darauf projektiv bezogen ist.

3. Wir bestimmen den Ort einer Geraden, die sich so bewegt, daß sie zwei windschiefe Geraden d und e und einen Kegelschnitt γ, der d in einem Punkte schneidet, in verschiedenen Punkten trifft.

4. Wir bestimmen den Ort einer Geraden, die sich so bewegt, daß sie zwei Kegelschnitte, die einen Punkt gemein haben, und eine Gerade d, die beide Kegelschnitte einmal schneidet, in verschiedenen Punkten trifft.

5. Wir bestimmen den Ort einer Geraden, die sich so bewegt, daß sie eine Kurve 3. Ordnung mit Doppelpunkt und zwei diese Kurve, die eine in ihrem Doppelpunkt, die andere in einem einfachen Punkt, schneidende windschiefe Geraden in verschiedenen Punkten trifft.

Beziehen wir die Fläche R_3 auf das Tetraeder $UVU'V'$, so nimmt ihre Gleichung die Form an

$$x_1^2 x_3 - x_2^2 x_4 = 0,$$

wobei $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Tangentialebenen in den Kuspidalpunkten auf d sind und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Ebenen, die diese beiden Punkte aus e projizieren.

Alle diese und andere Eigenschaften (ausgenommen die fünfte Erzeugung, die schon Cayley, *Phil. Mag.* **24**, 514 (1862), *Papers V*, p. 90 behandelt hatte) verdankt man Cremona, der auf die R_3 zuerst bei einer Untersuchung der kubischen Raumkurven stieß, *J. f. Math.* **58**, 138 (1860), und ihre zweite Erzeugung angab, er behandelte sie dann in systematischem Zusammenhang *Ist. Lomb. Atti* **2**, 291 (1860). Beachtenswert ist die einfache Konstruktion einer kovarianten Fläche von R_3: Die Pole einer Erzeugenden g von R_3 bezüglich der Kegelschnitte von R_3, die in den Ebenen durch g liegen, erfüllen eine Gerade g'. Läßt man g die Fläche R_3 durchlaufen, so beschreibt g' eine andere kubische Regelfläche R_3', die mit R_3 die zwei Leitlinien, die Kuspidalpunkte, die Kuspidalebenen und die Torsallinien gemein hat und auch die reziproke Polare von R_3 bezüglich einer Fläche Φ_2 ist. Die Gleichung von R_3' lautet auf das oben angegebene Tetraeder bezogen

$$x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4 = 0$$

und die von Φ_2

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Die vorstehende Darstellung ist nicht möglich für den be-

sonderen Fall (die *Cayleysche Regelfläche*), wo die beiden Leitlinien d, e zusammenfallen, so daß in die einzige Leitlinie d auch eine Erzeugende fällt. Dieser Fall ist auch durch das Zusammenrücken der beiden Kuspidalpunkte oder Kuspidalebenen gekennzeichnet; er wurde von Cayley an Cremona in einem Briefe vom 12. Juni 1861 mitgeteilt, kurz darauf auch von Chasles, *C. R.* **53**, p. 888 Anm. (18. Novbr. 1861) bemerkt und sodann von Cremona, *J. f. Math.* **60**, 313 (1862) näher untersucht, der u. a. bemerkte, daß diese Fläche aus der zweiten der angegebenen Erzeugungen hervorgeht, wenn die Gerade und der Kegelschnitt einen nicht sich selbst entsprechenden Punkt gemein haben, und auch aus der vierten Erzeugung, wenn eine einzige durch die Gerade gehende Ebene die beiden Kegelschnitten berührt.

Der Gleichung der Fläche läßt sich die Form geben

$$x_1 x_4^2 + x_2 x_3 x_4 - x_3^3 = 0,$$

wobei $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die Doppellinie, (1, 0, 0, 0) der uniplanare Punkt auf ihr und die Ebene $x_4 = 0$ die längs ihr berührende Tangentialebene wird.

Es läßt sich nach dem Angeführten sagen, daß *eine kubische Regelfläche immer einer linearen Strahlenkongruenz (mit verschiedenen oder zusammenfallenden Leitlinien) angehört.* Vgl. Clifford, *London Phil. Trans.* **169**, 664 (1878), *Papers*, p. 306; Segre, *Torino Mem.* (2) **36**, 98 (1885).

Die allgemeine R_3 hat die Konstantenzahl 13, die Cayleysche Fläche die Konstantenzahl 12.

Während die allgemeine R_3 eine Gruppe von ∞^2 projektiven Transformationen in sich zuläßt, kommt der Cayleyschen Fläche eine Gruppe von ∞^3 Transformationen zu. Umgekehrt hat Lie, *Math. Ann.* **24**, 545 Anm. (1884), *Theorie der Transformationsgruppen III*, Leipzig 1893, S. 196, bemerkt, daß *außer den Ebenen, den Kegeln, den Flächen 2. Ordnung und der abwickelbaren Fläche 4. Ordnung, welche von den Tangenten einer kubischen Raumkurve gebildet wird, die Cayleysche Regelfläche die einzige Fläche ist, die mehr als ∞^2 projektive Transformationen in sich zuläßt.* Vgl. auch Lie, *Archiv for math. og naturv.* **7**, 179 (1882), *Christiania Forhandl.* 1884, Nr. 9, *Leipzig. Ber.* **47**, 209 (1895); Enriques, *Atti Ist. Veneto* (7) **4**, 1590 (1893), (7) **5**, 638 (1894); Fano, *Rom Acc. Lincei Rend.* (5) **4**¹, 149 (1895); *Rend. Circ. mat.* **10**, 16 (1896).

Über die kubischen Regelflächen vgl. noch Chasles, *C. R.* **53**, 884 (1861); Cayley, *London Phil. Trans.* **154**, 559 (1864),

Papers V, p. 201. Geometrische Behandlungen gaben Em. Weyr, *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen 3. Ordnung*, Leipzig 1870; Ch. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie II*, Leipzig 1887, S. 447; Sturm, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie I*, Leipzig 1892, S. 48; Reye, *Geom. d. Lage I*, 4. Aufl. 1899, S. 247; *III*, 4. Aufl. 1910, S. 155; analytische Darstellungen Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II.*, S. 365; Zindler, *Liniengeometrie II*, Leipzig 1906, S. 59.

Vom Standpunkt der Formentheorie untersuchte die Flächen Pittarelli, *Giorn. di Mat.* (1) **32**, 141 (1894).

Die Polarentheorie behandelte Hochheim, *Zschr. Math. Phys.* **23**, 308, 345 (1878), **24**, 18 (1879).

Die Kurven auf einer kubischen Regelfläche betrachtete Ferry, *Archiv for Math. og Naturv.* **21**, 1 (1899), *Amer. J.* **23**, 179 (1901), **25**, 269 (1903). Über die Kegel 3. Ordnung vgl. noch Cayley, *Phil. Mag.* **18**, 439 (1859); *Cambridge Phil. Trans.* **11**, 129 (1866), *Papers IV*, p. 120, *V*, p. 401.

Die Einteilung der einfachen linearen wenigstens ∞^3-fachen Systeme von Kurven des Geschlechtes 3 auf einem kubischen elliptischen Kegel geht hervor aus den Arbeiten von Castelnuovo, *Torino Atti* **25**, 695 (1890); de Franchis, *Palermo Circ. Mat. Rend.* **14**, 33 (1890); Scorza, *Ann. di Mat.* (3) **16**, 255 (1909), (3) **17**, 281 (1910).

Die ebene Abbildung (§ 8) einer R_3 läßt sich nach Clebsch, *J. f. Math.* **67**, 17 (1867) so ausführen, daß die Bilder der ebenen Schnittkurven Kegelschnitte werden, welche durch einen festen Punkt P gehen und eine feste Gerade d in Punktepaaren einer gegebenen Involution schneiden. Diese Punktepaare sind die Bilder der Punkte auf der doppelten Leitlinie, während der Punkt P das Bild der einfachen Leitlinie wird. Die Erzeugenden von R_3 haben zu Bildern die durch P gehenden Geraden, die Torsallinien insbesondere die Geraden, die aus P die Doppelpunkte E, F der Involution auf d projizieren.

Wie Clebsch, *Math. Ann.* **5**, 421 (1872) bemerkt hat, kann man zu dieser Abbildung auf einfache Art gelangen, indem man ähnlich wie bei einer allgemeinen F_3 (§ 8) eine Gerade sich so bewegen läßt, daß sie zwei feste Erzeugende von R_3 trifft und zur Bildebene eine Ebene durch die doppelte Leitlinie wählt.

Die verschiedenen Klassen von Kurven auf R_3 kann man durch das folgende einfache Verfahren finden, das von Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 634 (1869) herrührt und von Bertini, *Introduzione alla*

geometria proiettiva degli iperspazii, Pisa 1907, p. 298, wieder benutzt ist, wo die R_3 durch Projektion der kubischen Normalregelfläche eines vierdimensionalen Raumes gewonnen wird. Wenn γ' eine Kurve von der Ordnung n der Bildebene π ist, die α-mal durch P geht, so daß die abgebildete Kurve γ die doppelte Leitlinie d in n Punkten und die einfache Leitlinie e in α Punkten trifft, so lassen sich die Kurven auf R_3 in Gattungen (n, α) einteilen, da sich als Grenzfälle der allgemeinen Kurven die Kurven γ ansehen lassen, die wirkliche mehrfache Punkte erhalten, indem entweder γ' außerhalb P einen mehrfachen Punkt bekommt oder durch einen oder mehrere Punktepaare der Involution auf d hindurchgeht. Setzt man

$$x = n - 2 + \alpha, \quad y = n - 1 - \alpha,$$

so daß von den Zahlen x, y notwendigerweise die eine gerade, die andere ungerade ist, dann wird die Kurvengattung (n, α) von den Kurven γ gebildet, deren Ordnung N und Geschlecht p gegeben werden durch

$$N = \frac{x + 3y + 5}{2}, \quad p = \frac{xy}{2}.$$

Für $n = 1$ sind die Kurven γ, je nachdem $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$, entweder die Erzeugenden von R_3 oder Kegelschnitte, die in einer Ebene durch eine Erzeugende liegen.

Für jeden Wert $p > 0$ erhält man eine endliche Anzahl von Kurvengattungen, indem man die Zahl $2p$ auf alle möglichen Arten in zwei Faktoren x und y zerlegt, von denen der eine gerade, der andere ungerade ist, mit der Bedingung, daß $\alpha = \frac{x - y + 1}{2}$ nicht negativ wird. Für die niedrigsten Werte von p erhält man die folgenden Kurvengattungen:

	x	y	N	n	α
$p = 1$	2	1	5	3	1
	1	2	6	3	0
$p = 2$	4	1	6	4	2
$p = 3$	6	1	7	5	3
	3	2	7	4	1
	2	3	8	4	0
$p = 4$	8	1	8	6	4
$p = 5$	10	1	9	7	5
	5	2	8	5	2

Für $p = 0$ wird $x = 0$ oder $y = 0$. Im ersten Fall findet man in π Kegelschnitte, die nicht durch P gehen und denen ∞^5 Kurven 4. Ordnung zweiter Art, von denen die Erzeugenden Bisekanten sind, entsprechen. Im zweiten Falle findet man unendlich viele Gattungen von rationalen Kurven auf R_3, die von jeder Erzeugenden in einem Punkt getroffen werden. Insbesondere erhält man für $n = 3$ eine zweite Gattung von ∞^6 Kurven 4. Ordnung zweiter Art, die jede Erzeugende in einem einzigen Punkt treffen.

Nach demselben Prinzip hat Noether, *Math. Ann.* **3**, 196 (1871) die Kurven auf den Flächen von der Ordnung n mit einer $(n-1)$-fachen Geraden eingeteilt.

Mit Hilfe der ebenen Abbildung kann man insbesondere die Haupttangentenkurven von R_3 bestimmen, wie es auf analytischem Wege Clebsch, *J. f. Math.* **67**, 17 (1867), auf rein geometrische Weise Cremona, *Ist. Lomb. Rend.* (1) **4**, 21 (1867) (reproduziert bei Bertini, a. a. O. p. 301) getan haben. Für eine allgemeine R_3 sind die Haupttangentenkurven Kurven 4. Ordnung zweiter Art, die durch die beiden Kuspidalpunkte gehen und insofern besonderer Natur sind, als sie in diesen Punkten eine Berührung 2. Ordnung mit den Torsallinien h, l zeigen. Diese Kurven werden auf R_3 von den F_2 des durch die Geraden h, l und die Verbindungslinien der Punkte hd, le und der Punkte ld, he gehenden Flächenbüschels geschnitten und haben zu Bildern die Kegelschnitte, die durch P gehen und in E, F die Geraden PE, PF berühren.

Für die Cayleysche Regelfläche sind die Haupttangentenkurven kubische Raumkurven, die durch den Kuspidalpunkt gehen und in ihm die Leitlinie zur Tangente und zur Schmiegungsebene die Ebene haben, die R_3 längs der Leitlinie berührt.

Über die ebene Abbildung und die Haupttangentenkurven einer R_3 vgl. noch Voss, *Math. Ann.* **8**, 119 (1875); B. Klein, *Diss.* Straßburg 1876; Picard, *Ann. éc. norm.* (2) **6**, 348 (1877); Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV*, 1909, S. 295.

Eine Eigenschaft der Raumkurven 4. Ordnung zweiter Art, welche die Erzeugenden der R_3 zu Bisekanten haben, hat Rosati, *Torino Atti* **35**, 12 (1899) angegeben: der Ort der Pole aller Bisekanten einer solchen Kurve bezüglich der Kegelschnitte von R_3, die durch ihre Treffpunkte gehen, ist eine Steinersche Fläche, und in dem Fall, wo die Raumkurve die beiden Kuspidalpunkte enthält, eine andere kubische Regelfläche; ist die Kurve eine Haupttangentenkurve von R_3, so fällt der Ort dieser Pole mit R_3 selbst zusammen.

Severi, *Atti Ist. Veneto* **62**[2], 863 (1903) hat vom metrischen Gesichtspunkte aus die R_3 nach ihrem Schnitt mit der unendlich fernen Ebene klassifiziert und ihre Zusammenhangseigenschaften untersucht, indem er zeigte, daß *sie alle einseitig sind mit Ausnahme einiger, die ein besonderes Verhalten zu der unendlich fernen Ebene zeigen.*

Ein Beispiel für eine einseitige allgemeine kubische Regelfläche hatte H. S. Smith mitgeteilt, vgl. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces I,* 2. éd. Paris 1914, p. 418, wo die kubischen Regelflächen als einfachstes Beispiel für einseitige algebraische Flächen angeführt werden und eine Zeichnung der Fläche mit der Gleichung $x^2(1-z) = y^2 z$ gegeben wird. Vgl. auch Delaunay, *Bull. Soc. math.* **26**, 43 (1898). Eine besondere Cayleysche Regelfläche, die zweiseitig ist, hat Dumont, *Bull. Soc. math.* **26**, 137 (1898) angegeben.

Über die einseitige sogenannte *Möbiussche kubische Regelfläche* (vgl. Bd. II[1], S. 180) s. Maschke, *Amer. M. S. Trans.* **1**, 39 (1900); Cullis, *Calcutta Bull. Math. Soc.* **1**, 9, 83, 163 (1909).

§ 17. Metrische Eigenschaften und metrische Sonderfälle.

Der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte einer F_3, deren Ebenen durch eine Gerade der Fläche gehen, ist eine Raumkurve 4. Ordnung zweiter Art, welche die Gerade in drei Punkten trifft und die fünf Berührungspunkte der fünf dreifach berührenden Ebenen, die durch die Gerade gehen, enthält. Unter diesen Kegelschnitten sind vier Parabeln und drei gleichseitige Hyperbeln. Vgl. Sturm, *Math. Ann.* **4**, 259 (1871), *J. f. Math.* **88**, 218 (1880); Picquet, *Bull. Soc. math.* **4**, 153 (1876).

Über die Schnitte einer kubischen Regelfläche mit einem Büschel paralleler Ebenen siehe Cayley, *Phil. Mag.* **25**, 528 (1863), *Papers V*, p. 110.

Mit der Bestimmung der Haupttangentenkurven einer F_3 hat sich Drach, *C. R.* **152**, 1458 (1911), *Proc. fifth intern. Congr. of Math. I,* Cambridge 1912 (1913), p. 457, beschäftigt.

Die Haupttangentenkurven der tetraedralen Flächen dritter und beliebiger Ordnung haben Lie, *Gött. Nachr.* 1870, S. 53 und Darboux, *Bull. sc. math.* (1) **1**[1], 355 (1870) bestimmt. Vgl. auch Darboux, *Leçons sur la th. gén. des surf. I,* 2. éd. Paris 1914, p. 203.

Die Haupttangentenkurven auf den F_3 der Arten XIV, XV, XVIII, XIX, XX hat Ernst, *Diss.* Göttingen, 1873, untersucht.

Der Verlauf der Haupttangentenkurven auf gewissen F_3 mit gewöhnlichem Knotenpunkte wurde untersucht von Sucharda, *Monatsh. f. Math.* **8**, 297 (1897) mit Hilfe der Methoden, die allgemein entwickelt wurden von Darboux, *Bull. sc. math.* (1) **4**[1], 158 (1873) und von v. Dyck, *Münch. Ber.* **21**, 23 (1891), **22**, 101 (1892).

Die Flächen 3. Ordnung, die durch den unendlich fernen Kugelkreis gehen, sind, zusammen mit den Flächen 4. Ordnung, die durch den Kugelkreis doppelt hindurchgehen, als *Zykliden* bezeichnet worden. Sie sind *anallagmatische* Flächen, d. h. gehen bei gewissen Transformationen durch reziproke Radienvektoren (Inversionen) in sich über. Sie wurden gefunden von Moutard, *Nouv. Ann.* (2) **3**, 306, 536 (1864); *C. R.* **59**, 243 (1864) und Darboux, *C. R.* **59**, 240 (1864), der sie ausführlich in dem Buche *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris 1873 (Neudruck 1896) behandelte. Vgl. auch Casey, *London Phil. Trans.* **161**, 585 (1871), ferner Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 448; Doehlemann, *Geometrische Transformationen II*, Leipzig 1908, S. 260 und weiter unten Kap. XXXV, § 6.

Eine Zyklide 3. Ordnung geht aus einer Zyklide 4. Ordnung hervor durch eine Inversion, deren Pol auf der Fläche liegt und liefert zusammen mit der unendlich fernen Ebene eine Zyklide 4. Ordnung.

Eine Zyklide 3. Ordnung enthält eine unendlich ferne Gerade g_∞. Legt man durch g_∞ die fünf dreifach berührenden Ebenen an die Fläche, so bilden die außerhalb der Geraden gelegenen Berührungspunkte die Pole der fünf Inversionen, welche die Fläche in sich transformieren (vgl. § 10). Die Ebenen, die durch die zehn g_∞ treffenden Geraden von F_3 gehen, sind die einzigen Ebenen, die F_3 in Kreisen schneiden.

Man erhält eine solche Fläche z. B. als Ort der Fußpunkte aller Lote, die aus einem festen Punkt auf die Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz gefällt werden. Vgl. Borgmeyer, *Diss.* München 1893; Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie I*, Leipzig 1892, S. 174.

Aus der von Loria, *Torino Mem.* (2) **36**, 199 (1885) in der Geometrie der Inversionen gegebenen Klassifikation der Zykliden gehen manche der von Schläfli aufgezählten Arten von F_3 (§ 13) hervor.

Besonderes Interesse bietet die Dupinsche Zyklide dar, welche

dadurch gekennzeichnet ist, daß sie vier Knotenpunkte besitzt und sich auch auf zweifache Weise als Hüllfläche einer Kugelschar ansehen läßt (vgl. Kap. XXXV, § 7).

Vgl. auch betreffend der dreifach orthogonalen. aus Zykliden gebildeten Systeme Darboux, a. a. O. und *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 2. éd. Paris 1910, p. 484.

Wir wollen insbesondere das dreifache orthogonale System anführen, das aus Dupinschen Zykliden 3. Ordnung besteht und untersucht wurde von W. Roberts, *C. R.* **53**, 546, 724 (1861), *J. f. Math.* **62**, 50 (1863), *Nouv. Ann.* (1) **23**, 311 (1864); Maschke, *Diss.* Göttingen 1880, und rein geometrisch von Gysel, *Diss.* Zürich 1874. Vgl. auch Darboux, *C. R.* **84**, 298 (1877), *Ann. éc. norm.* (1) **3**, 97 (1866), (2) **7**, 101, 227, 275 (1878); Wangerin, *J. f. Math.* **82**, 145 (1877). Man hat für dieses System die folgende von Roberts herrührende Konstruktion: *Legt man von einem bestimmten Punkte auf einer der Hauptachsen eines Systems von konfokalen Flächen 2. Ordnung die umschriebenen Kegel an alle diese Flächen, so erhält man als geometrischen Ort sämtlicher Berührungskurven eine Dupinsche Zyklide 3. Ordnung. Läßt man den Punkt die Achse durchlaufen, so erhält man eine Flächenschar, und wenn man ebenso mit den beiden anderen Achsen verfährt. eine dreifache Flächenschar. Diese bildet ein dreifach orthogonales System.* Vgl. hierüber auch Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, 2. éd. Paris 1910, p. 58, 256.

Dreifach orthogonale Systeme, von welchen mindestens eine Schar aus Dupinsche Zykliden 3. oder 4. Ordnung besteht, haben Darboux, *C. R.* **147**, 484, 507 (1908), **148**, 385 (1909); Paris *Mém.* **51**, n. 1, 2 (1910), *Leçons sur les systèmes orth.*, p. 499; Demoulin. *C. R.* **148**, 269 (1909); Haag, *C. R.* **149**, 905, 1352 (1909); Keraval, *Nouv. Ann.* (4) **10**, 49, 529 (1910); Fouché. *Nouv. Ann.* (4) **12**, 49, 97, 156 (1912), behandelt.

Über die Knotenpunkte einer Dupinschen Zyklide vgl. Snyder, *Annals of Math.* (1) **11**, 137 (1897).

Damit eine F_3 (orthogonal) symmetrisch bezüglich einer Ebene wird, ist notwendig und hinreichend, daß der unendlich ferne Punkt der zu der Ebene senkrechten Geraden ein Eckardtscher Punkt (§ 14) der F_3 wird. Alle Eckardtschen Flächen, insbesondere die Clebschsche Diagonalfläche, lassen sich sonach kollinear in symmetrische Flächen transformieren. Vgl. Ciani, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (4) 6^1, 399 (1890), der (von Rotationsflächen abgesehen)

fünf mögliche Arten von F_3 mit Symmetrieebenen gefunden hat, je nachdem die Fläche eine einzige Symmetrieebene oder zwei (zueinander senkrechte) oder drei (die durch dieselbe Gerade gehen und gegeneinander um 60° geneigt sind) oder die Symmetrie der dreiseitigen doppelten geraden Pyramide mit regulärer Grundfläche oder die Symmetrie des regulären Tetraeders besitzt.

Die beiden letzten Fälle hatte schon Goursat, *Ann. éc. norm.* (3) **4**, 159, 241, 317 (1887) und den letzten auch Lecornu, *Acta Math.* **10**, 201 (1887) gefunden bei ihren Untersuchungen über die Flächen, die symmetrisch für alle Symmetrieebenen eines regulären Polyeders sind. In dem letzten Fall läßt die F_3 sich in kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$Axyz + B(x^2 + y^2 + z^2) + C = 0.$$

Ihr Sylvestersches Pentaeder wird gebildet von den Seitenflächen eines regulären Tetraeders und der unendlich fernen Ebene.

Wir wollen noch insbesondere die Fläche

$$xyz = k$$

herausgreifen, von der J. A. Serret, *J. de Math.* (1) **12**, 241 (1847) und Cayley, *Quart. J.* **10**, 111 (1870), *Papers VII*, p. 330, die Krümmungslinien bestimmt haben und Appell, *Archiv Math. Phys.* **61**, 144 (1877) die Haupttangentenkurven. Vgl. auch H. Stahl, *Math. Ann.* **3**, 488 (1871); Meth, *Progr.* Berlin 1887; Schiffner, *Progr.* Wien 1900. Eine kinematische Eigenschaft der Fläche hat Floquet, *C. R.* **105**, 854 (1887) angegeben.

Über die Krümmungslinien, auch auf der allgemeineren Fläche

$$x^m y^n z^p = k,$$

vgl. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces I*, 2. éd. Paris 1914, p. 247, und *C. R.* **84**, 382 (1877), *Ann. éc. norm.* (2) **7**, 227 (1878), *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, p. 152, wo u. a. der folgende Satz bewiesen ist: *jede F_3, für die einer der 20 längs einer ebenen Kurve berührenden umschriebenen Kegel (deren Spitze paarweise in den zehn Doppelpunkten der Kernfläche liegen*, vgl. § 4) *ein triangulärer Kegel* (d. h. in der Form $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ darstellbar) *wird, läßt sich kollinear in eine andere transformieren, von welcher sich die Krümmungslinien explizit darstellen lassen.*

Über die Flächen $x^m y^n z^p = k$ und die dreifach orthogonalen Systeme, denen sie angehören, vgl. auch Combescure, *Ann. di Mat.* (1) **5**, 39 (1863).

Über die F_3 mit Symmetrieachsen s. Dumont, *Nouv. Ann.* (3) **16**, 463 (1897); *Bull. Soc. math.* **28**, 117 (1900).

Die Rotationsflächen 3. Ordnung hat ausführlich behandelt van Uven, *Archive Teyler,* (3) **8**^{6}, 407 (1904).

Über die Transformation einer F_3 durch Homologie in eine Fläche mit gegebenen Symmetrieeigenschaften s. Dumont, *Bull. Soc. math.* **25**, 235 (1897).

Besondere F_3 mit symmetrischen Umformungen (Spiegelungen) in sich treten auf bei geometrischen Darstellungen, die mit der Theorie der automorphen Funktionen verbunden sind. Vgl. Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Leipzig, *I*, 1897, S. 397, *II*, 1911, S. 298, 319, 347.

De Saint-Germain, *C. R.* **101**, 1246 (1885), *Bull. sc. math.* (2) **12**^{1}, 177 (1888) hat eine F_3 behandelt, von der alle Punkte einer Parabel Kreispunkte sind. Über die Haupttangentenkurven einer solchen F_3 s. Stouff, *Ann. éc. norm.* (3) **10**, 45 (1893).

Flächen 3. Ordnung mit Doppelpunkten haben Gale, *Bull. Amer. math. Soc.* (2) **10**, 188 (1904); Eiesland, *Am. J.* **29**, 363 (1907), **30**, 170 (1908), **33**, 1 (1911) bei Untersuchungen über „Translationsflächen" gefunden. Eine F_3 mit zwei biplanaren Punkten, welche den Ort aller Kreise bildet, die durch zwei feste Punkte gehen und eine feste Gerade treffen, hat Schiffner, *Archiv Math. Phys.* (2) **7**, 104 (1888) untersucht.

Als besonderen Fall von bereits in § 13 angeführten Sätzen haben Beltrami, *Giorn. di Mat.* (1) **1**, 217 (1863), *Opere I,* p. 84 (vgl. auch *Bologna Acc. Mem.* (3) **7**, 241 (1876), *Opere III,* p. 53) und Eckardt, *Math. Ann.* **5**, 33 (1872) das folgende Theorem gefunden:

Die Mitten der 28 geradlinigen Strecken, welche die Mittelpunkte der acht die Seitenflächen eines Tetraeders berührenden Kugeln verbinden, liegen auf einer F_3, welche die vier Ecken des Tetraeders zu Knotenpunkten hat. Dieselbe F_3 ist auch der Ort der Punkte, aus denen sich auf die Seitenflächen des Tetraeders vier Lote fällen lassen, deren Fußpunkte in einer Ebene liegen.

Dieser Ort, ebenso wie auch die Hüllfläche 3. Klasse der Ebenen, welche die vier Fußpunkte enthalten, war Steiner bereits 1845 bekannt, wie aus einem Brief von ihm an Jacobi, den Jahnke, *Archiv Math. Phys.* (3) **4**, 276 (1903) veröffentlicht hat, hervorgeht.

Dieselbe Fläche ist nach Geiser, *J. f. Math.* **69**, 201 (1868)

der Ort der Brennpunkte aller Rotationsparaboloide, die dem Tetraeder einbeschrieben sind.

Allgemeiner *beschreibt* (Geiser, a. a. O., S. 200), *wenn der eine Brennpunkte einer Rotationsfläche 2. Ordnung, die einem gegebenen Tetraeder einbeschrieben ist, eine Ebene durchläuft, der andere Brennpunkt eine F_3, welche die vier Ecken des Tetraeders zu Doppelpunkten hat.*

Über die vorher angeführten F_3 vgl. noch Handel, *Diss.* Breslau 1877; Thieme, *Zschr. Math. Phys.* **27**, 56 (1882); Kniat, *Progr. Gymn.* Rössel 1897; Bioche, *Nouv. Ann.* (4) **3**, 438 (1903); Fontené, *Nouv. Ann.* (4) **6**, 145 (1906); W. F. Meyer, *Verh. d. Math. Kongresses zu Heidelberg,* 1905, S. 332, *Arch. Math. Phys.* (3) **12**, 1 (1907); Neuberg, *Archiv Math. Phys.* (3) **11**, 225 (1907), (3) **16**, 18 (1910); W. H. Salmon, *Archiv Math. Phys.* (3) **18**, 154 (1911), (3) **21**, 309 (1913); Neuberg nennt die Fläche nach Analogie des Simsonschen Kreises in der Ebene die *Simsonsche Fläche des Tetraeders.*

Andere metrisch spezialisierte F_3 mit vier Knotenpunkten haben Lampe, *Progr.* Berlin 1870, *Archiv Math. Phys.* (3) **20**, 111 (1912); Thieme, *Zschr. Math. Phys.* **40**, 362 (1895); Egorov, *C. R.* **132**, 538 (1901); Huber, *Monatsh. f. Math.* **22**, 89 (1911) gefunden.

Flächen 3. Ordnung treten auch bei kinematischen Fragen auf. Vgl. z. B. Schoenflies, *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung*, Leipzig 1886, S. 138; Mannheim, *Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris 1894, p. 168, 248.

Eine F_3 mit vier Knotenpunkten hat Lindemann, *Math. Ann.* **7**, 96 (1874) bei der Untersuchung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers im nichteuklidischen Raum gefunden.

Eine besondere F_3 der Art XXI (§ 13) begegnete Beltrami, *Collectanea math. in memoriam D. Chelini,* Milano 1881, p. 354, *Opere III*, p. 337, bei Untersuchungen über die Rotationsachsen eines starren Systems.

Eine Cayleysche Regelfläche erhält man als Ort der Mittelpunkte aller Sehnen einer räumlichen Parabel, sie hat zu Erzeugenden die Schmiegungsstrahlen, welche die unendlich ferne Tangente der Kurve schneiden; s. Lie, *Math. Ann.* **14**, 353 (1879); Sturm, *J. f. Math.* **105**, 109 (1889), *Die Lehre v. d. geom. Verw. IV,* Leipzig 1909, S. 410.

Eine bemerkenswerte kubische Regelfläche fand W. R. Ha-

milton, *Dublin Trans.* **16**, 4 (1830) bei seinen Untersuchungen über Strahlensysteme und Plücker, *London Phil. Trans.* **155**, 756 (1865), *J. de math.* (2) **11**, 381 (1866), *Abh. I,* S. 504, *Neue Geometrie des Raumes I,* Leipzig 1868, S. 97, als Ort der Achsen aller linearen Strahlenkomplexe eines Büschels. Diese Fläche läßt sich durch eine Gleichung von der Form darstellen

$$(x^2 + y^2) z = 2 k x y$$

und heißt *Zylindroid* nach Cayleys Vorschlag: s. Ball, *Dublin Trans.* **25**, 161 (1871). Sie ist ein gerades Konoid, dessen Erzeugenden der xy-Ebene parallel sind, und wird deshalb auch als *Plückersches Konoid* bezeichnet.

Wenn d, d' die Leitlinien der Strahlenkongruenz sind, welche die Strahlenkomplexe des Büschels gemein haben, und $\varDelta$ ihre gemeinsame Normale, so treffen alle Erzeugenden des Zylindroids die Gerade $\varDelta$ unter rechtem Winkel. Die doppelte Leitlinie der Regelfläche ist $\varDelta$, und der unendlich ferne Strahl der Kongruenz bildet ihre einfache Leitlinie.

Vgl. Picquet, *Bull. Soc. math.* **14**, 68 (1886); d'Ocagne, *Arch. Math. Phys.* (3) **1**, 159 (1901); Adler, *Wien. Sitzgsb.* **113**, 431 (1904); Jolles, *Math. Ann.* **63**, 337 (1907); Reye, ebenda, **69**, 550 (1910); Mohrmann, ebenda, **73**, 584 (1913); außerdem Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie I,* Leipzig 1892, S. 150; Reye, *Geom. d. Lage II,* 4. Aufl. 1907, S. 134, 287; Darboux, *Leçons sur la th. gen. des surf. I*, 2. éd. Paris 1914, p. 94 ff.

Ball hatte bemerkt, daß die Projektionen eines beliebigen Punktes des Raumes auf die Erzeugenden des Zylindroids eine ebene Kurve, nämlich eine Ellipse bilden. Appell, *Revue de math. spéciales* **5**, 129 (1895) hat darauf bewiesen, daß umgekehrt das Zylindroid das einzige gerade Konoid von dieser Eigenschaft ist, ferner *Bull. Soc. math.* **28**, 261 (1900), daß *es mit Ausnahme der Zylinder die einzige reelle analytische Regelfläche ist, die diese Eigenschaft besitzt.* Vgl. auch Bricard, *Bull. Soc. math.* **29**, 18 (1901); Demoulin, *Bull. Soc. math.* **29**, 39 (1901).

Keraval, *Bull. sc. math.* (2) **33**[1], 138 (1909), *Nouv. Ann.* (4) **10**, 49, 529 (1909) hat als *Cayleyschen Punkt* einer Regelfläche einen Punkt bezeichnet, der die Eigenschaft hat, daß die Fußpunkte der aus ihm auf die Erzeugenden der Regelfläche gefällten Lote eine ebene Kurve bilden, und insbesondere die Flächen untersucht, die wenigstens drei Cayleysche Punkte besitzen.

Die Bedeutung des Zylindroids für das Problem der Zusammensetzung der an einem starren Körper angreifenden Kräfte wurde zuerst von Battaglini, *Napoli Rend. Acc. sc.* **8**, 130 (1869), *Giorn. di Mat.* (1) **10**, 180 (1872) erkannt; es spielt eine große Rolle in der *Schraubentheorie* von Ball, *Dublin. Trans.* **25**, 157 (1871). Vgl. die zusammenfassende Darstellung R.St. Ball, *The theory of Screws*, Dublin 1876 [Auszug *Math. Ann.* **9**, 541 (1876), und die Bearbeitung von Gravelius, *Theoretische Mechanik starrer Systeme,* Berlin 1889], und namentlich Ball, *A treatise on the theory of Screws*, Cambridge 1900, wo am Schluß eine Übersicht über die Literatur gegeben ist, W. Fiedler, *Vierteljahrsschr. Zürich* **21**, 186 (1876); *J. de math.* (3) **4**, 141 (1878); Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte,* 2. Aufl. Leipzig *I*, 1879, S. 298; *II,* 1880, S. 211; Schönflies, a. a. O., S. 158; Mannheim, a. a. O., p. 258; Koenigs, *Leçons de cinématique*, Paris 1897, p. 458; Zindler, *Liniengeometrie,* Leipzig *I*, 1902, S. 283; Study, *Geometrie der Dynamen,* Leipzig 1903, S. 57, 320, 338, 345, 366, 455, 464, 477, 522; Timerding, *Geometrie der Kräfte,* Leipzig 1908, S. 158, 176.

Eine Bibliographie des Zylindroids haben Wölffing und Lampe, *Arch. Math. Phys.* (3) **2**, 228 (1902) zusammengestellt.

Eine kubische Regelfläche, welche dem Zylindroid analog, aber allgemeiner ist, tritt bei der Theorie der Rotationsachsen eines starren Systems auf; vgl. Beltrami, *Coll. math. in mem. D. Chelini,* p. 359; *Opere III,* p. 340, wo auch Arbeiten von Chelini und Turazza zitiert werden.

Kapitel XXXV.

Besondere Flächen vierter Ordnung.

Von *H. E. Timerding* in Braunschweig.

§ 1. Rationale Flächen. Flächen mit Knotenpunkten.

Die Flächen 4. Ordnung sind bereits so vielgestaltig, daß weniger ihre allgemeine Behandlung als die Auswahl besonders bemerkenswerter Arten erstrebt worden ist. Wir wollen uns darauf beschränken, das Elementarste und Wesentlichste anzuführen.

Vor allem heben sich die *rationalen* F_4 heraus. Dies sind die Flächen, deren Punkte sich als ganze homogene Funktionen dreier Parameter darstellen lassen, d. h. wenn man diese Parameter als homogene Koordinaten eines Punktes in einer Ebene deutet, die sich auf einer Ebene derart eindeutig abbilden lassen, daß ihren ebenen Schnittkurven die Kurven eines homoloidischen Kurvenkomplexes in der Bildebene entsprechen.

Zunächst ergibt sich, daß *alle Flächen 4. Ordnung mit einer mehrfachen Linie rational sind.* Außerdem ist sofort klar, daß eine F_4 *mit dreifachem Punkt* durch einfache Projektion aus diesem Punkte auf eine Ebene eindeutig abgebildet werden kann.

Ferner fanden Cremona, *Gött. Nachr.* 1871, 129, *Math. Ann.* **4**, 213 (1871), *Collect. math. in mem. Dom. Chelini,* Milano 1881, p. 413; Noether, *Gött. Nachr.* 1871, p. 267, daß sich eine F_4 mit Selbstberührungspunkt durch Kurven 6. Ordnung mit 7 doppelten und 4 einfachen Grundpunkten auf eine Ebene abbilden läßt.

Endlich zeigte Noether, *Math. Ann.* **33**, 546 (1889), daß außer diesen Flächen nur noch zwei Arten rationaler F_4 existieren, nämlich:

1. eine Fläche von der Gleichungsform

$$B_1^2 x_4^2 + 2[B_1 x_3(x_3 + C_1) + B_3] x_4 + x_3^4 + 2x_3^2 C_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4 = 0,$$

wo die B und C Binärformen der Koordinaten x_1, x_2 von der Ordnung ihres Index bezeichnen (die Abbildung geschieht durch Kurven 7. Ordnung mit einem dreifachen und neun doppelten Grundpunkten),

2. eine Fläche von der Gleichungsform

$$x_1^2 x_4^2 + 2[x_3 x_1 D_1 + B_3] x_4 - x_3^3 x_1 + x_3^2 C_2 + x_3 C_3 + C_4 = 0,$$

wo wieder die B, C, D Binärformen von x_1, x_2 bedeuten (die Abbildung geschieht durch Kurven 9. Ordnung mit acht dreifachen, einem doppelten und einem einfachen Grundpunkt).

Vgl. hierzu Jung, *Ann. di Mat.* (2) **15**, 277 (1887); Montesano, *Napoli Acc. Rend.* (3) **6**, 158 (1900).

Die Flächen 4. und 5. Ordnung mit einer endlichen Anzahl von geraden Linien bestimmte R. Sturm, *Math Ann.* **4**, 249 (1871). Die F_4 mit Doppelpunkten unterzog Cayley einer systematischen Betrachtung: *Lond. Math. Soc. Proc.* (1) **3**, 19, 198, 234, 281 (1871), *Papers VII*, p. 133, vgl. ebenda p. 256, 264. Er fand, daß *nicht mehr als 7 Doppelpunkte einer F_4 willkürlich angenommen werden können.*

Eine Anzahl der wichtigsten F_4 mit Doppelpunkten behandelte *Kummer* in seinen verschiedenen Arbeiten: *Berl. Monatsber.* 1864, p. 216, 246, ebenda 1872, p. 474, *Berl. Abh.* 1866 (*Algebraische Strahlensysteme*).

Es lassen sich besonders herausheben:

1. Flächen 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkt (Monoide), deren Gleichungsform lautet

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) \cdot x_4 = \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Diese sind von Rohn, *Math. Ann.* **24**, 55 (1884) in einer besonderen großen Arbeit behandelt worden.

2. F_4 mit zwei Selbstberührungspunkten (Kummer, *J. f. Math.* **64**, 71 (1865)). Alle Ebenen durch diese Punkte schneiden die Fläche in Paaren sich berührender Kegelschnitte. Diese Kegelschnitte fallen für vier singuläre Tangentialebenen zusammen. Die Gleichung der Fläche ist von der Form

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)^2 = f_4(x_1, x_2).$$

3. F_4 mit vier uniplanaren Doppelpunkten. Die Gleichungsform lautet

$$(a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{14} x_1 x_4 + a_{23} x_2 x_3 + a_{24} x_2 x_4 + a_{34} x_3 x_4)^2 - 4 a x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

3. Eine F_4 *mit sechs Doppelpunkten,* die von den Spitzen der durch diese Punkte gehenden Kegel erfüllt wird. Diese Fläche heißt die *Weddlesche Fläche* nach Weddle, *Cambr. Dubl. Math. J.* **5** (1850), Cayley, *C. R.* **52**, 1216 (1861), *Lond. Math. Soc. Proc.* (1) **3**, 67 (1870), *Papers VII,* 133, nennt sie die *Jacobische Fläche der sechs Punkte.* Nach Hierholzer, *Math. Ann.* **2**, 583 (1870), **4**, 172, (1871), läßt sich der Gleichung der Fläche die Form geben:

$$\sum (a_1 - a_2)\, x_1 x_2 (a_3 x_4^2 - a_4 x_3^2) = 0,$$

wo sich die Summe auf die sechs Glieder, die aus dem angeschriebenen durch Permutation der Indices entstehen, bezieht. Auf der Fläche sind die 15 Geraden enthalten, welche die sechs Punkte paarweise verbinden, außerdem die zehn Geraden, in denen sich je zwei zusammen alle sechs Punkte enthaltende Ebenen schneiden. Ferner liegt auf der Fläche die kubische Raumkurve γ_3, welche durch die sechs Punkte bestimmt ist, und die Tangentialkegel in den sechs Doppelpunkten gehen durch diese Raumkurve hindurch. Die Punkte der Fläche ordnen sich derart paarweise einander zu, daß die Punkte eines Paares auf einer Bisekante der Kurve γ_3 liegen und durch die Kurvenpunkte auf dieser Bisekante harmonisch getrennt werden. Hiervon ausgehend hat Bateman, *Lond. Math. Soc. Proc.* (2) **3**, 225 (1905) eine (irrationale) Parameterdarstellung der Fläche gegeben. Die Parameterdarstellung der Fläche mit Hilfe von Thetafunktionen zweier Variabeln behandelten Hunyady, *J. f. Math.* **92**, 304 (1882); Caspary, *C. R.* **112**, 1356 (1891), *Bull. Sc. Math.* (2) **15**, 308 (1891); Schottky, *J. f. Math.* **105**, 238 (1889); Humbert, *J. de Math.* (4) **9**, 466 (1893).

4. F_4 mit acht assoziierten Punkten als Doppelpunkten behandelte Cayley, *Quart Journ.* **10**, 34 (1870), **11**, 111 (1870), *Papers VII,* p. 304, *VIII,* p. 25. Ihrer Gleichung läßt sich die Form geben

$$\varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_3 = 0,$$

wenn $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ die Gleichungen dreier F_3 sind, die durch die acht assoziierten Punkte hindurchgehen.

Sind $u = 0$, $v = 0$ Ebenengleichungen, so liefert die Gleichung

$$\varphi_2^2 - u^2 \varphi_1 = 0$$

insbesondere eine F_4 mit einem Doppelkegelschnitt und vier ein-

zelnen Doppelpunkten (für die $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $u = 0$ wird), ferner

$$\varphi_2^2 - u^3 v = 0$$

eine F_4 mit einem Rückkehrkegelschnitt ($\varphi_2 = 0$, $u = 0$).

5. Spezielle Berücksichtigung haben die F_4 mit zehn Doppelpunkten gefunden, deren Gleichung sich in folgender Form darstellt:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

wenn die f_{ik} lineare Formen der Punktkoordinaten bedeuten. Wird $f_{ik} = f_{ki}$, so spricht Cayley, *Lond. Math. Soc. Proc.* **3**, 44 (1870) von einem *Symmetroid.* Sind die f_{ik} die zweiten Derivierten einer kubischen Form f der Punktkoordinaten, so erhalten wir die Steinersche Kernfläche der Fläche 3. Ordnung $f = 0$. Vgl. Reye, *J. f. Math.* **82**, 54 (1877), F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 1 (1881), **20**, 254 (1882).

Die zweiten Unterdeterminanten der Determinante auf der linken Seite der Flächengleichung geben gleich Null gesetzt die zehn Doppelpunkte. Der aus einem Doppelpunkte an die F_4 gelegte Tangentialkegel, der von der 6. Ordnung sein muß, zerfällt in zwei Kegel 3. Ordnung, die sich in den neun Verbindungslinien dieses Doppelpunktes mit den übrigen schneiden.

6. Wird in der vorigen Gleichung $f_{ik} = f_{ki}$ angenommen und die Glieder $f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}$ der Hauptdiagonale fortgelassen, so hat die F_4 14 Doppelpunkte. Z. B. wird nämlich auch der Punkt $f_{12} = 0$, $f_{13} = 0$, $f_{14} = 0$ ein Doppelpunkt.

Der Flächengleichung kann dann die einfache irrationale Form gegeben werden

$$\sqrt{f_{23} f_{14}} + \sqrt{f_{31} f_{24}} + \sqrt{f_{12} f_{34}} = 0.$$

Man kann die Fläche entstehen lassen, indem man von dem F_2-Gebüsch

$$f_{14} X_1 X_4 + f_{24} X_2 X_4 + f_{34} X_3 X_4 + f_{23} X_2 X_3 + f_{31} X_3 X_1 \\ + f_{12} X_1 X_2 = 0$$

ausgeht. Da die Koeffizienten in dieser Gleichung lineare Formen von vier Parametern x_1, x_2, x_3, x_4 sind, stellt sie in der Tat ein

∞^3-faches lineares System von F_2 dar, die alle dem Koordinatentetraeder umschrieben sind. Jedem Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) ist eine solche Fläche zugeordnet. Die Punkte, denen auf diese Weise Kegel zugeordnet sind, erfüllen dann die F_4 mit 14 Doppelpunkten.

7. Eine besonders beachtenswerte Fläche mit 12 Knotenpunkten ist die *desmische Fläche,* bei der die Knotenpunkte die Ecken dreier desmischen Tetraeder bilden; vgl. Stephanos, *Darboux Bull.* (2) **3**, 424 (1879); Veronese, *Rom. Acc. Linc. Mem.* (3) **9** (1881). Die Fläche ist reziprok zu der projektiven Verallgemeinerung der Zentrafläche einer F_2. Über diese letztere s. Salmon, *Quart J.* **2**, 207 (1858); Clebsch, *J. f. Math.* **62**, 64 (1863); Cayley, *Cambr. Philos. Trans.* **12**, 319 (1873); Caspary, *J. f. Math.* **81**, 143 (1876), **83**, 72 (1877); vgl. auch Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes II*, 3. Aufl. 1880, S. 337 ff. Die desmische Fläche 4. Klasse 12. Qrdnung, welche die projektive Verallgemeinerung der Zentralfläche ist, behandelte W. Stahl, *J. f. Math.* **101**, 73 (1887).

Über die F_4 mit 13 Knotenpunkten vgl. B. Levi, *Sulle superficie del quarto ordine con 13 punti doppi,* Torino 1904.

Die F_4 mit 8 bis 16 Knotenpunkten stellte Rohn, *Leipz. Ber.* 1884, S. 52, zusammen und untersuchte später ausführlich die F_4 hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung (Preisschrift der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886).

§ 2. Die Kummersche Fläche mit 16 Doppelpunkten.

Die Höchstzahl der Doppelpunkte, welche eine F_4 erlangen kann, beträgt 16. Die Flächen K_4 mit 16 Knotenpunkten haben als Kummersche Flächen eine große Berühmtheit erlangt. Kummer hat sie besonders in den *Berl. Monatsber.* 1864, S. 246, 495 bearbeitet. Darauf untersuchten sie zunächst vor allen Klein, *Math. Ann.* **2**. 192 (1870) und Cayley, *J. f. Math.* **73**, 292 (1871), *Papers VII*, p. 126. Wie zuerst H. Weber, *J. f. Math.* **84**, 332 (1878) gefunden hat, lassen sich aus sechs der Doppelpunkte die übrigen linear konstruieren. Die Konstruktion hat dann Schröter, *J. f. Math.* **100**, 231 (1887) ausgeführt. *Man gelangt zu der Fläche, indem man die Punkte sucht, denen in der soeben* (§ 1, 6) *angegebenen Weise die Kegel des durch sechs gegebene Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmten F_2-Gebüsches entsprechen.* Die Spitzen der Kegel liegen auf der *Weddleschen Fläche,* die durch die sechs Punkte bestimmt wird. *Diese Fläche ist also auf die Kummer-*

sche Fläche K_4 Punkt für Punkt eindeutig bezogen, eine Beziehung, die Schottky, *J. f. Math.* **105**, 269 (1889) untersucht hat.

Von den *16 Doppelpunkten der Fläche K_4 entsprechen sechs, (1), (2), (3), (4), (5), (6) den sechs gegebenen Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 als den Spitzen von Kegeln, welche durch die sechs Punkte hindurchgehen, und zehn,* $\binom{123}{456}$, $\binom{124}{356}$ *usw., den zehn Ebenenpaaren, welche sich durch die sechs Punkte legen lassen.*

Durch die kubische Raumkurve γ_3, welche die sechs Punkte verbindet, und jede der 15 geraden Verbindungslinien von zweien der sechs Punkte gehen ∞^2 Flächen des Gebüschs, die jedesmal einen Bündel bilden. Diesen Bündeln entsprechen 16 Doppelebenen der Kummerschen Fläche K_4, in denen die den Flächen der Bündel entsprechenden Punkte liegen. *Diese Doppelebenen berühren K_4 längs je eines Kegelschnittes und enthalten jedesmal sechs Doppelpunkte.* Z. B. gehen durch die kubische Raumkurve γ_3 die sechs Kegel hindurch, welche aus je einem der sechs Punkte die übrigen projizieren, und die Ebene (0), die dem durch die γ_3 bestimmten F_2-Bündel entspricht, enthält sonach die den sechs Kegeln entsprechenden Doppelpunkte. Ebenso ist die Verbindungslinie (ik) in vier der zehn Ebenenpaare und auf zweien der von den Grundpunkten 1, 2, 3, 4, 5, 6 ausgehenden Kegel enthalten, die Doppelebene (ik), die der Verbindungslinie (ik) entspricht, enthält somit die sechs diesen besonderen Flächen entsprechenden Doppelpunkte.

Umgekehrt ist, wie man sofort sieht, auch *jeder Doppelpunkt in sechs der 16 Doppelebenen enthalten.*

Durch die 15 Verbindungslinien der sechs Doppelpunkte, die in einer Doppelebene liegen, geht immer noch eine Doppelebene hindurch. *Die 120 Verbindungslinien von Doppelpunkten sind mit den 120 Schnittlinien von Doppelebenen identisch.*

Die Konfiguration der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen ist vielfach untersucht worden, insbesondere von Caporali, *Rom. Acc. Linc. Mem.* **2** (1878); de Paolis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **6**², 3 (1890); H. Weber, *J. f. Math.* **84**, 345 (1876); Reye, *J. f. Math.* **86**, 84, 209 (1878); Klein, *Math. Ann.* **2**, 198 (1869), **5**, 295, **27**, 106 (1886); Ciani, *Ann. di mat.* (3) **2**, 53 (1898), *Giorn. di Mat.* **34**, 177 (1896), **36**, 68 (1898), *Ist. Lomb. Rend.* (2) **31**, 312 (1898); Martinetti, *Giorn. di Mat.* **34**, 192 (1896), **35**, 235 (1897), *Rend. Circ. Mat.* **16**, 196 (1902); Timerding, *Math. Ann.* **54**, 498 (1901); Berzolari, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **16**¹, 726 (1907), *Rend. Circ. Mat.* **24**, 1 (1907).

H. Weber hat a. a. O. zuerst auf zwei Arten von Tetraedern aufmerksam gemacht, die sich aus der Konfiguration herausheben.

Die vier Punkte (1), (2), (3), $\binom{123}{456}$ z. B. bilden ein Tetraeder, dessen Ecken Doppelpunkte und dessen Seitenflächen Doppelebenen sind, nämlich die Doppelebenen (0), (12), (13), (23). Solche Tetraeder gibt es 80. Sie heißen *azygetische* oder *Rosenhainsche Tetraeder.*

Dagegen bilden z. B. die vier Doppelebenen (0), (12), (34), (56) ein Tetraeder, von dem die Seitenflächen Doppelebenen, die Ecken aber keine Doppelpunkte sind. Die sechs Kanten des Tetraeders enthalten zusammen 12 Doppelpunkte. Die vier übrigbleibenden Doppelpunkte bilden dann das reziprok entsprechende Tetraeder, dessen Ecken Doppelpunkte, dessen Seitenflächen aber keine Doppelebenen sind, und durch dessen Kanten die 12 Doppelebenen hindurchgehen, die nach Ausschluß des ersten Tetraeders übrigbleiben. Diese Tetraeder heißen *syzygetische* oder *Göpelsche Tetraeder.* Aus den 16 Doppelpunkten und aus den 16 Doppelebenen lassen sich je 60 solche Tetraeder bilden.

Ebenso wie zwei einander reziprok zugeordnete syzygetische Tetraeder zusammen alle 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen liefern, kann man die azygetischen Tetraeder zu Gruppen von vieren anordnen, die zusammen alle 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen liefern. Eine solche Anordnung der Doppelebenen ist z. B.

(0)	(23)	(31)	(12)
(56)	(14)	(24)	(34)
(64)	(15)	(25)	(35)
(45)	(16)	(26)	(36).

Ihr entspricht die analoge Anordnung der Doppelpunkte

$$\begin{matrix} \binom{123}{426} & (1) & (2) & (3) \\ (4) & \binom{156}{234} & \binom{134}{256} & \binom{124}{356} \\ (5) & \binom{146}{235} & \binom{135}{246} & \binom{125}{346} \\ (6) & \binom{145}{236} & \binom{136}{245} & \binom{126}{345}. \end{matrix}$$

Durch denselben Doppelpunkt gehen jedesmal die sechs Doppelebenen, deren Symbole in dem quadratischen Schema eine Zeile und eine Spalte bilden, mit Ausschluß des gemeinsamen Elementes der Zeile und der Spalte. Nach der gleichen Vorschrift findet man aus dem zweiten Schema die sechs Doppelpunkte, die in einer Doppelebene liegen.

Jede Zeile und jede Spalte des ersten Schemas liefert die Seitenflächen und die analoge Zeile oder Spalte des zweiten Schemas die Ecken eines azygetischen Tetraeders.

Eine solche Anordnung der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte wird als eine *Viervier* bezeichnet.

Auf ein syzygetisches Tetraeder bezogen nimmt die Gleichung der Kummerschen Fläche die Form an:

$$\varphi^2 = 16k\, x_1 x_2 x_3 x_4,$$

wo

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ + 2a(x_2x_3 + x_1x_4) + 2b(x_3x_1 + x_2x_4) + 2c(x_1x_2 + x_3x_4)$$

und

$$k = a^2 + b^2 + c^2 - 1 - 2abc$$

(Kummer, *Berl. Monatsber.* 1864, S. 253).

Um die noch elegantere Gleichung der Fläche bezogen auf ein azygetisches Tetraeder zu erhalten, gehen wir davon aus, daß die Flächen 2. Ordnung:

$$\alpha_4(\alpha_2 - \alpha_3)x_1X_1X_4 + [\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)x_4 + \alpha_4(\alpha_1-\alpha_4)(x_2-x_3)]X_2X_3 \\ + \alpha_4(\alpha_3-\alpha_1)x_2X_2X_4 + [\alpha_2(\alpha_3-\alpha_1)x_4 + \alpha_4(\alpha_2-\alpha_4)(x_3-x_1)]X_3X_1 \\ + \alpha_4(\alpha_1-\alpha_2)x_3X_3X_4 + [\alpha_3(\alpha_1-\alpha_2)x_4 + \alpha_4(\alpha_3-\alpha_4)(x_1-x_2)]X_1X_2 = 0,$$

was auch x_1, x_2, x_3, x_4 seien, immer die sechs Punkte

$$(1,0,0,0),\quad (0,1,0,0),\quad (0,0,1,0),\quad (0,0,0,1),$$
$$(1,1,1,1),\quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

enthalten. Indem man die hieraus folgenden Werte von f_{14}, f_{23} usw. (s. § 1, Ende) in die Gleichung

$$\sqrt{f_{23}f_{14}} + \sqrt{f_{31}f_{24}} + \sqrt{f_{12}f_{34}} = 0$$

einsetzt, findet man für die Gleichung der Kummerschen Fläche:

$$\sqrt{x_1[Ax_4 + a(x_2 - x_3)]} + \sqrt{x_2[Bx_4 + b(x_3 - x_1)]} + \sqrt{x_3[Cx_4 + c(x_1 - x_2)]} = 0.$$

Hierbei ist gesetzt

$$(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_4 = a, \quad \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3)^2 = A,$$

$$(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_1)\alpha_4 = b, \quad \alpha_2(\alpha_3 - \alpha_1)^2 = B,$$

$$(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4 = c, \quad \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = C,$$

woraus $a + b + c = 0$. Cayley, *J. f. Math.* **73**, 292 (1871), *Papers VII*, p. 126, bringt diese Gleichung in die Form

$$\sqrt{ay_1\left(Cy_2 - By_3 - \frac{y_4}{a}\right)} + \sqrt{by_2\left(Ay_3 - Cy_1 - \frac{y_4}{b}\right)} + \sqrt{cy_3\left(By_1 - Ay_2 - \frac{y_4}{c}\right)} = 0,$$

indem er

$$Ax_1 : Bx_2 : Cx_3 : -ABCx_4 = y_1 : y_2 : y_3 : y_4$$

setzt. Es werden dann acht Doppelebenen der Fläche

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0, \quad \frac{y_1}{a} + \frac{y_2}{b} + \frac{y_3}{c} = 0,$$

$$Cy_2 - By_3 - \frac{y_4}{a} = 0, \quad Ay_3 - Cy_1 - \frac{y_4}{b} = 0,$$

$$By_1 - Ay_2 - \frac{y_4}{c} = 0.$$

Die übrigen Doppelebenen lassen sich nach Cayley finden, indem man

$$A = a'a'', \quad B = b'b'', \quad C = c'c'',$$

$$a' + b' + c' = 0, \quad a'' + b'' + c'' = 0$$

setzt und mit den hieraus berechneten Werten a', b', c' und a'', b'', c'' in den obigen Gleichungen die Werte a, b, c vertauscht.

Die Kummersche Fläche geht, wie Klein zuerst gefunden hat, durch 16 Kollineationen und 16 Korrelationen in sich über. Außerdem fand Klein, *Math. Ann.* **27**, 142 (1887) noch 32 Transformationen der Fläche in sich. Die Frage, ob damit alle Transformationen der Fläche in sich erschöpft sind, entschied Fano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **39**, 1071 (1906) dahin, daß es unendlich viele

solche Transformationen gibt. Er fand ferner, daß die 32 linearen Transformationen auch die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche in sich überführen. Die *Haupttangentenkurven* der Kummerschen Fläche sind Raumkurven 16. Ordnung 16. Klasse vom Geschlecht 17, vom Range 48 mit 72 scheinbaren Doppelpunkten, die 16 Spitzen in den Doppelpunkten der Fläche und 16 stationäre Ebenen in den 16 Doppelebenen der Fläche besitzen. Vgl. Klein und Lie, *Berl. Monatsber.* 1870, S. 891, *Math. Ann.* **23**, 579 (1884); Lie, *Math. Ann.* **5**, 145 (1871); Klein, ebenda, 257, 278. Die Haupttangentenkurven werden durch Flächen 4. Ordnung ausgeschnitten: Reye, *J. f. Math.* **97**, 242 (1884). Vgl. auch Segre, ebenda **98**, 301 (1885). Sechs dieser Flächen 4. Ordnung berühren die Kummersche Fläche in sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven 8. Ordnung von dem Geschlecht 5, dem Rang 24, ohne Spitzen und stationäre Ebenen, mit 16 scheinbaren Doppelpunkten.

Die *parabolische Kurve* der Kummerschen Fläche zerfällt in die Berührungskegelschnitte der 16 Doppelebenen.

Weiler, *Math. Ann.* **75**, 145 (1874) untersuchte die besonderen Fälle, wo einige der Doppelpunkte sich vereinigen.

Der Zusammenhang der Kummerschen Fläche mit den *hyperelliptischen Funktionen von zwei Veränderlichen* ist zuerst von Klein, *Math. Ann.* **5**, 302 (1872) erkannt und später vielfach behandelt worden; s. u. a. Cayley, *J. f. Math.* **83**, 210 (1877); Borchardt, ebenda, S. 234; H. Weber, *J. f. Math.* **84**, 332 (1879); Rohn, *Diss.* München 1878, *Math. Ann.* **15**, 315 (1879), **18**, 99 (1881) (hier die Untersuchnngen über die gestaltlichen Verhältnisse der Kummerschen Fläche); Reichardt, *Nova Acta*, Halle, **50**, 375, 1887; Klein, *Math. Ann.* **27**, 118 (1887); ferner Pascal, *Ann. di Mat.* (2) **18**, 227 (1890), **19**, 159 (1891), der eine sogen. „rationale Gleichung" der Kummerschen Fläche aufgestellt hat.

Eine Monographie über die Kummersche Fläche, leider ohne Literaturangaben, hat neuerdings Hudson, *Kummers quartic surface*, Cambridge 1905, geliefert.

Über den Zusammenhang der Kummerschen Fläche mit der Liniengeometrie s. Kap. XXXIX.

§ 3. Das Cayleysche Tetraedroid. Die Fresnelsche Wellenfläche.

Ein besonderer Fall der Flächen 4. Ordnung mit 16 Doppelpunkten wird durch das *Cayleysche Tetraedroid* gegeben. Bei

diesem verteilen sich die 16 Doppelpunkte zu je vier auf die Seitenflächen eines Tetraeders und bilden in diesen Seitenflächen *vier vollständige Vierecke, deren Diagonalpunkte durch die Ecken des Tetraeders gebildet werden.* Die Tangentialkegel in den einer Seitenfläche des Tetraeders angehörenden Doppelpunkten sind Tangentialkegel einer und derselben Fläche 2. Ordnung, von welcher das Tetraeder ein Poltetraeder ist. *Die Koordinaten der 16 Punkte sind von der Form:*

$$
\begin{array}{cccc}
0, & \pm a_{12}, & \pm a_{13}, & \pm a_{14}; \\
a_{21}, & 0, & \pm a_{23}, & \pm a_{24}; \\
\pm a_{31}, & \pm a_{32}, & 0, & \pm a_{34}; \\
\pm a_{41}, & \pm a_{42}, & \pm a_{43}, & 0,
\end{array}
$$

und hierbei wird $a_{ik} = a_{ki}$. Diese Tatsache hat zur Folge, daß, wenn durch zwei Paare von Doppelpunkten, die mit einer bestimmten Tetraederecke jedesmal in einer geraden Linie liegen, eine Ebene gelegt wird, diese Ebene noch ein drittes Paar von Doppelpunkten enthält. Die so gewonnenen Ebenen bilden *vier vollständige Vierflache, von denen die vier Tetraederecken die Scheitel sind,* und die Diagonalebenen dieser Vierflache werden durch die Seitenflächen des Tetraeders gebildet. Die Ebenen haben die Gleichungen

$$
\begin{array}{llll}
 & \pm a_{34} x_2 & \pm a_{42} x_3 \pm a_{23} x_4 & = 0, \\
\pm a_{34} x_1 & & \pm a_{41} x_3 \pm a_{13} a_4 & = 0, \\
\pm a_{24} x_1 \pm a_{41} x_2 & & \pm a_{12} x_4 & = 0, \\
\pm a_{23} x_1 \pm a_{31} x_2 \pm a_{12} x_3 & & & = 0,
\end{array}
$$

und bilden die 16 je 6 Doppelpunkte enthaltenden Doppelebenen der Fläche. Die Fläche selbst hat die Gleichung

$$
\begin{array}{ccccc}
 & x_1 & & & \\
x & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14}^2 \\
 & a_{21}^2 & & a_{23} & a_{24}^2 \\
 & & a_{32}^2 & 0 & a_{34}^2 \\
x & & & a_{43} & 0
\end{array} = 0,
$$

d. h. eine in $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$ quadratische Gleichung.

Auf dem Tetraedroid liegen zwei Scharen von Raumkurven 4. Ordnung erster Art, die das Grundtetraeder zum Poltetraeder haben. Jede Raumkurve der einen Schar liegt mit jeder der anderen Schar auf einer das Tetraedroid achtfach berührenden F_2'.

Das Tetraedroid läßt sich mit Hilfe elliptischer Funktionen in der folgenden Form darstellen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 =$$
$$sn(k, u)\, dn(\lambda, v) : cn(k, u)\, cn(\lambda, v) : dn(k, u)\, sn(\lambda, u) : 1.$$

Die Kurvenscharen $u =$ const. und $v =$ const. sind dann die eben genannten Scharen von Raumkurven 4. Ordnung.

Das Tetraedroid wurde von Cayley in einer Abhandlung *Sur la surface des ondes, J. de Math.* **11**, 291 (1846), *Papers I*, p. 302 gefunden und weiter untersucht *J. f. Math.* **65**, 284 (1866), **87**, 161 (1879), hier als Spezialfall der allgemeinen Kummerschen Fläche. Aus einer einfachen Raumtransformation leitete es Timerding, *Ann. di mat.* (3) **1**, 95 (1898) her.

Ein metrischer Speziallfall des Tetraedroids, bei dem aber nur vier Doppelpunkte reell sind, ist die *Fresnelsche Wellenfläche*, auf welche Fresnel bei der Untersuchung der Fortpflanzung des Lichtes in doppeltbrechenden Medien stieß: *Paris Acad. Mém.* **7**, 126 (1827). Die Fläche wurde dann viel behandelt, so von Ampère, *Ann. Chim. Phys.* **39**, 113 (1828); Cauchy, *Exercices de math. V* (1830), *Œuvres* (2) *IX*, p. 438 ff., *C. R.* **13**, 319 (1841), *Œuvres* (1) *VI*, p. 284 (1888); Plücker, *J. f. Math.* **19**, 1, 91 (1839). Ein ausführliches Literaturverzeichnis findet man bei G. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche*, Torino 1896, p. 114 f. Vgl. Salmon-Fiedler, *Geom. des Raumes II*, 3. Aufl. Leipzig 1880, S. 323 ff.

Fresnel hatte die Fläche erzeugt, indem er auf den Zentralschnitten eines Ellipsoids im Mittelpunkt Lote errichtete und auf ihnen die Achsenlängen der Schnittellipse abtrug. So hatte er die Gleichungsform abgeleitet:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2)$$
$$- [a^2(b^2 + c^2) x^2 + b^2(c^2 + a^2) y^2 + c^2(a^2 + b^2) z^2] + abc = 0$$

oder

$$\frac{\quad}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z} \qquad + \frac{\quad}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} \quad 1.$$

Die Fläche schneidet die Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in Paaren von Kegelschnitten (einer Ellipse und einem Kreis),

ebenso die unendlich ferne Ebene, wobei eine der Kurven der unendlich ferne Kugelkreis wird. Die vier reellen Doppelpunkte ergeben sich, wenn $a^2 > b^2 > c^2$, für

$$x = \pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Führt man in die Flächengleichung, von der Gleichung

$$ux + vy + wz = 1$$

für die Tangentialebene ausgehend, Ebenenkoordinaten ein, so erhält man die Tangentialgleichung der Fläche

$$\frac{u^2}{a^2(u^2+v^2+w^2)-1} + \frac{v^2}{b^2(u^2+v^2+w^2)-1} + \frac{w^2}{c^2(u^2+v^2+w^2)-1} = 0,$$

woraus man sofort sieht, daß die Fläche von der 4. Klasse ist.

Die konfokalen Kegel

$$\frac{a^2x^2}{\varrho^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{\varrho^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{\varrho^2-c^2} = 0$$

schneiden aus der Wellenfläche zwei Scharen von Raumkurven 4. Ordnung erster Art aus, von denen die eine Schar auf den Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, die andere auf den Ellipsoiden

$$\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{c^2a^2} + \frac{z^2}{a^2b^2} = \frac{1}{\varrho^2}$$

liegt. Für

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \sigma^2$$

erhält man die (irrationale) Parameterdarstellung der Fläche:

$$\sqrt{\frac{(\varrho^2-a^2)(\sigma^2-b^2c^2)}{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}},$$

$$y = \sqrt{\frac{(\varrho^2-b^2)(\sigma^2-c^2a^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\varrho^2-c^2)(\sigma^2-a^2b^2)}{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}}.$$

Daraus ist die von H. Weber, *J. f. Math.* **84**, 332 (1878) gegebene Darstellung durch elliptische Funktionen sofort abzuleiten.

Vgl. Cayley, *Quart. Journ.* **3** (1860), *Ann. di mat.* (2) **20**, 1 (1892), *Papers IV*, p. 420, 432; ferner Böklen, *Zschr. Math. Phys.* **24**, 400 (1879), **25**, 346 (1880), **27**, 160 (1882); Darboux, *C. R.* **97**, 1133 (1882); Lacour, *Nouv. Ann.* (3) **17**, 266 (1898).

Die Krümmungslinien auf der Wellenfläche behandelten bereits Combescure, *Ann. di Mat.* (1) **2**, 278 (1859); Brioschi, ebenda p. 285.

Flächen 4. Ordnung, welche sich auf mehreren Arten als Tetraedroid ansehen lassen, behandelten Rohn, *Leipz. Ber.* 1884, p. 10; Segre, ebenda, p. 132. Vgl. auch Bertini, *Lond. Ist. Rend.* (2) **29**, 566 (1896).

§ 4. Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden.

Auf die Flächen 4. Ordnung mit einer Doppelgeraden oder einem Doppelkegelschnitt kam zuerst Kummer, *Berl. Monatsber.* 1863, S. 324, *J. f. Math.* **64**, 66 (1865), indem er die F_4 bestimmte, auf denen Scharen von Kegelschnitten liegen. Ausführlicher hat die F_4 mit einer Doppelgeraden dann Clebsch, *Math. Ann.* **1**, 260 (1868) behandelt. Vgl. auch Noether, *Math. Ann.* **3**, 175 (1871).

Für die Gleichung der Fläche fand Kummer die Form

$$\varphi x_1^2 + 2\chi x_1 x_2 + \psi x_2^2 = 0,$$

wenn φ, χ, ψ quadratische Formen der Punktkoordinaten bedeuten.

Die Kegelschnitte, die in den Ebenen durch die Doppelgerade ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) liegen, werden durch die Gleichungen gegeben:

$$(a) \quad x_2 = \lambda x_1, \quad (b) \quad \varphi + 2\lambda\chi + \lambda^2\psi = 0.$$

Sie werden ein Geradenpaar, wenn die Ebene (a) die Fläche 2. Ordnung (b) berührt. Stellt man hierfür die analytische Bedingung auf, so erhält man eine Gleichung achten Grades für λ und damit *16 Gerade auf der F_4*.

Je sieben windschiefe Gerade auf der Fläche werden zusammen mit der Doppelgeraden von einem Kegelschnitt getroffen, der ganz auf der Fläche liegt und noch eine achte Gerade der Fläche trifft. Man findet so außer der Schar von Kegelschnitten, welche die Doppelgerade zweifach schneiden, noch *128 einzelne Kegelschnitte, welche die Doppelgerade einfach treffen.*

Sie liegen zu je zweien in 64 dreifach berührenden Ebenen.

Zwei so einander zugeordnete Kegelschnitte treffen zusammen alle 16 einfachen Geraden der Fläche.

Jeder der Kegelschnitte wird von 28 anderen doppelt geschnitten, mit denen zusammen er dieselben zwei Geraden trifft, von 70 anderen Kegelschnitten einfach, mit denen zusammen er dieselben vier Geraden trifft, von 28 Kegelschnitten gar nicht, mit denen zusammen er dieselben sechs Geraden trifft.

Die Fläche läßt sich derart auf eine Ebene abbilden, daß den ebenen Schnittkurven in der Bildebene ein Komplex von Kurven 4. Ordnung mit einem doppelten und acht einfachen Grundpunkten entspricht. Die Doppelgerade wird abgebildet durch eine k_3, die durch die neun Grundpunkte hindurchgeht. Demselben Punkt der Doppelgeraden entsprechen immer zwei Punkte dieser Kurve, die mit dem doppelten Grundpunkt in einer Geraden liegen.

Unter den möglichen Spezialfällen ist der Fall besonders bemerkenswert, wo die Doppelgerade eine Rückkehrkante wird. Die Fläche ist dann nur von der 12. Klasse, während sie im allgemeinen Fall von der 20. Klasse ist.

Auf eine F_4 mit Doppelgerade und acht einzelnen Doppelpunkten kam J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes I*, Leipzig, 1868, S. 168 f., von der Liniengeometrie aus. Vgl. auch Klein, *Math. Ann.* **2**, 371 (1869); Cayley, *Lond. M. S. Proc.* **3**, 281 (1871). Es gibt dann vier Ebenenpaare, welche die acht Punkte, jede Ebene vier von ihnen, enthalten. Durch die Doppelgerade gehen vier Ebenen, welche die F_4 längs einer Geraden berühren. Diese Gerade enthält jedesmal zwei der acht Doppelpunkte. Die Fläche ist von der 4. Klasse.

§ 5. Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt.

Die Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt hat nach Kummer besonders Clebsch, *J. f. Math.* **69**, 142, 355 (1868) behandelt. Von anderen Arbeiten vgl. Geiser, *J. f. Math.* **70**, 249 (1869); Cremona, *Ist. Lomb. Rend.* 1871, 140, 159; Korndörfer, *Math. Ann.* **1**, 592 (1869), **2**, 41 (1870). Der Gleichung der Fläche läßt sich die Form geben

$$\varphi^2 - 4x_4^2\psi = 0,$$

wenn φ, ψ wieder quadratische Formen der Punktkoordinaten bedeuten. Der Doppelkegelschnitt wird gegeben durch $\varphi = 0$, $x_4 = 0$. Gibt man der Flächengleichung die Form

$$(\varphi + 2\lambda x_4^2)^2 - 4(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 x_4^2)x_4^2 = 0,$$

so erkennt man sofort, daß die Flächen 2. Ordnung

$$\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 x_4^2 = 0$$

die F_4 längs Raumkurven 4. Ordnung berühren. Unter diesen F_2 sind fünf Kegel, deren Seitenlinien sämtlich die F_4 doppelt berühren, und die zusammen die doppelt berührende abwickelbare Fläche der F_4 bilden. Diese fünf Kegel heißen die *Kummerschen Kegel.*

Die Tangentialebenen der Kummerschen Kegel berühren die F_4 doppelt und schneiden sie in Paaren von Kegelschnitten. *Es gehen also durch einen allgemeinen Punkt zehn Ebenen, die aus der Fläche Paare von Kegelschnitten ausschneiden.*

Die acht Tangentialebenen eines der fünf Kegel, welche die F_4 dreifach berühren, enthalten außer einem Kegelschnitt ein Geradenpaar. Man erhält so 40 dreifach berührende Ebenen und auf fünf verschiedenen Arten dieselben *16 Geraden auf der* F_4. *Diese berühren alle fünf Kummerschen Kegel.* Ihre Bestimmung hängt von einer Gleichung 5. Grades und vier quadratischen Gleichungen ab.

Jede der 16 Geraden wird von fünf der übrigen geschnitten, von zehn nicht.

Aus den 16 Geraden lassen sich zwei verschiedene Arten von Quadrupelpaaren, *Doppelvieren* herausgreifen:

Bei den *20 Doppelvieren 1. Art* trifft jede Gerade des einen Quadrupels drei Gerade des anderen Quadrupels, während die Geraden desselben Quadrupels sich nicht schneiden. Die Quadrupel von irgend zwei Doppelvieren haben je zwei Gerade gemein. Irgend zwei windschiefe Gerade aus den 16 Geraden der Fläche gehören zu drei solchen Doppelvieren.

Von den *40 Doppelvieren 2. Art* gehört eine zu jedem Paar sich schneidender Geraden auf der Fläche. Sie besteht aus den windschiefen Quadrupeln von Geraden, welche die eine Gerade des Paares treffen, die andere dagegen nicht. Jede Gerade des einen Quadrupels einer Doppelvier trifft drei Geraden des zugeordneten Quadrupels.

Die Konfiguration der 16 Geraden und 40 dreifach berührenden Ebenen wurde eingehend untersucht von Berzolari, *Ann. di mat.* (2) **13**, 81 (1885); Pereno, ebenda **21**, 57 (1893).

Auf dem Doppelkegelschnitt liegen im allgemeinen vier Kus-

pidalpunkte, die Tangentialebenen in ihnen gehen durch einen Punkt (die Spitze des Kegels von der Gleichungsform

$$\varphi + 2\lambda x_4^2 = 0).$$

Die anderswo berührenden Tangenten, die man von einem Punkte P des Doppelkegelschnittes an die Fläche legen kann, erfüllen einen allgemeinen Kegel 4. Grades. Die 28 Doppeltangentialebenen dieses Kegels werden gebildet von den beiden Tangentialebenen der F_4 im Punkte P, den zehn Tangentialebenen der Kummerschen Kegel, die durch P gehen, und den 16 Ebenen, welche aus P die Geraden der Fläche projizieren.

Clebsch hat die Behandlung der Fläche auf ihre ebene Abbildung gegründet. Bei dieser Abbildung werden die ebenen Schnitte der Fläche durch Kurven 3. Ordnung mit fünf gemeinsamen Punkten dargestellt, unter denen eine dem Doppelkegelschnitt der Fläche entspricht. Von den 16 Geraden der Fläche entsprechen fünf diesen Grundpunkten, zehn ihren geraden Verbindungslinien und die letzte dem durch sie gelegten Kegelschnitt. Die zehn Kegelschnittscharen entsprechen den Geraden, die durch je einen Grundpunkt, und den Kegelschnitten, die durch je vier Grundpunkte gehen. Jedem Kegelschnitte, der durch vier Grundpunkte geht, ist eine bestimmte Gerade durch den fünften Grundpunkt zugeordnet, derart, daß wir so die Bilder zweier Kegelschnitte der F_4, die in derselben Ebene liegen, erhalten. Die Zuordnung wird jedesmal dadurch gegeben, daß die Gerade und der Kegelschnitt sich in zwei Punkten einer bestimmten Kurve 3. Ordnung schneiden, die durch die fünf Grundpunkte hindurchgeht. Die so gewonnenen fünf Kurven 3. Ordnung entsprechen den Berührungskurven 4. Ordnung der fünf Kummerschen Kegel.

Zeuthen, *Om Flader af fjerde Orden med Dobbelt-Keglesnit*, Festschrift Kopenhagen 1879, italienische Übersetzung von Loria, *Ann. di mat.* (2) **4**, 31 (1887), hat die allgemeine Untersuchung der Flächen mit ihrer Einteilung in sechs Typen verknüpft. Bei einem Typus sind die fünf Kummerschen Kegel, die zehn Kegelschnittsysteme und die 16 Geraden der Fläche reell.

Der besondere Fall, wo der Doppelkegelschnitt ein Kuspidalkegelschnitt wird, wurde behandelt von Cremona, *Bologna Acc.* (3) **2**, 117 (1812); Tötössy, *Math. Ann.* **19**, 291 (1882). Die Fläche besitzt dann nur zwei Quadrupel von Geraden, die in je einer Ebene liegen. Auf der Schnittlinie dieser Ebenen liegen die Spitzen der drei Kummerschen Kegel, die in diesem Fall existieren. Sie projizieren alle drei den Kuspidalkegelschnitt.

Wird der Doppelkegelschnitt ein Paar sich schneidender Geraden, so läßt sich, wenn man für die Gleichungen dieser Geraden die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ nimmt, der Gleichung der Fläche die Gestalt geben:

$$x_1^2 x_2^2 + 2m x_1 x_2 x_3 x_4 + \varphi x_4^2 = 0,$$

wo φ wieder eine quadratische Form der Punktkoordinaten bedeutet. Von den 16 einfachen Geraden der Fläche treffen dann acht die eine und acht die andere Doppelgerade. Die acht Geraden, welche dieselbe Doppelgerade treffen, schneiden sich paarweise, und je vier windschiefe unter ihnen werden von einer der acht übrigen Geraden getroffen.

Von den fünf Kummerschen Kegeln reduziert sich einer auf die beiden Doppelgeraden, indem man diese als ein Paar von Ebenenbüscheln betrachtet.

Auf jeder der beiden Doppelgeraden liegen zwei Kuspidalpunkte.

Die Flächen 4. Ordnung mit einer Doppelkurve 2. Ordnung können höchstens vier isolierte Doppelpunkte besitzen. Die Haupttangentenkurven auf den F_4 mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden und vier isolierten Doppelpunkten hat neuerdings untersucht Lackner, *Wien. Sitzungsber.* **121**, II^a (1912).

Segre, *Math. Ann.* **24**, 313 (1884) hat die F_4 mit Doppelkegelschnitt behandelt als die Projektionen des Schnittes zweier quadratischen Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen in einem Raum von vier Dimensionen und die vollständige Klassifikation der F_4 mit irreduziblem oder reduziblem Doppel- oder Kuspidalkegelschnitt angegeben.

§ 6. Zykliden.

Von besonderer Bedeutung sind die Flächen 4. Ordnung, welche den unendlich fernen Kugelkreis zur Doppelkurve haben, die sogenannten *Zykliden.* Die allgemeine Theorie dieser Flächen wurde begründet von Casey, *Phil. Trans.* **161**, 585 (1871), *Lond. M. S. Proc.* **19**, 496 (1871) und weiter ausgeführt von G. Darboux, *C. R.* **68**, 1311 (1871), *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* Paris 1873, 2. Aufl. 1896, ferner von Laguerre, *Œuvres II,* Paris 1905, p. 41, 54; Humbert, *J. éc. polyt.* **55**, 127 (1885); Loria, *Torino Acc. Mem.* (2) **36**, (1884).

Man kann diese Flächen dadurch definieren, daß sie von jedem Kreis in vier (veränderlichen) Punkten getroffen werden. Ihre Gleichung in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten x, y, z ist, wenn man $s = x^2 + y^2 + z^2$ setzt, zunächst von der Form

$$F_2(x, y, z, s) = 0,$$

wobei F_2 eine allgemeine Funktion 2. Ordnung bezeichnet. Dieser Gleichung läßt sich aber, wenn sie von der 4. Ordnung ist, also s^2 enthält, die Form geben

$$s^2 + F_2(x, y, z) = 0.$$

Wesentlich eleganter wird die Darstellung, wenn man allgemeine *pentasphärische Koordinaten* s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 einführt; diese s_i sind quadratische Funktionen der Punktkoordinaten, die gleich Null gesetzt Kugeln darstellen. Ist von diesen fünf Kugeln insbesondere jede zu den vier anderen orthogonal, wobei notwendigerweise mindestens eine imaginär wird, so spricht man von *orthogonalen pentasphärischen Koordinaten* und kann dann eine identische Beziehung

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 = 0$$

annehmen. Dies ist z. B. der Fall, wenn

$$s_1 = 2rx, \quad s_2 = 2ry, \quad s_3 = 2rz, \quad s_4 = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$
$$s_5 = i(x^2 + y^2 + z^2 + r^2)$$

gesetzt wird. Drei der fünf Kugeln sind dann insbesondere (zueinander senkrechte) Ebenen, deren Schnittpunkt den gemeinsamen Mittelpunkt der Kugeln $s_4 = 0$, $s_5 = 0$ bildet; die erste dieser Kugeln hat den Radius r, die zweite den Radius ir.

In solchen pentasphärischen Koordinaten läßt sich jede Zyklide durch eine *homogene* quadratische Gleichung darstellen. Insbesondere läßt sich ihre Gleichung, wie Darboux gezeigt hat, immer und im allgemeinen auf eine einzige Art bei Verwendung orthogonaler Koordinaten in die Form bringen

$$\sum (a_i + \varrho) s_i^2 = 0,$$

wobei, da $\sum s_i^2 \equiv 0$, ϱ willkürlich bleibt.

Die fünf diesem Koordinatensystem zugrunde liegenden Kugeln haben die besondere Eigenschaft, daß *die Fläche durch Inversion in bezug auf sie in sich übergeht.* Die Flächen werden wegen dieser

Eigenschaft von Moutard, *Nouv. Ann.* (2) **3**, 306, 536 (1864) als *anallagmatische Flächen* bezeichnet. *Umgekehrt ist jede anallagmatische Fläche 4. Ordnung eine Zyklide.*

Zu jeder der fünf Fundamentalkugeln sind ∞^2 Kugeln orthogonal, welche die Zyklide doppelt berühren und deren Mittelpunkte jedesmal auf einer Fläche 2. Ordnung, einer Leitfläche der Zyklide, liegen.

Unter den ∞^2 Kugeln sind ∞^1 Ebenen. Diese gehen durch den Mittelpunkt der zugehörigen Fundamentalkugel und sind zu den einzelnen Seitenlinien des Asymptotenkegels der zugehörigen Leitfläche (also auch zu den Regelstrahlen dieser Fläche) *senkrecht. Sie umhüllen also selbst einen Kegel 2. Grades. Die fünf Kegel, die man so erhält, sind nichts anderes wie die Kummerschen Kegel.*

Die Schnitte dieser doppelt berührenden Ebenen mit der Zyklide bestehen aus Paaren von Kreisen. Man erhält so *zehn Kreisscharen auf der Fläche, welche aber nie alle reell sind.*

Die fünf Leitflächen der Zyklide sind konfokal. Die Fokalkurven dieser konfokalen Flächen werden auch als die *ebenen* (singulären) *Fokalkurven* der Zyklide bezeichnet (vgl. Kap. XXVII). Sie lassen sich ansehen als die Doppellinien der abwickelbaren Fläche, welche der Zyklide längs ihrer unendlich fernen imaginären Doppelkurve umschrieben ist.

In einem anderen Sinne lassen sich als *sphärische Fokalkurven* der Zyklide die Kurven bezeichnen, in denen die Fundamentalkugeln von den zugehörigen Leitflächen geschnitten werden. Die Punkte dieser Kurven bedeuten nämlich Punktkugeln, welche die Zyklide doppelt berühren.

Die Gleichung

$$\sum \frac{s_i^2}{\lambda - \alpha_i} = 0,$$

in der λ einen veränderlichen Parameter bezeichnet, liefert eine Schar konfokaler Zykliden, welche sich orthogonal schneiden und von denen drei durch jeden Punkt des Raumes gehen, die also ein *isothermisches Flächensystem* bilden.

Jede Zyklide der Schar wird von den übrigen in ihren Krümmungslinien geschnitten, diese sind daher algebraische Kurven.

Loria hat a. a. O. die Zykliden in 18 Arten eingeteilt.

Zu den Zykliden werden auch die Flächen 3. Ordnung gezählt, welche den unendlich fernen Kugelkreis einfach enthalten.

Eine Zyklide mit einem Doppelpunkt D findet man als *Fuß-*

punktfläche einer Fläche 2. Ordnung F_2, d. h. als Ort der Fußpunkte der aus D auf die Tangentialebenen von F_2 gefällten Lote. *Diese Fläche geht gleichzeitig aus einer Fläche 2. Ordnung durch Inversion hervor.*

Der Doppelpunkt bedeutet zwei zusammenfallende Fundamentalkugeln und ist gleichzeitig ein gemeinsamer Punkt der drei anderen Fundamentalkugeln. Diese werden in ihm von den zugehörigen Leitflächen berührt.

§ 7. Die Dupinsche Zyklide.

Am frühesten behandelt wurden die *Zykliden mit vier Doppelpunkten.* Sie fand Dupin, *Application de Géométrie,* Paris 1822, als er die Flächen suchte, *deren Krümmungslinien Kreise sind.* Vgl. über sie außerdem Mannheim, *Nouv. Ann.* **19**, 67 (1860); Moutard, ebenda (2) **3**, 306, 536 (1864); Darboux, *Annales de l'éc. norm.* (2) **1**, 273 (1872); Lemonnier, *Nouv. Ann.* (2) **9**, 514 (1870); Maxwell, *Quart. Journ.* **9**, 111 (1867); Laguerre, *Œeuvres II,* p. 167.

Die Kugeln, die drei gegebene Kugeln in bestimmter Weise berühren, umhüllen eine Dupinsche Zyklide. Diese Kugeln werden aber alle nicht bloß von drei, sondern von unendlich vielen Kugeln einer zweiten Kugelschar berührt. Man erhält so zwei Kugelscharen, welche die Zyklide umhüllen. *Die Berührungskreise dieser Kugeln bilden auf der Fläche zwei Kreisscharen, welche sich rechtwinklig durchsetzen und die Krümmungslinien der Dupinschen Zyklide sind.*

Jede der Kugelscharen gehört einem Kugelbündel an. Die Potenzachse des einen dieser Bündel ist jedesmal die gemeinsame Ähnlichkeitsachse der anderen Kugelschar.

Die beiden so gefundenen Achsen kreuzen sich rechtwinklig, und die Ebenen, welche durch sie, jedesmal senkrecht zu der anderen gelegt werden, sind zwei Symmetrieebenen der Dupinschen Zyklide.

Sie können beide auf der Fläche liegen. Dann wird diese von der 3. Ordnung. In jeder der beiden Kugelscharen ist in diesem Falle eine und nur eine Ebene enthalten, die jedesmal von den Kugeln der anderen Schar in den Punkten einer der beiden Achsen berührt wird.

Ist die Fläche von der 4. Ordnung, so sind immer in der einen Kugelschar zwei reelle, in der anderen zwei imaginäre Ebenen enthalten, die sich in je einer der beiden Achsen schneiden. Diese

vier singulären Tangentialebenen, welche die Zyklide in Kreisen berühren, ersetzen vier der fünf Kummerschen Kegel. Der fünfte bleibt erhalten und liefert zwei weitere Kreisscharen auf der Zyklide.

Die Dupinsche Zyklide kann zwei reelle Doppelpunkte haben und bietet dann zwei verschiedene Typen dar:

1. die *Hornzyklide,* die aus zwei in den Doppelpunkten zusammenstoßenden Hörnern besteht,

2. die *Spindelzyklide,* die aus zwei Schalen besteht, die eine spindelförmig, die andere melonenförmig und die erste umschließend. Die beiden Doppelpunkte können auch zusammenfallen, dann erhält man zwei entsprechende besondere Arten. Alle diese Zykliden können aus einem Rotationskegel (bzw. Rotationszylinder) durch Inversion erzeugt werden.

Hat die Dupinsche Zyklide keine reellen Doppelpunkte, so ist sie eine *Ringzyklide,* von welcher der gewöhnliche Kreisring oder Torus einen besonderen Fall bildet.

Die Gleichung der Dupinschen Zyklide nimmt, wenn man die Symmetrieebenen zur xy- und xz-Ebene wählt, die Form an:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2+z^2)^2&-(a+b+c+d)x(x^2+y^2+z^2)\\&+(ab+ac+\cdots+cd)(x^2+y^2+z^2)-(a+b)(c+d)y^2\\&-(b+c)(a+d)z^2-(abc+\cdots)x+abcd=0.\end{aligned}$$

Die Mittelpunkte der beiden Kugelscharen erfüllen in den Symmetrieebenen der Zyklide deren *Fokalkurven.* Diese sind zwei Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, von denen jeder durch die Brennpunkte des anderen geht. *Die Rotationskegel, welche aus den Punkten der einen Fokalkurve die andere projizieren, enthalten die Krümmungskreise der Zyklide.*

Nennt man F, F_1 die Brennpunkte der Fokalhyperbel, F', F_1' die Brennpunkte der Fokalellipse, Q einen Punkt auf einem Ast der ersteren, R einen auf der letzteren Kurve, so wird

$$FQ-F_1Q=\text{const.},\quad F'R+F_1'R=\text{const.},$$
$$QR-FQ-RF'=\text{const.}$$

für alle Punkte Q, R. Nimmt man nun auf der Geraden QR den Punkt P fortwährend so an, daß

$$PQ-FQ=\text{const.},$$

also auch

$$PR - RF' = \text{const.}$$

oder

$$PR + RF_1' = \text{const.}$$

wird, so liegt P auf einer Dupinschen Zyklide; von dieser ist PQ die Normale im Punkte P.

Alle Zykliden, die man für verschiedene Werte der Konstanten in den vorstehenden Formeln erhält, sind sonach parallele Flächen. Sie ergeben sich aus der angeschriebenen Flächengleichung, indem man darin a, b, c, d durch $a + \lambda$, $b - \lambda$, $c + \lambda$, $d - \lambda$ ersetzt.

§ 8. Die Steinersche Fläche.

Die Fläche 4. Ordnung S_4, bei welcher die Koordinaten eines veränderlichen Punktes quadratische Formen dreier Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 werden, heißt die Steinersche Fläche, nach Steiner, der sie zuerst während eines Aufenthaltes in Rom untersuchte und deshalb als *römische Fläche* bezeichnete.

Die angegebene Definition der Fläche schließt sofort ein, daß die Fläche durch die Kegelschnitte eines linearen Komplexes $\mathfrak{K}$ auf eine Ebene abgebildet werden kann. Alle ebenen Schnitte der Fläche sind sonach rationale Kurven 4 Ordnung und haben drei Doppelpunkte. Diese Doppelpunkte werden ausgeschnitten durch *drei gerade Doppellinien der Fläche, die in einem dreifachen Punkte zusammenstoßen.*

In dem Kegelschnittkomplex $\mathfrak{K}$ der Bildebene sind im allgemeinen vier doppelt zählende gerade Linien enthalten. Wählt man das Koordinatentetraeder so, daß diese Geraden den Schnitten der Fläche mit den Ebenen des Koordinatentetraeders entsprechen, so nimmt, auf dieses Tetraeder bezogen, die Gleichung der Fläche die Form an

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0,$$

und die Parameterdarstellung wird

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)^2,\\
\varrho x_2 &= (-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3)^2,\\
\varrho x_3 &= (-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3)^2,\\
\varrho x_4 &= (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2.
\end{aligned}$$

Für den dreifachen Punkt wird $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, für die Doppelgeraden werden je zwei Paare der Koordinaten einander gleich.

Macht man

$$\sigma y_1 = 2\xi_2\xi_3, \quad \sigma y_2 = 2\xi_3\xi_1, \quad \sigma y_3 = 2\xi_1\xi_2, \quad \sigma y_4 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

so daß y_1, y_2, y_3, y_4 aus x_1, x_2, x_3, x_4 durch lineare Transformation hervorgehen, also neue Koordinaten bedeuten, bei denen die Doppelgeraden drei Kanten des Grundtetraeders werden, so erhält man die einfachste rationale Gleichung der Fläche

$$y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2 - 2 y_1 y_2 y_3 y_4 = 0.$$

Die ebene Abbildung der Fläche geht aus derjenigen, die man durch einfache Projektion der Fläche aus ihrem dreifachen Punkt bekommt, durch eine quadratische Transformation hervor. Die vier doppelt zählenden geraden Linien u_1, u_2, u_3, u_4 des Kegelschnittkomplexes entsprechen vier Kegelschnitten auf der Steinerschen Fläche, die sich paarweise berühren, derart, daß die Berührungspunkte auf den Doppelgeraden liegen, und in denen die Fläche von vier singulären Tangentialebenen berührt wird. Die sechs Berührungspunkte der Kegelschnitte bilden die sechs *Kuspidalpunkte* der Steinerschen Fläche. Die Doppelgeraden entsprechen den Diagonalen des Vierseits $u_1 u_2 u_3 u_4$ und der dreifache Punkt den drei Schnittpunkten der Diagonalen. Die Punktepaare, die den einzelnen Punkten dieser Doppelgeraden zugeordnet sind, bilden auf der entsprechenden Vierseitsdiagonale eine Involution, deren Doppelpunkte die Vierseitsecken auf dieser Diagonale sind.

Den geraden Linien der Bildebene entsprechen Kegelschnitte auf der Steinerschen Fläche. Diese geraden Linien ordnen sich paarweise in eindeutiger Weise derart einander zu, daß die Linien eines Paares immer einen zerfallenden Kegelschnitt des linearen Komplexes $\mathfrak{K}$ bilden und die entsprechenden Kegelschnitte der Steinerschen Fläche in einer Ebene, nämlich einer Tangentialebene der Fläche, liegen.

Den Kegelschnitten, welche dem Vierseit $u_1 u_2 u_3 u_4$ einbeschrieben sind, entsprechen die *Haupttangentenkurven* der Steinerschen Fläche. Diese sind Raumkurven 4. Ordnung 2. Art.

Die Steinersche Fläche ist außer den Flächen 2. Ordnung und den Regelflächen 3. Ordnung die einzige, auf der durch jeden Punkt unendlich viele Kegelschnitte gehen: Darboux, *Bull. sciences math.* (2) **4**, 348 (1880).

Die Steinersche Fläche ist auch die einzige nicht geradlinige

56*

Fläche, deren sämtliche ebene Schnitte rationale Kurven sind: Picard, *J. f. Math.* **100**, 71 (1887); Guccia, *Pal. Rend. Circ. Mat.* **1**, 165 (1887).

Ferner gilt der von Kronecker aufgestellte, von Castelnuovo, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **3**[1], 22 (1894) bewiesene Satz:

Die Steinersche Fläche ist die einzige nicht geradlinige Fläche, die ∞^2 *zerfallende ebene Schnittkurven hat.*

Über die Steinersche Fläche vgl. Cremona, *J. f. Math.* **63**, 315 (1864), **67**, 1 (1867), *Ist. Lomb.* **4** (1867); Kummer, *J. f. Math.* **64**. 66 (1865); Weierstraß, ebenda S. 77; Schröter ebenda S. 79; Cayley, ebenda S. 172, *Lond. M. S. Proc.* **3**, 190 (1871), **5**, 14 (1873), *Papers V,* 241, *VII,* 2417, *VIII,* 389, *IX,* 1, *X,* 607; Lampe, *Diss.* Berlin 1864; Clebsch, *J. f. Math. J. f. Math.* **67**, 1 (1867); Sturm, *Math. Ann.* **3**, 76 (1871); Beltrami, *Bol. Acc. Mem.* (3) **10**, 233 (1879); Rohn, *Math. Ann.* **24**, 149 (1884); Gerbaldi, *La superficie di Steiner,* Torino 1881; Laguerre, *Œuvres II,* p. 275, 281, 319; Vahlen, *Acta Math.* **19**, 199 (1895); Lacour, *Nouv. Ann.* (3) **17**, 437, 499 (1898); Timerding, *Ann. di mat.* (3) **1**, 112 (1898); Montesano, *Napoli Rend.* (3) **5**, 88 (1899).

§ 9. Regelflächen vierten Grades.

1. Die *abwickelbare Fläche 4. Ordnung* hat zur Rückkehrkante eine kubische Raumkurve, sie ist vom Geschlecht 0 und hat, wenn die Koordinaten der Punkte der kubischen Raumkurve durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1$$

bestimmt sind, die Gleichung

$$(x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 - 4\,(x_2^2 - x_1 x_3)\,(x_3^2 - x_2 x_4) = 0.$$

Die ∞^1 Tangentialebenen der Fläche (d. h. die Schmiegungsebenen der kubischen Raumkurve) bilden ein *kubisches Ebenengewinde.*

2. Unter den windschiefen Regelflächen vom Geschlecht 0 ist zunächst die *Regelfläche mit einer dreifachen Geraden* zu nennen. Diese Fläche entsteht als Ort der Schnittlinien der Ebenen eines Büschels mit den Ebenen eines darauf projektiv bezogenen kubischen Ebenengewindes. Die Achse des Ebenenbüschels ist dann die dreifache Gerade der Fläche. Die Gleichung der Fläche entsteht sonach aus den Gleichungen

$$(a)\ x_1 - \lambda x_2 = 0, \qquad (b)\ u_0\lambda^3 + 3u_1\lambda^2 + 3u_2\lambda + u_3 = 0,$$

wo u_0, u_1, u_2, u_3 lineare Formen der Punktkoordinaten bedeuten, durch Elimination von λ, sie ist also von der Form

$$u_0 x_1^3 + 3u_1 x_1^2 x_2 + 3u_2 x_1 x_2^2 + u_3 x_2^3 = 0,$$

wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die dreifache Gerade ist.

Die Diskriminante der Gleichung (b) für λ liefert gleich Null gesetzt *vier Torsalpunkte auf der dreifachen Geraden.* Diese sind die Schnittpunkte der Geraden mit der abwickelbaren Fläche 4. Ordnung, welche das kubische Ebenengewinde bildet. Von den Torsalpunkten gehen zwei unendlich benachbarte Regelstrahlen der Fläche aus, deren Verbindungsebene eine *Torsalebene* bildet, d. h. die Fläche längs der ganzen Geraden berührt.

Von den Regelflächen 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden lassen sich mehrere Arten unterscheiden.

a) Für die erste Art, bei welcher die drei von einem Punkte der dreifachen Geraden ausgehenden Strahlen nicht in einer Ebene liegen, wird die kanonische Gleichungsform

$$x_1^2 x_2^2 = x_1^2 x_3 (ax_1 + bx_2) + x_2^2 x_4 (cx_1 + dx_2).$$

b) Liegen die genannten drei Geraden einmal und damit immer in einer Ebene, so existiert außer der dreifachen eine einfache Leitlinie. Dann lautet die kanonische Gleichungsform

$$x_1^2 x_3 (ax_1 + bx_2) + x_2^2 x_4 (cx_1 + dx_2) = 0;$$

$x_3 = 0$, $x_4 = 0$ ist dabei die einfache Leitlinie.

c) Wenn in der Gleichung des Falles a) $ad - bc = 0$ wird, so erhält die Flächengleichung die Form

$$x_1^2 x_2^2 = (ax_1 + bx_2)(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4).$$

Die dreifache Gerade berührt dann die von dem kubischen Ebenengewinde gebildete Fläche. Ein Regelstrahl fällt jedesmal mit der dreifachen Geraden zusammen. Die Fläche ist der Ort aller Geraden, welche entsprechende Punkte einer Geraden a und eines zu dieser in einer Korrespondenz (1, 2) stehenden Kegelschnittes k verbinden, wobei der Kegelschnitt die Gerade in einem Punkte trifft, der als Punkt der Geraden nicht mit einem der beiden ihm auf k entsprechenden Punkte zusammenfällt.

d) In einem noch spezielleren Fall wird die kanonische Gleichung

$$x_1^4 = x_2 (x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4).$$

Dann enthält eine Ebene ($x_2 = 0$) nur die dreifache Gerade und berührt also die Fläche längs dieser ganzen Geraden, ist mithin eine Torsalebene der Fläche.

e) Läßt sich die Flächengleichung auf die Form bringen

$$x_1^2 x_2^2 = (A x_1^2 + B x_1 x_2 + C x_2^2)(x_1 x_3 + x_2 x_4),$$

so geht durch jeden Punkt der dreifachen Geraden außer dieser nur ein einziger Regelstrahl der Fläche, der außerdem für zwei Punkte der dreifachen Geraden mit dieser zusammenfällt.

f) Bei der Fläche

$$x_1^2 x_2^2 = (a x_1 + b x_2)^2 (x_1 x_3 + x_2 x_4)$$

fallen die letztgenannten beiden Punkte zusammen. Zwei von den drei durch die dreifachen Gerade gehenden Mänteln schließen sich zu einem kuspidalen Mantel zusammen. Eine allgemeine ebene Schnittkurve hat in ihrem Schnittpunkt mit der dreifachen Geraden eine Spitze, durch die ein weiterer Kurvenzweig geht. Vgl. Rohn, *Math. Ann.* **24**, 147 (1884).

2. Eine Fläche 4. Ordnung *mit einer* irreduzibeln oder reduzibeln *Doppelkurve 3. Ordnung* ist eine Regelfläche R_4, mit Ausnahme des Falles der Steinerschen Fläche, wo die Doppelkurve sich auf drei durch einen Punkt gehende Gerade reduziert. Vgl. Clebsch, *Math. Ann.* **2**, 445 (1870).

Die Regelstrahlen der Fläche sind Bisekanten der kubischen Raumkurve und gehören immer einem linearen Strahlenkomplex an.

a) Der erste Fall, der sich darbietet, ist der, wo die kubische Raumkurve irreduzibel und der lineare Komplex nicht speziell ist. Geben wir die kubische Raumkurve durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = t^3 : t^2 : t : 1$$

und setzen

$$\varphi_1 = x_1 x_3 - x_2^2, \quad \varphi_2 = x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad \varphi_3 = x_2 x_4 - x_3^2,$$

so wird die Regelfläche R_4 durch eine quadratische Gleichung in $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dargestellt:

$$a_{11}\varphi_1^2 + a_{22}\varphi_2^2 + a_{33}\varphi_3^2 + \cdots + 2 a_{12}\varphi_1\varphi_2 = 0.$$

Die Parameter t, t' zweier Punkte auf der kubischen Raumkurve, die ein Regelstrahl der Fläche R_4 verbindet, sind durch die Gleichung verknüpft:

$$a_{11} t^2 t'^2 + a_{22}(t + t')^2 + a_{33} + \cdots + 2 a_{12} t t'(t + t') = 0.$$

Die beiden von einem Punkt der kubischen Raumkurve ausgehenden Regelstrahlen fallen zusammen, wenn der Parameter t des Punktes der Gleichung genügt

$$[a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22}][a_{22}t^2 + 2a_{23}t + a_{33}] \\ - [a_{12}t^2 + (a_{22} + a_{13})t + a_{23}]^2 = 0.$$

So finden wir vier Kuspidalpunkte auf der kubischen Raumkurve.

Der lineare Strahlenkomplex, dem die Regelstrahlen von R_4 angehören, hat in Plückerschen Linienkoordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ die Gleichung:

$$a_{11}p_{12} + a_{22}p_{14} + a_{33}p_{34} + 2a_{23}p_{24} + (a_{22} + 2a_{13})p_{23} + 2a_{12}p_{13} = 0.$$

In allgemeiner Weise läßt die Regelfläche R_4 sich erzeugen durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitten. Zwei solche Kegelschnitte findet man in irgend zwei der (doppelt berührenden) Ebenen, die je zwei einander (auf der kubischen Doppelkurve) schneidende Regelstrahlen der Fläche miteinander verbinden. Umgekehrt ist, wenn die projektive Beziehung der beiden Kegelschnitte gegeben ist, die kubische Doppelkurve durch folgende sechs Punkte bestimmt: 1. die zwei Punktepaare, die auf jedem Kegelschnitt den Schnittpunkten seiner Ebene mit dem anderen Kegelschnitt entsprechen, 2. die zwei Schnittpunkte der Verbindungslinien dieser Paare entsprechender Punkte.

b) Der lineare Strahlenkomplex wird ein spezieller, wenn

$$a_{11}a_{33} + a_{22}(a_{22} + 2a_{13}) - 4a_{12}a_{23} = 0.$$

Er besteht dann aus allen Strahlen, die eine gegebene Gerade treffen. Diese Gerade wird eine Leitlinie der Regelfläche R_4, und *die Regelfläche wird gebildet von allen Strahlen, die eine gegebene Gerade einmal und eine gegebene kubische Raumkurve zweimal treffen.*

In jeder Ebene durch die gerade Leitlinie liegen dann außer dieser drei Regelstrahlen der Fläche, welche die Schnittpunkte der kubischen Raumkurve mit dieser Ebene paarweise verbinden.

Für vier Ebenen fallen im allgemeinen zwei dieser drei Regelstrahlen zusammen.

3. a) Zerfällt die kubische Doppelkurve in einen Kegelschnitt k und eine diesen treffende Gerade g, so *verbinden die Regelstrahlen der Regelfläche R_4 solche Punkte von k und g, die einander in*

einer Korrespondenz (2, 2) zugeordnet sind, bei der der gemeinsame Punkt von k und g nur sich selbst entspricht.

Legt man den Kegelschnitt k fest durch die Proportion

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = t^2 : t : 1 : 0,$$

die Gerade g durch die Proportion

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = 0 : 0 : t' : 1,$$

so erhält man als Verbindungslinie der Punkte (z) und (y) einen Regelstrahl von R_4, wenn

$$t^2 t'^2 + att' + bt + c = 0,$$

und für die Gleichung der Fläche

$$(x_1 x_3 - x_2^2)^2 + a(x_1 x_3 - x_2^2) x_2 x_4 + (bx_1 + cx_2) x_2 x_4^2 = 0.$$

Die Fläche ist auch der Ort aller Geraden, welche entsprechende Punkte eines Kegelschnitts γ und einer Geraden g verbinden, die in einer Korrespondenz (2, 1) stehen und keinen Punkt gemein haben.

b) Haben γ und g einen Punkt entsprechend gemein, so fällt der Kegelschnitt γ mit dem Doppelkegelschnitt k zusammen; in den vorstehenden Formeln ist dann $c = 0$ zu setzen. Auf dem Kegelschnitt gibt es einen, auf der Geraden zwei Kuspidalpunkte.

c) Zerfällt die kubische Doppelkurve in drei Gerade, von denen eine, g_1, die beiden anderen, g, g', trifft, so erhält man, indem man für die Gleichungen dieser Geraden

$$g(x_1 = 0,\ x_2 = 0); \quad g_1(x_1 = 0,\ x_4 = 0); \quad g'(x_3 = 0,\ x_4 = 0)$$

wählt, die nachstehende Flächengleichung:

$$x_1^2 x_3^2 + a x_1 x_2 x_3 x_4 + (bx_1 + cx_2) x_2 x_4^2.$$

Es ist dann g_1 ein doppelter Regelstrahl, dagegen sind g, g' doppelte Leitlinien der Fläche.

Diese Fläche kann man erhalten als Ort der Geraden, welche zwei windschiefe Geraden g, g' und einen Kegelschnitt γ treffen, der mit g und g' keinen Punkt gemein hat, oder auch als Ort der Geraden, die zwei feste Gerade g, g' und eine kubische Raumkurve, die mit jeder von diesen Geraden einen Punkt gemein hat, schneiden.

Man erhält die Fläche ferner als Ort der Verbindungslinien

entsprechender Punkte von zwei projektiv aufeinander bezogenen Kegelschnitten, wenn man annimmt, daß die Punkte, in denen jeder dieser Kegelschnitte die Ebene des anderen trifft, paarweise einander zugeordnet sind. Die Schnittlinie der beiden Kegelschnittebenen wird dann der doppelte Regelstrahl g_1.

Endlich läßt sich die Fläche als Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte einer Geraden g und eines Kegelschnittes γ gewinnen, die in einer Korrespondenz (1, 2) stehen, wenn die Punkte, die dem Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene des Kegelschnittes γ auf γ entsprechen, mit P in einer Geraden g_1 liegen. Zu den Doppelgeraden g, g_1 findet man dann eine dritte g'; sie geht durch den Punkt O von g_1, in dem sich die Verbindungslinien der Punktepaare schneiden, die auf γ den einzelnen Punkten von g entsprechen, und durch den Schnittpunkt der Geraden, welche die Schnittpunkte von γ und irgendeiner Ebene durch g mit den entsprechenden Punkten auf g verbinden.

Auf jeder der Geraden g, g' liegen zwei Kuspidalpunkte.

d) Lassen wir im vorigen Fall P und O zusammenfallen, so fallen auch g und g' zusammen. Der Gleichung der Fläche läßt sich dann die Form geben:

$$x_1^2(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2) + x_1(x_1x_4 - x_2x_3)(dx_1 + ex_2) \\ + (x_1x_4 - x_2x_3)^2 = 0.$$

Der Doppelstrahl g_1 ist dabei $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, die doppelt zu zählende doppelte Leitlinie g wird $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

4. Die bis jetzt besprochenen Regelflächen R_4 sind alle vom Geschlecht 0. Außer diesen gibt es nur noch R_4 vom Geschlecht 1. *Diese Regelflächen haben zwei windschiefe (verschiedene oder zusammenfallende) Doppelgeraden.*

a) Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ die beiden Doppelgeraden g, g', so ist die Gleichung der Fläche von der Form:

$$x_1^2(ax_3^2 + 2bx_3x_4 + cx_4^2) + 2x_1x_2(a'x_3^2 + 2b'x_3x_4 + c'x_4^2) \\ + x_2^2(a''x_3^2 + 2b''x_3x_4 + c''x_4^2) = 0.$$

Die Fläche erscheint demnach als der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte von zwei in einer allgemeinen Korrespondenz (2, 2) stehenden Geraden g, g'. Durch jeden Punkt von g gehen zwei Regelstrahlen, die mit g' in einer Ebene liegen, und umgekehrt. *Auf g und g' liegen je vier Kuspidalpunkte.* Man kann die Fläche auch erhalten als Ort der Strahlen, die zwei gegebene

Gerade g, g' und eine ebene Kurve k_3 3. Ordnung, die g und g' je einmal schneidet, treffen.

b) Diese letzte Erzeugung liefert auch eine Erzeugung für den Fall, wo g und g' zusammenfallen. *Es steht dann die Kurve k_3 zu der Geraden g, die sie in einem Punkte O schneidet, in einer Korrespondenz (2, 1) derart, daß die Punktepaare von k_3, die den einzelnen Punkten von g entsprechen, mit O jedesmal in einer Geraden liegen.* (Derart wird ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt O auf die gerade Punktreihe g projektiv bezogen.) *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte von k_3 und g erfüllen dann die Fläche R_4.* Diese wird, wenn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gerade g ist, durch eine Gleichung von folgender Form gegeben:

$$(a_0 x_1^4 + a_1 x_1^3 x_2 + a_2 x_1^2 x_2^2 + a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4)$$
$$+ (x_1 x_4 - x_2 x_3)(b_0 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + (x_1 x_4 - x_2 x_3)^2 = 0.$$

Die Regelflächen 4. Grades hat zuerst Chasles, *C. R.* **53**, 888 (1861) behandelt und darauf Cayley, *Phil. Trans.* **153**, 453 (1863), **154** 559, (1864), *Papers V*, p. 168, 201, der aber nur acht Arten unterschied. Bis auf eine Art gab Cayley die vollständige Klassifikation dann *Phil. Trans.* **159**, 111 (1869), *Papers, VI*, p. 312, und desgleichen, bereits etwas früher, auf rein geometrischem Wege Cremona, *Bol. Acc. Mem.* (2) **8**, 235 (1868).

Später behandelte sie noch Rohn, *Math. Ann.* **24**, 145 (1884), **28**, 284 (1887); speziell die Regelflächen mit drei Doppelgeraden Segen, *Journ. f. Math.* **112**, 39 (1893).

Kapitel XXXVI.

Allgemeine Theorie der algebraischen Raumkurven.

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

Die nachstehend verzeichneten Werke werden in den folgenden beiden Kapiteln abgekürzt zitiert:

Cremona, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung,* Deutsche Ausgabe, Berlin 1870 (*Grundzüge*).

Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes,* 3. Aufl., Leipzig 1880 (*Raumgeometrie*).

Bertini, *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi,* Pisa 1907 (*Introduzione*).

Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumkurven, Berlin Abh.* 1882, im Jahre 1882 mit dem Steiner-Preis gekrönt (*Preisschrift*).

Halphen, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, J. éc. pol.* **52**, 1882, im Jahre 1882 mit dem Steinerschen Preis gekrönt (*Preisschrift*).

H. Valentiner, *Zur Theorie der Raumkurven, Acta math.* **2**, 1883 (*Raumkurven*).

§ 1. Definition und Darstellung einer algebraischen Raumkurve und die daraus folgenden Grundeigenschaften.

Um auf die allgemeinste Weise eine algebraische Raumkurve zu definieren, nimmt man zwischen den projektiven Koordinaten x, y, z eines veränderlichen Punktes irgendein System von algebraischen Gleichungen an mit reellen oder komplexen Koeffizienten, die auch mehrere unbestimmte Parameter rational enthalten können. Wenn dann dieses System einfach unendlich viele Lösungen (x, y, z) besitzt (d. h. Lösungen, die in wechselweise eindeutiger und kontinuierlicher Weise den reellen und komplexen Werten eines Parameters entsprechen), heißt die Gesamtheit der reellen und imaginären Punkte, deren Koordinaten x, y, z den gegebenen Gleichungen genügen, eine algebraische Kurve.

In homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 können die gegebenen Gleichungen immer gewonnen werden, indem man algebraische

Formen (homogene ganze rationale Funktionen) der Koordinaten, die die Parameter in ganzer rationaler Form enthalten, gleich Null setzt.

Aus der gegebenen Definition, die bezüglich der Koordinatentransformationen invariant ist, folgt sofort, daß, wenn man eine algebraische Raumkurve R aus einem Punkte projiziert, man einen algebraischen Kegel erhält. Wählt man zum Projektionszentrum z. B. die Ecke A_4 (0, 0, 0, 1) des Grundtetraeders, so wird der Kegel durch dieselben Gleichungen dargestellt wie die Kurve, wenn man nur x_4 nicht mehr als Koordinate, sondern als Parameter, der zu den anderen möglicherweise vorhandenen hinzukommt, ansieht.

Wenn der die Kurve aus einem allgemeinen Punkte projizierende Kegel irreduzibel ist, so sagt man, daß auch die Kurve R *irreduzibel* ist. Im anderen Falle verteilen sich die Punkte von R auf mehrere Kegel, und man sagt, daß R *reduzibel* ist, d. h. sich in Teile zerspaltet. Die allgemeine Definition, von der wir ausgegangen sind, zeigt, daß jeder dieser Teile eine algebraische Kurve ist.

Bezüglich der angegebenen Definition und ihrer unmittelbaren Folgen vgl. Kronecker, *J. f. Math.* **92**, 1 (1881), *Werke II*, Leipzig, 1897, S. 237; Molk, *Acta Math.* **6**, 1 (1885); J. König, *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen*, Leipzig 1903 (ungarisch 1902) und in mehr geometrischer Form Segre, *Ann. di Mat.* (2) **22**, 41 (1894); Bertini, *Introduzione*, p. 189 ff.

Bisekante (oder *Sehne*), *Trisekante*, ... von R heißt eine Gerade, welche zwei, drei, ... Punkte von R enthält.

Es tritt nie ein, daß jede Sehne von R wenigstens eine Trisekante ist, außer wenn R aus geraden Linien besteht, die durch einen Punkt gehen.

Einen einfachen Beweis dieses Satzes hat Castelnuovo in einer Note von Bertini, *Torino Atti* **26**, 118 (1890) gegeben, dieser findet sich wiederholt bei Bertini, *Introduzione*, p. 194 f. und Picard, *Traité d' analyse II*, 2. éd. Paris 1905, p. 567.

Es folgt daraus, daß *der Kegel, der R aus einem allgemeinen Punkte projiziert, nur eine endliche Anzahl von Sehnen (oder Trisekanten, ...) der Kurve enthalten kann.*

Vgl. Hensel und Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*, Leipzig 1902, S. 505.

Die Sehnen von R bilden eine ∞^2-fache algebraische Mannigfaltigkeit *(Kongruenz)*, die reduzibel ist oder nicht, je nachdem R

es ist. Dieser Mannigfaltigkeit gehört auch jede Gerade an, die durch einen Punkt P von R geht und die Grenzlage einer Sehne bildet, deren zwei Treffpunkte mit R sich P irgendwie unbegrenzt nähern. Eine solche Gerade heißt eine *uneigentliche* Sehne bezüglich P, während eine *eigentliche* Sehne immer zwei getrennte Punkte von R verbindet. Für einen allgemeinen Punkt P von R ist die einzige uneigentliche Sehne die *Tangente* in P.

Die uneigentlichen Sehnen einer Kurve haben Eigenschaften, die in enger Beziehung zu den Singularitäten der Kurve stehen (§ 4); vgl. hierüber B. Levi, *Torino Mem.* (2) **48**, 83 (1898).

Wichtige Sonderfälle der gegebenen Kurvendefinition sind die, daß eine Kurve betrachtet wird: 1. *als Schnitt von zwei oder mehr algebraischen Flächen,* so daß sie durch Gleichungen dargestellt wird, die nur die Koordinaten enthalten, 2. *als Ort der Punkte, deren Koordinaten gegebene rationale Funktionen zweier durch eine algebraische Gleichung verknüpfter Parameter sind,* oder mit anderen Worten *als die rationale Transformierte einer ebenen algebraischen Kurve,* woraus folgt, daß *sich immer eine birationale Beziehung zwischen der Raumkurve und einer ebenen Kurve herstellen läßt.*

Betreffs der ersten der angeführten Definitionen läßt sich zeigen, daß *eine Raumkurve sich immer als vollständiger Schnitt von höchstens vier algebraischen Flächen (z. B. von vier projizierenden Kegeln) ansehen läßt,* so daß die Kurve sich immer durch höchstens vier Gleichungen, die allein die Koordinaten enthalten, darstellen läßt. Vgl. Kronecker, a. a. O., *Werke II,* S. 280; Molk, a. a. O., S. 163; König, a. a. O., S. 234; Bertini, *Introduzione,* p. 197. Daß weniger als vier Flächen im allgemeinen nicht hinreichen, um eine Kurve als ihren vollständigen Schnitt festzulegen, wurde bewiesen von Vahlen, *J. f. Math.* **108**, 346 (1891) mit dem Beispiel der rationalen Kurve 5. Ordnung, die eine einzige vierfach schneidende Gerade besitzt (vgl. § 14 und Kap. XXXVII, § 4).

Was die zweite Definition betrifft, so sei $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ die Gleichung einer irreduziblen ebenen algebraischen Kurve, und man betrachte auf ihr eine einfache lineare Schar g_n^3 ohne feste Punkte (Bd. II[1], S. 308), die durch das ∞^3-fache lineare Kurvensystem

$$\lambda_1 \varphi_1(y) + \lambda_2 \varphi_2(y) + \lambda_3 \varphi_3(y) + \lambda_4 \varphi_4(y) = 0$$

ausgeschnitten wird. Setzen wir

$$\varrho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so beschreibt der Punkt x, während der Punkt y die Kurve

durchläuft, eine irreduzible Raumkurve R, die birational auf f bezogen ist derart, daß den Punktgruppen von g_n^3 die Gruppen der Schnittpunkte von R mit einer Ebene projektiv zugeordnet sind. Man erhält R also, indem man die Punktgruppen von g_n^3 projektiv auf die Ebenen des Raumes bezieht: dann entsprechen den Punktgruppen, die einen bestimmten Punkt y von f enthalten, die Ebenen, die durch einen bestimmten Punkt x gehen, und wenn y die Kurve f durchläuft, beschreibt x die Kurve R.

Wenn hingegen die Schar $g_n{}^3$ mit einer Involution von der Ordnung ν zusammengesetzt ist, so beschreibt der Punkt x, während der Punkt y die Kurve f durchläuft, eine Kurve, welche zu f in einer algebraischen Korrespondenz $(1, \nu)$ steht.

Vgl. Severi, *Lezioni di geometria algebrica* (lith.), Padova 1908, p. 93 bis 101.

Eine ebene Kurve f, die einer gegebenen Raumkurve R birational entspricht, erhält man z. B., indem man R auf eine Ebene aus einem allgemeinen Punkte des Raumes projiziert, d. h. einem Punkte, für den mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Strahlen jeder Strahl nur einen einzigen Punkt von R projiziert.

Dies führt zu einer wichtigen algebraischen Darstellung von R. Wenn man nämlich R aus dem Grundpunkte A_4, der in allgemeiner Lage angenommen sei, auf die Ebene $x_4 = 0$ projiziert, so werden die Koordinaten der Punkte von R durch zwei Gleichungen von der Form

$$(1)\quad f_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_4\psi_{m-1}(x_1, x_2, x_3) - \psi_m(x_1, x_2, x_3) = 0$$

verknüpft, wobei f_n, ψ_m, ψ_{m-1} Formen von x_1, x_2, x_3 ohne gemeinsame Faktoren und von den Ordnungen $n, m, m-1$ bedeuten. Die erste Gleichung stellt den Kegel (von der Ordnung n) dar, der R aus A_4 projiziert, die zweite ein Monoid (Kap. XXX, § 4) mit dem Scheitel A_4 und von der Ordnung m. Die Kurve R bildet aber nicht immer den ganzen Schnitt des projizierenden Kegels mit dem Monoid, diese haben vielmehr außer R noch eine gewisse Anzahl von A_4 ausgehender Geraden gemein, nämlich die Geraden, welche die Kegel $f_n = 0$, $\psi_{m-1} = 0$, $\psi_m = 0$ gemein haben. Unter ihnen sind die Sehnen von R, die von A_4 ausgehen.

Demnach *ist eine beliebige algebraische Kurve Teilschnitt eines Kegels und eines Monoids mit demselben Scheitel, wobei der Rest des Schnittes aus geraden Linien besteht.*

Wollen wir die Darstellung (1) der Kurve vollständig machen, so genügt es, den Gleichungen die Ungleichung

$$\psi_{m-1}(x_1, x_2, x_3) \neq 0$$

hinzuzufügen.

Die Darstellung (1) heißt die *monoidale* und rührt her von Cayley, *C. R.* **54**, 55, 396, 672 (1862), **58**, 994 (1864), *Papers V*, p. 7, 24.

In nicht homogenen Koordinaten wird sie

$$(2) \qquad f(x, y) = 0, \quad z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

wobei f, P, Q ganze Polynome von x, y ohne gemeinsame Faktoren und von den Ordnungen $n, m, m-1$ bezeichnen.

Es ist zu beachten, daß, wenn R gegeben ist, die vorstehende Darstellung nicht eindeutig festgelegt ist. Z. B. ist klar, daß in (2) P und Q durch andere Polynome P' und Q' von den Ordnungen m' und $m'+1$ ersetzt werden können, die nur so zu wählen sind, daß $PQ' - P'Q$ durch f teilbar ist. Halphen, *Preisschrift*, S. 24 und Valentiner, *Raumkurven*, S. 170 (vgl. auch Picard, *Traité d'analyse II*, 2. éd., Paris 1905, p. 571) haben dieser Eigenschaft eine geometrische Form gegeben, indem sie zeigten, daß, *wenn R keine mehrfachen Punkte besitzt, jeder Kegel, der durch die von A_4 ausgehenden Sehnen gelegt wird, sich als Unterkegel ($\psi_{m-1} = 0$) eines Monoids, das durch R geht, ansehen läßt.* Der Fall, wo R mehrfache Punkte hat, wurde betrachtet von Autonne, *Ann. de l' Univ. de Lyon* 1896, Chap. I (Auszug *C. R.* **119**, 845 (1894)); vgl. auch *J. éc. pol.* **63**, 79 (1893), Kap. I.

Wenn R eine irreduzible, nicht ebene Kurve ist und A_4 ein allgemeiner Punkt, muß $m \geqq \frac{n}{2}$ sein.

Eine andere algebraische Darstellungsform einer Kurve R hat Brill, *Gött. Nachr.* 1901, S. 156; *Math. Ann.* **64**, 289 (1907) (für die Raumkurven 3. Ordnung *Pal. Circ. Mat. Rend.* **25**, 188 (1908)) gegeben, indem er von den projizierenden Kegeln ausging, deren Spitzen in einer festen Geraden liegen (die nicht der Ebene von R angehört, wenn R eben ist). Nimmt man für diese Gerade

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

(die *Hauptkante* des Koordinatentetraeders) und setzt

$$\omega = \lambda x_1 + \mu x_2,$$

so hat die Gleichung dieser Kegel die Form

$$(3) \qquad \Omega(\omega, x_3, x_4; \ \lambda, \mu) = 0,$$

wo Ω eine ganze homogene Funktion sowohl von ω, x_3, x_4 wie

von ω, λ, μ bedeutet und $\lambda : \mu$ ein Parameter ist, der sich mit der Spitze des Kegels verändert. (3) heißt nach Brill die *Gleichung der Kurve*. Wenn R zerfällt, zerfällt Ω in Faktoren, die in ω, x_3, x_4 rational sind, und umgekehrt. Wenn man in (3) statt ω einsetzt $\lambda x_1 + \mu x_2$ und nach Potenzen von λ und μ ordnet, so müssen für jeden Punkt von R alle Koeffizienten verschwinden, was die Gleichungen von ebenso vielen Flächen einer und derselben Ordnung n liefert, die durch R gehen und in den Grundpunkten $A_1(1, 0, 0, 0)$ und $A_2(0, 1, 0, 0)$ der Reihe nach die Multiplizitäten

$$0, n; \quad 1, n-1; \quad 2, n-2; \quad \ldots n-1, n; \quad n, 0$$

besitzen, so daß die erste und die letzte dieser Flächen die Kegel sind, die R aus A_2 und A_1 projizieren und die zweite und vorletzte Monoide, deren Scheitel in denselben Punkten liegen.

Aus irgendeiner der vorstehenden Darstellungsarten folgt, daß die Anzahl der gemeinsamen Punkte einer Kurve R und einer Ebene (solange diese Zahl endlich bleibt) sich nicht mit der Ebene ändert. Diese Zahl, die gleich der Ordnung n des R aus einem allgemeinen Punkte projizierenden Kegels ist, heißt die *Ordnung* von R. Bei der monoidalen Darstellung (1) ist sie demnach der Ordnung n von f gleich. Wenn hingegen eine irreduzible Kurve R auf eine ebene Kurve mit Hilfe einer auf dieser angenommenen g_n^3 birational bezogen ist, so wird die Ordnung von R gleich n oder $\frac{n}{\nu}$, je nachdem die Schar einfach oder mit einer Involution von der Ordnung ν zusammengesetzt ist.

Eine Kurve, welche den vollständigen Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen m und n bildet, ist von der Ordnung mn.

Allgemeiner *wird eine Kurve der Ordnung n von einer Fläche der Ordnung p, die keinen Teil der Kurve enthält, in np Punkten getroffen.* Einen Beweis dieses Satzes gab mit Hilfe der monoidalen Darstellung Halphen, *Bull. Soc. math.* **2**, 40 (1873), vgl. Noether, *Math. Ann.* **11**, 571 (1877); mit Hilfe des Chasles-schen Korrespondenzprinzips (Bd. II[1], S. 344) Fouret, *Bull. Soc. math.* **1**, 122, 258 (1873), **2**, 127 (1874); vgl. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verwandtsch. 1,* Leipzig 1908, S. 234. Ein anderer Beweis findet sich bei Brill, *Math. Ann.* **64**, 299 (1907).

Ein Punkt P heißt für R s-fach, wenn für eine allgemeine Ebene durch P s Schnittpunkte mit R in P zusammenfallen. Für $s = 1$ heißt der Punkt *einfach:* derart sind die allgemeinen Punkte von R.

Noch eine weitere Darstellung einer Raumkurve ergibt sich, indem man den Komplex der die Kurve treffenden Strahlen betrachtet, in der Form einer besonderen Gleichung $V = 0$ zwischen den Linienkoordinaten. Diese fand Cayley, *Quart. J.* **3**, 225 (1860), **5**, 81 (1862), *Papers IV*, p. 446, 490 und für die kubischen Raumkurven schon vorher *Phil. Mag.* **12**, 20 (1856), *Papers III*, p. 219, indem er für die Festlegung einer Geraden die Plückerschen Koordinaten p, q, r, s, t, u verwendet, die durch die Identität $ps + qt + ru = 0$ verknüpft sind, und darauf in vollständigerer Weise mit Hilfe der Kleinschen Koordinaten $x_1, \ldots x_6$ (die durch die Identität $x_1^2 + \cdots + x_6^2 = 0$ verknüpft sind) Voss, *Gött. Nachr.* 1875, S. 101, *Math. Ann.* **13**, 232 (1878).

Die Funktion V genügt zwei charakteristischen Differentialgleichungen, die von Voß untersucht worden sind, und von welchen die eine, die schon von Cayley angedeutet worden war, den Linienkomplexen zukommt, die von den Tangenten einer gegebenen Fläche gebildet werden. Vgl. hierüber noch Klein, *Math. Ann.* **5**, 287 (1872).

Wir wollen noch folgenden Satz hinzufügen, welchen man Lie, *Leipzig Ber.* **49**, 697, 701 (1897), verdankt: Zerfallen die ebenen Strahlensysteme allgemeiner Lage eines irreduziblen algebraischen Strahlenkomplexes in mehrere Systeme (z. B. in lauter Strahlenbüschel), so besteht der Komplex aus allen Treffgeraden einer irreduziblen algebraischen Raumkurve.

§ 2. Ebene Projektion und scheinbare Doppelpunkte einer Raumkurve.

Nehmen wir im Raum einen allgemeinen Punkt an, so geht durch ihn eine konstante Zahl von Sehnen der Kurve R. Diese Zahl (die *Ordnung der Sehnenkongruenz*) wird gewöhnlich mit h bezeichnet und heißt auch nach Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 28 (1850) die *Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte* von R, weil eine allgemeine ebene Projektion von R h Doppelpunkte besitzt, welche die Spuren der vom Projektionszentrum ausgehenden Sehnen sind.

Diese Sehnen findet man bei der Brillschen Darstellung (§ 1) daraus, daß die Diskriminante D_Ω von Ω in bezug auf ω folgendermaßen rational zerfällt:

$$D_\Omega = K'(x_3, x_4)\,[K''(x_3, x_4)]^2\,[L(x_3, x_4; \lambda, \mu)]^2,$$

wo K', K'', L Binärformen von x_3, x_4 bezeichnen. Die ersten beiden,

die von λ, μ unabhängig sind, liefern die Ebenen durch die Hauptkante, die R berühren oder durch mehrfache Punkte von R gehen, während die dritte die Ebenen darstellt, die durch die Hauptkante und die vom Punkte $\lambda : \mu$ ausgehenden Sehnen von R gehen, und die scheinbaren Doppelpunkte für die Projektion der Kurve aus diesem Punkt liefert.

Über die Darstellung und Scheidung der wirklichen und scheinbaren Doppelpunkte vgl. auch Hensel und Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln,* Leipzig 1902, S. 478, und in weiterer Ausführung Landsberg, *J. f. Math.* **131**, 155 (1906).

Aus dem Vorstehenden folgt, daß durch *Ausartungen* der Kurve, d. h. auf Grund von Relationen, welche man zwischen den in Ω enthaltenen Konstanten festsetzt, die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte sich wohl verringern, aber niemals vergrößern läßt; insbesondere *muß, wenn durch eine solche Ausartung eine ebene Projektion von R einen neuen mehrfachen Punkt erhält, R entsprechend einen wirklichen mehrfachen Punkt erworben haben.*

Hieraus hat durch topologische Betrachtungen Brill gefolgert, daß, *wenn eine Raumkurve durch Ausartung in zwei Teile zerfällt, diese wenigstens einen Punkt gemein haben.* Hierüber vgl. auch Noether, *Acta Math.* 8, 182 (1886); Enriques, *Bologna Rend.* (2) 9, 10 (1904).

Andere Eigenschaften von Ω liefern andere grundlegende Sätze über die Kurve R. So ergibt sich aus der Untersuchung des Zerfallens von Ω in Formen von niedrigerer Ordnung bezüglich ω:

Wenn die ebene Projektion von R aus einem allgemeinen Punkte des Raumes in (sämtlich verschiedene) Kurven von niedrigeren Ordnungen zerfällt, zerfällt auch R in Kurven von diesen Ordnungen.

Ist das Projektionszentrum s-fach für R, so zerfällt der projizierende Kegel in s Ebenen und in einen Kegel von der Ordnung $n - s$ (wenn n die Ordnung von R ist).

§ 3. Geschlecht einer Raumkurve und Maximalgeschlecht einer Raumkurve von gegebener Ordnung. Kegel, welche die von einem Punkte ausgehenden Sehnen enthalten.

Geschlecht p einer irreduziblen Raumkurve heißt das Geschlecht einer ebenen Kurve, welche auf die Raumkurve birational bezogen ist (§ 1), z. B. das Geschlecht einer allgemeinen ebenen Projektion der Raumkurve. Wenn daher die Raumkurve R von der Ordnung n

ist, keine mehrfachen Punkte und h scheinbare Doppelpunkte besitzt, so wird ihr Geschlecht

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - h. \tag{1}$$

Wenn die Kurve in a irreduzible Kurven von den Geschlechtern $p_1, p_2, \ldots p_a$ zerfällt, so könnte man entsprechend der Formel für die ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 297) als das Geschlecht p den Ausdruck definieren:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_a - a + 1; \tag{2}$$

aber es ist zweckmäßiger, als Definition von p die Formel (1) beizubehalten, wobei auch n und h die frühere Bedeutung behalten. Wenn man daher mit t die Gesamtzahl aller (als einfach vorausgesetzten) Schnittpunkte der Teilkurven untereinander bezeichnet, so wird

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_a - a + 1 + t. \tag{3}$$

Vgl. Noether, *Acta Math.* 8, 182 (1886).

Bezüglich der vorstehenden Definition beachte man, daß auch für eine zerfallende ebene Kurve das Geschlecht die Form (3) annimmt, wenn man unter den Schnittpunkten der Teilkurven t Zusammenhänge annimmt. Sowohl für eine ebene wie auch für eine Raumkurve muß das Geschlecht so verstanden werden, daß, wenn eine irreduzible Kurve sich der zerfallenden Kurve kontinuierlich nähert, derart, daß die t festgelegten Zusammenhänge keine Grenzlagen von Doppelpunkten der veränderlichen Kurve sind, während die übrigen gemeinsamen Punkte der Teilkurven Grenzlagen von Doppelpunkten der irreduziblen Kurve sind, dann das *effektive* Geschlecht der *irreduziblen* Kurve durch die Formel (3) gegeben wird und nichts anderes ist wie das *virtuelle* Geschlecht der *reduziblen* Kurve mit Rücksicht auf die angegebenen Zusammenhänge. Die Zweckmäßigkeit, $t > 0$ anzunehmen, rührt daher, daß, wenn die reduzible Kurve als Grenzlage einer irreduziblen auftritt, sie Zusammenhänge besitzt und deshalb $t > 0$ ist.

Im folgenden bezeichnen wir häufig mit R_n eine Raumkurve von der Ordnung n und mit R_n^p eine Raumkurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p.

Wenn eine Raumkurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten irreduzibel ist, wird die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte für einen allgemeinen Punkt, der auf ihr selbst liegt, d. h. die Anzahl der Trisekanten, die von diesem Punkte ausgehen,

$$h - n + 2.$$

Vgl. Bertini, *Introduzione*, p. 405.

Daraus folgt

$$h \geqq n - 2 \qquad \text{oder} \qquad p \leqq \frac{(n-2)(n-3)}{}$$

Eine genaue Grenze für den Wert von h (und damit von p) wird durch den folgenden Satz geliefert:

Für eine irreduzible algebraische Kurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten ist stets

$$h \geqq \frac{n(n-2)}{4} \quad \textit{oder} \quad h \geqq \frac{(n-1)^2}{4}$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. —

Kurven von der Ordnung n und vom Maximalgeschlecht existieren für jeden Wert von n; sie besitzen keine mehrfachen Punkte und liegen auf einer Fläche 2. Ordnung. Wenn n gerade ist, bilden sie den vollständigen Schnitt dieser Fläche mit einer Fläche von der Ordnung $\frac{n}{2}$; wenn n ungerade ist, bilden sie den Restschnitt der Fläche 2. Ordnung mit einer durch eine Gerade von ihr hindurchgehenden Fläche von der Ordnung $\frac{n+1}{2}$.

Vgl. hierüber Halphen, *C. R.* **70**, 380 (1870), *Bull. Soc. math.* **2**, 42 (1873), *Preisschrift*, p. 31 und Kap. II; Noether, *Preisschrift*, § 3 und 6; Valentiner, *Raumkurven*, S. 178.

Sätze über die Kegel, welche die h von einem allgemeinen Punkte ausgehenden Sehnen einer Raumkurve R_n enthalten, oder die Kurven, die durch die h Doppelpunkte einer allgemeinen ebenen Projektion f von R_n gehen, finden sich in den angeführten Arbeiten von Halphen, Noether, Valentiner und auch bei R. Sturm, *Report of the British Association at York* 1881, p. 440; sie haben zum Ausgangspunkt den Satz (Bd. II[1], S. 313—4), wonach, *damit eine irreduzible ebene Kurve f von der Ordnung n mit h Doppelpunkten die Projektion einer Raumkurve R_n von der Ordnung n aus einem allgemeinen Punkte wird, wenn $h > \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, keinerlei besondere Bedingung erfüllt sein muß, während wenn $h \leqq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, notwendig und hinreichend ist, daß diese h Punkte den adjungierten Kurven der Ordnung $n - 4$ von f nur $h - 1$ Bedingungen auferlegen.*

Betreffs der adjungierten Kurven von niedrigeren Ordnungen gilt ebenso der Satz (Noether, *Preisschrift,* § 3):

Ist die allgemeine Projektion f einer irreduziblen, ohne mehrfache Punkte vorausgesetzten Raumkurve R_n *derart, daß durch* $h - \frac{i(i+1)}{2}$ *unter ihren h Doppelpunkten sich eine Kurve von der Ordnung* $n - i - 3$ *legen läßt, wobei* $n - i - 3 \geqq \frac{n}{2} - 1$, *so geht sie auch durch die übrigen Doppelpunkte (d. h. ist eine adjungierte Kurve von f).*

Die h Doppelpunkte erlegen mithin den adjungierten Kurven von der Ordnung $n - i - 3$ höchstens $h - \frac{i(i+1)}{2}$ Bedingungen auf. Betreffs Beziehungen dieser Zahl von Bedingungen und der Ordnungszahlen der Flächen, welche die durch f projizierte Kurve R_n enthalten, vgl. § 11.

Wenn R der vollständige Schnitt zweier Flächen F_m, F_μ von den Ordnungen m, μ (vgl. § 7) ist, so wird die Anzahl h der von einem allgemeinen Punkt ausgehenden Sehnen gegeben durch

$$h = \tfrac{1}{2} m \mu (m-1)(\mu - 1).$$

Diese Formel wurde zuerst von Cayley, *J. de Math.* (1) **10**, 250 (1845), *Papers I,* p. 211, mitgeteilt und darauf von Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **2**, 68 (1847), **5**, 23 (1850) wiedergefunden, der weiter angab, daß die Treffpunkte dieser Sehnen die Schnittpunkte von R mit einer Fläche von der Ordnung $(m-1)(\mu-1)$ sind. Vgl. auch Cremona, *Grundzüge,* S. 101; Salmon-Fiedler, *Raumgeometrie II,* S. 130; H. de Vries, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (2) **1**, 127 (1895).

Valentiner, *Raumkurven,* S. 191, und Noether, *Preisschrift,* S. 27, haben außerdem gezeigt, daß *diese h Sehnen Seitenlinien eines Kegels von der Ordnung* $(m-1)(\mu-1)$ *sind* und daß dies der Kegel niedrigster Ordnung ist, der die Sehnen enthält.

Halphen, *Preisschrift,* p. 106, hat als Folgerung aus einem allgemeinen Verfahren (vgl. § 12) nachgewiesen, daß *umgekehrt eine Kurve von der Ordnung* $m\mu$, *für welche die von einem allgemeinen Punkte ausgehenden Sehnen auf einem Kegel von der Ordnung* $(m-1)(\mu-1)$ *liegen, den vollständigen Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen* m, μ *bildet (wenn sie nicht auf einer Fläche von niedrigerer Ordnung als* m *und* μ *liegt).*

§ 4. Auflösung der Singularitäten. Zweige. Schnitte von Kurven und Flächen.

Wie in § 1 gesagt wurde, läßt eine irreduzible Raumkurve R sich immer dadurch definieren, daß die Koordinaten x, y, z eines Punktes auf ihr als rationale Funktionen zweier Parameter u, v, die durch eine algebraische Gleichung $f(u, v) = 0$ verknüpft sind, gegeben werden, derart, daß u, v ihrerseits rationale Funktionen von x, y, z sind. Mit anderen Worten läßt sich R immer als die birationale Transformierte einer irreduziblen ebenen Kurve $f = 0$ auffassen.

Es heißt nun *Zweig* von R die Gesamtheit der Punkte, die einem Zweig von $f = 0$ entspricht (für diese Definition würde auch hinreichen, daß die Beziehung von R auf f eine *rationale* ist, vgl. § 1). Durch birationale Transformation geht jeder Zweig von R wieder in einen Zweig über.

Aus dem in Bd. II[1], S. 293 Gesagten folgt, daß ein Zweig von R, dessen Ursprung in einem gegebenen Punkte liegt, analytisch dargestellt wird, indem man die Koordinaten x, y, z Reihen von positiven ganzen Potenzen eines Parameters t gleich setzt, die für Werte von t mit hinreichend kleinem Modul konvergieren, wobei t in eindeutiger Beziehung zu den Punkten des Zweiges steht und eine rationale Funktion der Koordinaten x, y, z dieser Punkte bildet.

Der gleiche Begriff des Zweiges läßt sich auch aus dem Satz ableiten, daß *eine algebraische Raumkurve mit beliebigen Singularitäten sich birational in eine andere ohne mehrfache Punkte transformieren läßt.* Beweise hierfür findet man in den Arbeiten von Veronese, Poincaré, del Pezzo, Pieri, Vessiot, Segre, Hensel-Landsberg, Severi, die in Bd. II[1], S. 291 f. angeführt sind.

Daß *jede Raumkurve durch birationale Transformation des Raumes sich in eine andere mit nur gewöhnlichen mehrfachen Punkten (d. h. solchen mit nicht zusammenfallenden Tangenten) transformieren läßt und zwar, wenn man will, derart, daß ein gegebener mehrfacher Punkt der ursprünglichen Kurve sich in eine endliche Anzahl von einfachen Punkten der transformierten Kurve auflöst,* zeigten del Pezzo, *Circ. Mat. Rend.* **6**, 144 (1892); Pannelli, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **26**, 216 (1893); Segre, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 9 (1896); B. Levi, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 228 (1897), *Torino Mem.* (2) **48**, 132 (1898).

Indem er von einer bereits derart transformierten Kurve aus-

ging, hat B. Levi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **7**[1], 111 (1898) nachgewiesen, daß *die Reduktion jeder Raumkurve auf eine solche ohne mehrfache Punkte sich auch durch eine birationale Transformation des Raumes erreichen läßt.*

Aus der Anwendung birationaler Transformationen des Raumes (z. B. sukzessiver quadratischer Transformationen) geht ebenso wie bei den ebenen Kurven (Bd. II[1], S. 292) die Auffassung der Singularität eines Zweiges als das Ergebnis des Vorhandenseins sukzessiver mehrfacher Punkte hervor, die auf dem Zweige in unendlicher Nachbarschaft des Ursprungs liegen. Vgl. Segre, *Ann. di Mat.* (2) **25**, 8 (1896).

Die hauptsächlichsten Eigenschaften der Zweige lassen sich aus dem Begriff der Multiplizität des Schnittes eines Zweiges mit einer durch seinen Ursprung gehenden Fläche ableiten. Es sei

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Fläche und $O(x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt auf ihr. Ein Zweig einer algebraischen Kurve, der den Ursprung O hat, wird dann durch Potenzreihen von t dargestellt, in denen die konstanten Glieder x_0, y_0, z_0 sind. Setzt man diese Reihen in $F(x, y, z)$ ein, so erhält man eine Potenzreihe von t ohne konstantes Glied, und wenn der niedrigste Exponent, mit dem t erscheint, dann I ist, so nennt man I die *Multiplizität des Schnittes* des Zweiges mit der Fläche in O.

Indem man insbesondere eine Ebene ins Auge faßt, nennt man *Ordnung* des Zweiges die Zahl ν, die die Multiplizität des Schnittes des Zweiges mit einer allgemeinen Ebene durch O ausdrückt. Ein Zweig ist *linear* oder *superlinear*, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$.

Unter den Ebenen durch O haben eine Schnittmultiplizität, die $> \nu$ ist, diejenigen, die durch eine bestimmte Gerade hindurchgehen, welche die *Tangente* des Zweiges in O heißt, und unter diesen Ebenen hat eine bestimmte Ebene eine noch größere Schnittmultiplizität, dies ist die *Schmiegungsebene* des Zweiges in O.

Wenn man der Einfachheit halber O zum Koordinatenursprung, die Tangente zur x-Achse, die Schmiegungsebene zur xy-Ebene wählt, und voraussetzt, daß zu O der Wert $t = 0$ gehört, so nimmt die Darstellung des Zweiges die Form an:

$$\cdot\; at^{\nu} + \qquad y = bt^{\nu+\varrho} + \cdot \qquad z = ct^{\nu+\varrho+\nu'} + \cdot$$

wo a, b, c von Null verschiedene konstante Koeffizienten bedeuten. Die Zahlen ϱ, ν' heißen der *Rang* und die *Klasse* des Zweiges.

Die Schmiegungsebenen in den Punkten eines Zweiges bilden das dem Zweige dual entsprechende Gebilde. Halphen, *Ass. franç. pour l'avanc. des sciences* **6**, Le Havre 1877, p. 132; *Bull. Soc. math.* **6**, 10 (1878) hat gezeigt, daß *die Zahlen ν und ν' einander dual entsprechen, während ϱ zu sich selbst dual ist, so daß $\nu + \varrho + \nu'$ sowohl die Anzahl der Schnittpunkte des Zweiges mit der Schmiegungsebene in O, die nach O fallen, wie auch die Anzahl der von O ausgehenden Schmiegungsebenen, die mit der Schmiegungsebene in O zusammenfallen, bedeutet.*

Projiziert man einen Zweig einer Raumkurve R aus einem Punkt P auf eine Ebene, so erhält man einen Zweig der Projektionskurve von R. Wenn P ein allgemeiner Punkt ist, so hat der projizierte Zweig zum Ursprung und zur Tangente die Projektion des Ursprungs O und der Tangente des gegebenen Zweiges, seine Ordnung ist ν und seine Klasse ϱ. Die Ordnung und die Klasse des projizierten Zweiges werden hingegen ϱ und ν' oder $\nu + \varrho$ und ν' oder ν und $\varrho + \nu'$, wenn P mit O zusammenfällt oder ein allgemeiner Punkt der Tangente oder der Schmiegungsebene des gegebenen Zweiges in O ist.

Ein Punkt O von R ist s-fach, wenn die Summe der Ordnungen der von O ausgehenden Zweige s beträgt, so daß von den Schnittpunkten der Kurve mit einer allgemeinen Ebene, die nicht durch O geht, aber O hinreichend nahe liegt, s dem Punkt O beliebig nahe gebracht werden können. Für $s = 1$ wird der Punkt einfach. Wenn R keine mehrfachen Teile enthält, so ist ein allgemeiner Punkt von R einfach und der Ursprung eines einzigen Zweiges, für den

$$\varrho = \nu = \nu' = 1.$$

Über die Zweige einer Raumkurve vgl. noch Björling, *Stockholm Öfversigt* **38** (1881), Nr. 4, S. 3; *Archiv Math. Phys.* (2) **8**, 83 (1889); Möller, *Lund Årskr.* **21** (1884—1885), Nr. 2; Versluys, *Amsterdam Verslagen* (4) **14**, 482 (1905); **15**, 342 (1906), *Archive Teyler* (2) **10**⁴, 253 (1907).

Mit der Betrachtung der Zweige kann man die Untersuchungen über die projektivischen infinitesimalen Eigenschaften der Raumkurven in Verbindung bringen. Sie stehen in Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der projektiven Differentialinvarianten: vgl. Halphen, *J. éc. pol.* **47**, 1 (1880); Wilczynski, *Amer. Math. Soc. Trans.* **6**, 99 (1905); *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig 1906, p. 238ff.; Denton, *Amer. Math. Soc. Trans.* **14**, 175

(1913), die insbesondere die Invariante bestimmten, deren identisches Verschwinden die in einem linearen Strahlenkomplex enthaltenen Kurven (vgl. Kap. XXXVII, § 1) charakterisiert, und ferner die Differentialgleichungen der kubischen Raumkurven und der Raumkurven 4. Ordnung 1. Art aufgestellt haben. Verallgemeinerungen gab Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 1 (1897).

Tangenten und *Schmiegungsebenen von R* sind die Tangenten und Schmiegungsebenen der Zweige von R; in einem s-fachen Punkt gibt es höchstens s.

Multiplizität des Schnittes von R mit einer Fläche F in einem gemeinsamen Punkte O heißt die Summe der Multiplizitäten des Schnittes von F mit den Zweigen von R, die von O ausgehen. Wenn F keine Teile von R enthält, wird die Summe aller ihrer Schnittmultiplizitäten mit R eine endliche Zahl und ändert sich nicht, wenn man an Stelle von F eine andere Fläche von derselben Ordnung nimmt, die keine Teile von R enthält. Ist F eine Ebene, so wird diese Summe die Ordnung von R (vgl. § 1). Es folgt daraus noch, daß, wenn eine Kurve R von der Ordnung n und eine Fläche F von der Ordnung p nicht unendlich viele Punkte gemein haben, die Summe ihrer Schnittmultiplizitäten np ist.

Die Multiplizität des Schnittes eines Zweiges von der Ordnung v mit einer Fläche, die im Ursprung O des Zweiges einen r-fachen Punkt besitzt, ist wenigstens vr und größer nur dann, wenn die Tangente des Zweiges in O auch eine Tangente der Fläche in O ist.

Mithin:

Wenn eine Kurve R und eine Fläche F einen Punkt O gemein haben, der für die eine s-fach und für die andere r-fach ist, so wird die Multiplizität ihres Schnittes in O wenigstens gleich sr und größer nur dann, wenn R und F in O eine gemeinsame Tangente haben.

Es folgt daraus, daß, *wenn drei algebraische Flächen in einem gemeinsamen Punkte O die Multiplizitäten r_1, r_2, r_3 besitzen, dieser Punkt wenigstens $r_1 r_2 r_3$ von ihren Schnittpunkten absorbiert und eine größere Anzahl nur dann, wenn die Tangentialkegel in O eine gemeine Seitenlinie haben.* Einen algebraischen Beweis dieses Satzes hat Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **24**, 165 (1896) geliefert.

§ 5. Klasse und Rang einer Raumkurve. Ihre Tangentenfläche.

Klasse einer Raumkurve R heißt die Anzahl ihrer Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt P des Raumes gehen, falls

nur entsprechend dem Halphenschen Satze (§ 4) eine dieser Ebenen, wenn sie Schmiegungsebene eines Zweiges mit dem Ursprung O und der Charakteristik (ν, ϱ, ν') ist, ν'-mal gezählt wird, falls P nicht auf der Tangente des Zweiges in O liegt, $(\varrho + \nu')$-mal, falls P auf dieser Tangente liegt, und $(\nu + \varrho + \nu')$-mal, falls P nach O fällt.

Die Tangenten von R bilden eine algebraische abwickelbare Regelfläche, die *Tangentenfläche* von R, und ihre Ordnung, d. h. die Anzahl der Tangenten, die von einer allgemeinen Geraden g getroffen werden, heißt der *Rang* von R (Cremona nennt dagegen *Klasse* von R den Rang und *Klasse der Tangentenfläche* die Klasse von R).

Eine Raumkurve, die Fläche ihrer Tangenten und das Gewinde ihrer Schmiegungsebenen bilden eine geschlossene Gesamtheit, in der jedes der drei Gebilde die übrigen beiden bestimmt. Das erste und das dritte entsprechen einander dual, das zweite ist sich selbst dual zugeordnet.

Die Anzahl Male, die man bei der Berechnung des Ranges den Schnitt der Geraden g mit einer Tangente von R zählen muß, bestimmt sich, indem man R aus einem Punkte von g auf eine Ebene projiziert, da der gesuchte Rang dann gleich der Klasse der Projektionskurve wird. Es ergibt sich so, daß eine Tangente von R, insofern sie einen Zweig (ν, ϱ, ν') mit dem Ursprung O berührt, für die Tangentenfläche die Multiplizität ϱ hat; hingegen hat O als Ursprung des Zweiges selbst die Multiplizität $\nu + \varrho$, d. h. es gehen durch O $\nu + \varrho$ Tangenten von R, die mit der Tangente des Zweiges in O zusammenfallen. Dual entsprechend berührt eine Schmiegungsebene von R, als Schmiegungsebene eines Zweiges (ν, ϱ, ν') mit dem Ursprung O, die Tangentenfläche $(\varrho + \nu')$-punktig in jedem Punkte der Tangente des Zweiges in O, d. h. sie enthält $\varrho + \nu'$ Tangenten von R, die mit jener Tangente zusammenfallen.

Ist O ein allgemeiner Punkt von R, so ist er doppelt für die Tangentenfläche, seine Tangente einfach, und die Schmiegungsebene enthält zwei mit dieser zusammenfallende Tangenten.

Vgl. Halphen, *Bull. Soc. math.* **6**, 10 (1878); Fine, *Am. J. of Math.* 8, 156 (1886); Bertini, *Introduzione*, p. 355 ff.

Da eine allgemeine Ebene die Tangentenfläche von R in einer Kurve schneidet, die in jedem Schnittpunkt M mit R einen Doppelpunkt (Rückkehrpunkt) hat und die Tangenten in dem Doppelpunkt beide mit der Spur der Schmiegungsebene von R in M

zusammenfallen, nennt man R die *Rückkehrkante* oder *Kuspidalkurve* der Tangentenfläche.

Hat R den Rang r, so trifft eine beliebige Tangente von R, als Tangente eines Zweiges (ν, ϱ, ν') in seinem Ursprung,

$$r - (\nu + 2\varrho + \nu')$$

andere Tangenten. Eine allgemeine Tangente trifft deswegen $r - 4$ andere Tangenten. Der Ort der Treffpunkte ist die *Knotenkurve* der Tangentenfläche von R, und die durch diese Paare von Tangenten bestimmten Ebenen (die *doppelt berührenden Ebenen* von R) umhüllen eine neue abwickelbare Fläche, die *doppelt berührende abwickelbare Fläche* von R.

§ 6. Die Cayleyschen Formeln. Formeln von Salmon, Zeuthen, Cremona und allgemeinere Formeln.

Wendet man die Plückerschen Formeln (Bd. II[1], S. 286) auf den Kegel an, der eine Raumkurve R aus einem allgemeinen Punkte projiziert, und auf die Kurve, die sich als Schnittkurve der Tangentenfläche von R mit einer allgemeinen Ebene ergibt, so erhält man ein Formelsystem, das die grundlegenden Charaktere von R verknüpft und aufgestellt worden ist von Cayley, *J. de Math.* (1) **10**, 245 (1845), *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 18 (1850), *Papers I,* p. 207, *Quart. Journ.* **7**, 105 (1866), *Papers V*, p. 511.

Die Kurve R sei von der Ordnung n, dem Range r, der Klasse n' und habe keine anderen singulären Zweige als solche mit den Charakteristiken (2, 1, 1) (1, 2, 1), (1, 1, 2), und zwar der Reihe nach α, β, α', d. h. α *stationäre Punkte* oder *Spitzen*, β *stationäre Tangenten* oder *Wendepunkte* und α' *stationäre Ebenen*. Es sei ferner h die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte, H die der wirklichen Doppelpunkte von R, b die Klasse der doppelt berührenden abwickelbaren Fläche und h', H' und b' die hierzu dual entsprechenden Zahlen, nämlich h' die Anzahl der Geraden einer allgemeinen Ebene, durch die je zwei Schmiegungsebenen in zwei verschiedene Punkte von R hindurchgehen (die sogenannten *Achsen* von R), H' die Anzahl der doppelten Schmiegungsebenen von R, b' die Ordnung der Knotenkurve der Tangentenfläche. Schließlich sei G die sich selbst dual entsprechende Anzahl der Doppeltangenten von R, d. h. der doppelten Erzeugenden der Tangentenfläche.

Zwischen diesen 13 Zahlen bestehen dann die folgenden *sechs Cayleyschen Relationen:*

$$r = n(n-1) - 2(h+H) - 3\alpha,$$
$$n = r(r-1) - 2(b+G) - 3(n'+\beta),$$
$$n' + \beta - \alpha = 3(r-n);$$
$$r = n'(n'-1) - 2(h'+H') - 3\alpha',$$
$$n' = r(r-1) - 2(b'+G) - 3(n+\beta),$$
$$n + \beta - \alpha' = 3(r-n').$$

Es folgen daraus andere wichtige Beziehungen, z. B.

$$b - b' = n - n',$$
$$\alpha - \alpha' = 2(n-n'),$$
$$(h+H) - (h'+H') = \tfrac{1}{2}(n-n')(n+n'-7).$$

Aus den vorstehenden Formeln kann man, wenn man sieben *geeignete* unter den 13 Charakteren kennt (z. B. $n, h, H, H', \alpha, \beta, G$), die anderen sechs berechnen.

Wir fügen noch die folgenden Ausdrücke für das Geschlecht p von R hinzu, das mit dem Geschlecht einer ebenen Projektion von R und auch mit dem Geschlecht eines ebenen Schnittes ihrer Tangentenfläche zusammenfällt:

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - h - H - \alpha \\ &= \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - h' - H' - \alpha' \\ &= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - n - b' - G - \beta \\ &= \tfrac{1}{2}(r-1)(r-2) - n' - b - G - \beta. \end{aligned}$$

Für die vorstehenden Formeln vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 5ff.; Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 105ff.; Bertini, *Introduzione*, p. 404. Außerdem Hensel und Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln,* Leipzig 1902, S. 460, und betreffs der Formel $2h = n(n-1) - r$ (für $\alpha = H = 0$), Beck, *Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich* **52**, 266 (1907); R. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verwandtsch. III*, Leipzig 1909, S. 14.

Auf die Aufsuchung einer oberen Grenze von n und p für einen gegebenen Wert von r hat sie Rosenblatt, *Cracovie Acad. Bull.* 1911, p. 292 angewendet.

Andere Formeln, die andere Singularitäten einer Kurve und ihrer Tangentenfläche ausdrücken, wurden angegeben von Salmon, *Dublin Trans.* **23**, 461 (1857) und besonders von Zeuthen, *Ann. di Mat.* (2) **3**, 175 (1869), Auszug *C. R.* **67**, 225 (1868), der sie durch Anwendung des Korrespondenzprinzipes von Chasles (Bd. II[1], S. 344) gefunden hat, und um die genaue Multiplizität jedes sich selbst entsprechenden Elementes zu bestimmen, die von ihm *Nouv. Ann.* (2) **6**, 200 (1867) angegebene Regel verwendete, und von Cremona, *Grundzüge,* S. 81 ff, der auf die abwickelbaren Flächen die Polarentheorie angewendet hat. Eine methodische Darstellung findet sich auch bei Cayley, *Quart. Journ.* **11**, 294 (1871), *Papers VIII,* p. 72. Vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 660 ff.

Z. B. ist die Anzahl der Tangenten von R, welche die Kurve wieder schneiden,

$$r(n-4)+4h-2n(n-3)-2\beta-4G,$$

die Anzahl der Punkte, durch die drei Tangenten in drei verschiedenen Punkten von R gehen,

$$\tfrac{1}{3}[-r^3+13r^2-42r+8n'+b'(3r-26)-2G],$$

und dual entsprechend die Anzahl der dreifach berührenden Ebenen

$$\tfrac{1}{3}[-r^3+13r^2-42r+8n+b(3r-26)-2G].$$

Bezüglich dieser letzten Zahl s. auch Zeuthen, *Nouv. Ann.* (2) **7**, 402 (1868).

W. F. Meyer, *Gött. Nachr.* 1890, S. 366, 493, 1891, S. 14, *Monatsh. f. Math.* **4**, 229, 331 (1893), *Math. Ann.* **43**, 286 (1893) hat, zunächst für rationale Kurven, die Diskriminanten und Resultanten der Gleichungen untersucht, von denen die fünf einfachsten Singularitäten einer Raumkurve (stationäre Ebenen, in einem Punkt berührende und in einem anderen oskulierende Ebenen, dreifach berührende Ebenen, in einem Punkt berührende und in einem anderen schneidende Gerade, in vier Punkten schneidende Gerade) abhängen, was zu der Betrachtung höherer Singularitäten (Doppelpunkte, Wendetangenten usw.) führt.

Durch Einführung des Geschlechtes p kann man (s. Bd. II[1],

S. 309) allgemeinere Formeln für eine Kurve von der Ordnung n, dem Range r, der Klasse n' *mit beliebigen Singularitäten*, d. h. mit Zweigen von der Charakteristik (ν, ϱ, ν'), erhalten, nämlich die Formeln:

$$\sum(\nu - 1) + r - 2n = 2p - 2,$$

$$\sum(\varrho - 1) + n + n' - 2r = 2p - 2,$$

$$\sum(\nu' - 1) + r - 2n' = 2p - 2.$$

Aus ihnen folgt, indem man die erste Gleichung mit 3, die zweite mit 2 multipliziert und alle drei addiert, die Gleichung

$$\sum(3\nu + 2\varrho + \nu' - 6) = 4(n + 3p - 3),$$

die aussagt, daß *für eine beliebige Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p die Anzahl der stationären Ebenen*

$$4(n + 3p - 3)$$

beträgt und durch jeden singulären Zweig (ν, ϱ, ν') *um*

$$3\nu + 2\varrho + \nu' - 6$$

Einheiten erniedrigt wird.

Durch Projektion der Kurve läßt sich in ähnlicher Weise zeigen, daß *die Klasse und der Rang der Kurve* $3(n + 2p - 2)$ *und* $2(n + p - 1)$ *werden und durch jeden Zweig* (ν, ϱ, ν') *eine Erniedrigung um* $2\nu + \varrho - 3$ *und* $\nu - 1$ *Einheiten erfahren.*

Vgl. Halphen, *Bull. Soc. math.* **6**, 10 (1878); Segre, *Ann. di Mat.* (2) **22**, 86 (1893); Bertini, *Introduzione*, S. 401ff.

§ 7. Die vollständige Schnittkurve zweier Flächen. Äquivalenz einer Raumkurve.

Der vollständige Schnitt zweier Flächen F_m, F_μ von den Ordnungen m, μ, die keine gemeinsamen Teile besitzen, ist eine Kurve von der Ordnung $m\mu$, von der ein Punkt nur dann ein mehrfacher ist, wenn er wenigstens für eine der beiden Flächen mehrfach oder ein Berührungspunkt der Flächen ist.

Ein Punkt, der s-fach für F_m und σ-fach für F_μ, ist wenigstens $s\sigma$-fach für die Schnittkurve und hat für diese eine größere Multiplizität nur dann, wenn die in ihm an die beiden Flächen gelegten Tangentialkegel einen gemeinsamen Teil besitzen.

Haben die beiden Flächen D einfache und K stationäre Berührungen, so werden die charakteristischen Zahlen ihrer Schnittkurve durch die folgenden Formeln geliefert, die (bis auf die Formel für das Geschlecht) von Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 23 (1850) herrühren und sich bei Cremona, *Grundzüge*, S. 99 und Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 128 wiederfinden:

$$n = m\mu, \quad H = D, \quad H' = G = \beta = 0, \quad \alpha = K,$$

$$r = m\mu(m + \mu - 2) - 2D - 3K,$$

$$n' = 3m\mu(m + \mu - 3) - 6D - 8K,$$

$$h = \tfrac{1}{2}m\mu(m - 1)(\mu - 1),$$

$$\alpha' = 2m\mu(3m + 3\mu - 10) - 3(4D + 5K),$$

$$h' = \tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 3)[9m\mu(m + \mu - 3) - 12(3D + 4K) - 22] + \tfrac{5}{2}m\mu + (3D + 4K)(6D + 8K + 7),$$

$$b = \tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 2)[m\mu(m + \mu - 2) - 2(2D + 3K) - 10] + 4m\mu + 10D + \tfrac{27}{2}K + \tfrac{1}{2}(2D + 3K)^2,$$

$$b' = \tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 2)[m\mu(m + \mu - 2) - 2(2D + 3K) - 4] + 4D + \tfrac{11}{2}K + \tfrac{1}{2}(2D + 3K)^2,$$

$$p = \tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 4) - D - K + 1.$$

Die Formel für h wurde von Cayley, *J. de Math.* (1) **10**, 250 (1845), *Papers I*, p. 211 angedeutet, dann von Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **2**, 68 (1847) gegeben. Für diese s. auch Picard und Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indép. I*, Paris 1897, p. 214.

Für die Anzahlen der Singularitäten der doppelt berührenden abwickelbaren Fläche einer Raumkurve und allgemeiner der abwickelbaren, von einer immer zwei gegebene Kurven berührenden Ebene umhüllten Fläche, vgl. Bischoff, *J. f. Math.* **59**, 394 (1861).

Da für eine irreduzible Kurve $p \geqq 0$ ist, folgt aus dem Wert von p, daß *die Höchstzahl der Punkte, in denen F_m, F_μ sich berühren können, ohne daß ihre Schnittkurve zerfällt,*

$$\tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 4) + 1$$

beträgt.

Ferner, *wenn die Anzahl der Berührungspunkte größer als*

$\frac{1}{2}m\mu(m+\mu-2)$, *ist sie unendlich, d. h. es existiert eine Berührungskurve.*

Über die Anzahlen der Doppelpunkte und Spitzen des Schnittes zweier Flächen vgl. noch Spottiswoode, *J. f. Math.* **42**, 372 (1851).

Ein Punkt der Kurve, der für F_m s-fach und für F_μ σ-fach ist, erniedrigt die Zahlen p und h um

$$\tfrac{1}{2}s\sigma(s+\sigma-2)$$

und

$$\tfrac{1}{2}s\sigma(s-1)(\sigma-1)$$

Einheiten, während ein Berührungspunkt der beiden Flächen wohl den Wert von p, aber nicht den von h erniedrigt.

Vgl. hierüber J. N. van der Vries, *Proc. Amer. Acad. of arts and sciences* **38**, 473 (1902), wo der Einfluß, den ein singulärer Punkt auf h ausübt, auch für eine Kurve mit beliebigen Singularitäten untersucht und bemerkt wird, daß er auch von der Lage der Tangenten im singulären Punkt abhängt.

Über die Erniedrigung, die im *Range* der Kurve ein gemeinsamer und irgendwie singulärer Punkt von F_m und F_μ hervorruft, s. Guccia, *C. R.* **120**, 816 (1895); Versluys, *Amsterdam Verslagen* (4) **14**, 38 (1905).

Die Gleichung der Schmiegungsebene in einem Punkte der Schnittkurve von F_m, F_μ wurde von Hesse, *J. f. Math.* **41**, 272 (1851), *Werke*, 1897, S. 263, in einer Form angegeben, aus der hervorgeht, daß die Berührungspunkte der von einem Punkte ausgehenden Schmiegungsebenen die Schnittpunkte der Kurve mit einer Fläche von der Ordnung $3(m+\mu-3)$ bilden. Auf einfachere Art erhielt die Gleichung dieser Fläche Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 1 (1864), der hier und *J. de Math.* (2) **8**, 297 (1863) auch die Gleichung einer Fläche von der Ordnung $2(3m+3\mu-10)$ abgeleitet hat, welche die Kurve in den Wendeberührungspunkten schneidet. Vgl. Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 154ff. und auch Bischoff, *J. f. Math.* **56**, 177 (1859), **58**, 179 (1860); Voß, *Math. Ann.* **8**, 96 (1875). Über die Gleichung der Schmiegungsebene s. noch Loria, *Palermo Circ. Mat. Rend.* **17**, 44 (1903).

Vgl. ferner Kap. XXXII, § 4.

Daß die Kurve, die der Tangentenfläche der Schnittkurve zweier sich nicht berührenden Flächen dual entspricht, nicht der vollständige Schnitt zweier Flächen sein kann, hat Hoßfeld, *Zschr. f. Math. u. Phys.* **29**, 242 (1884) gezeigt; vgl. dazu *Progr.* Eisenach 1896.

Wenn der Schnitt der Flächen F_m, F_μ in zwei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, den Rängen r_1, r_2, den Geschlechtern p_1, p_2, mit h_1, h_2 scheinbaren Doppelpunkten, H_1, H_2 wirklichen Doppelpunkten und α_1, α_2 Spitzen zerfällt, so erhält man, indem man noch mit i die Anzahl ihrer Schnittpunkte bezeichnet, die Formeln:

$$n_1 + n_2 = m\mu,$$

$$\begin{aligned} i &= n_1(m + \mu - n_1 - 1) + 2h_1 = n_2(m + \mu - n_2 - 1) + 2h_2 \\ &= n_1(m + \mu - 2) - r_1 - 2H_1 - 3\alpha_1 \\ &= n_2(m + \mu - 2) - r_2 - 2H_2 - 3\alpha_2, \end{aligned}$$

und daraus weiter

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}(n_1 - n_2)(m + \mu - 4),$$

$$h_1 - h_2 = \tfrac{1}{2}(n_1 - n_2)(m - 1)(\mu - 1),$$

$$r_1 - r_2 = (n_1 - n_2)(m + \mu - 2) - 2(H_1 - H_2) - 3(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$(1) \qquad i = \tfrac{1}{2}m\mu(m + \mu - 4) - p_1 - p_2 + 2,$$

so daß man z. B., wenn die beiden Teilkurven keine Knoten und Spitzen besitzen, *aus den Charakteren der einen die der anderen und die Anzahl ihrer Schnittpunkte berechnen kann.*

Insbesondere *wenn durch eine Kurve R von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten, die keine wirklichen mehrfachen Punkte besitzt, zwei Flächen von den Ordnungen m, μ gelegt werden, so berühren diese sich in $n(m + \mu - n - 1) + 2h$ Punkten.*

Es folgt daraus, daß, wenn durch R allgemein drei Flächen von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 gelegt werden, diese sich außer in R in

$$m_1 m_2 m_3 - n(m_1 + m_2 + m_3 - n - 1) - 2h$$

Punkten schneiden. Man kann sonach sagen, daß

$$n(m_1 + m_2 + m_3 - n - 1) + 2h$$

die Anzahl der gemeinsamen Punkte der drei Flächen ist, die durch die Kurve R absorbiert werden.

Diese Zahl heißt nach Cayley, *London M. Soc. Proc.* **3**, 165, 179 (1870), *Papers VII*, p. 225, 239, die *Äquivalenz* von R. Über das Problem ihrer Bestimmung vgl. Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **2**, 70 (1847), *Quart. J.* **7**, 327 (1866) und auch Salmon-Fiedler, *Algebra*, S. 374, *Raumgeom. II*, S. 595 ff.

Salmon a. a. O. und *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 23 (1850) (vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 145 ff.) hat außerdem die Formeln angegeben, welche die Charaktere n_1, r_1, h_1 und n_2, r_2, h_2 von zwei Kurven, die den Schnitt zweier Flächen F_m, F_μ bilden, verknüpfen, unter der Voraussetzung, daß die erste Kurve für F_m doppelt und für F_μ einfach ist. Bezeichnet i die Anzahl der gemeinsamen Punkte beider Kurven, so wird

$$2n_1 + n_2 = m\mu,$$
$$4r_1 - r_2 = (2n_1 - n_2)(m + \mu - 2) + 2n_1(\mu - 2),$$
$$8h_1 - 2h_2 = (\mu - 1)\,[(2n_1 - n_2)(m - 1) - 2n_1],$$
$$i = n_1(m + 2\mu - 4) - 2r_1.$$

Der wichtige, in dem vorigen nicht enthaltene Fall, wo F_μ zu F_m adjungiert ist (Kap. XXXIII, § 4), und F_m keine anderen Singularitäten besitzt als j Pinch-points und eine Knotenkurve von der Ordnung n_1 mit t für F_m triplanaren dreifachen Punkten (Kap. XXXI, § 3 und 5), wurde von Severi, *Torino Mem.* (2) **52**, 91 (1902) behandelt. Man findet:

$$n_2 = m\mu - 2n_1,$$
$$r_2 = m\mu(m + \mu - 2) - 2n_1(3\mu - m) - 2r_1 - 3j,$$
$$i = 2n_1(\mu - m + 1) + r_1 + \tfrac{3}{2}j.$$

Die Bestimmung der Äquivalenz wurde in allgemeineren Fällen von Cayley, *Phil. Trans.* **159**, 221 (1869), *Papers VI*, p. 350 ausgeführt und besonders von Noether, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 163 (1871), der den Fall behandelt hat, wo die Kurve für die drei Flächen eine mehrfache ist. Die Kurve sei von der Ordnung n, dem Range r und habe D wirkliche Knotenpunkte; die drei Flächen seien von den Ordnungen m_1, m_2, m_3, und die Kurve habe für sie der Reihe nach die Multiplizitäten s_1, s_2, s_3, dann wird sie äquivalent

$$n(s_2 s_3 m_1 + s_3 s_1 m_2 + s_1 s_2 m_3) - 2 s_1 s_2 s_3\left(n + \frac{r + 2D}{2}\right)$$

Schnittpunkten. Die Kurve selbst trifft den Restschnitt z. B. der beiden Flächen von den Ordnungen m_1 und m_2 in

$$n(s_1 m_2 + s_2 m_1) - 2 s_1 s_2\left(n + \frac{r + 2D}{2}\right)$$

Punkten.

Noether hat auch verwickeltere Fälle behandelt; wenn z. B. die gegebene Kurve in zwei Kurven zerfällt, von denen die eine für die drei Flächen der Reihe nach die Multiplizitäten s_1, s_2, s_3, die andere die Multiplizitäten s_1', s_2', s_3' besitzt, und man mit M und M' die Äquivalenzen der beiden Kurven und mit i die Anzahl ihrer gemeinsamen Punkte bezeichnet, so ist die Äquivalenz der gesamten Kurve

$$M + M' - i(s_2's_3's_1 + s_3's_1's_2 + s_1's_2's_3 - s_1's_2's_3'),$$

vorausgesetzt, daß nicht zwei der Anzahlen s_1, s_2, s_3 kleiner als die zwei entsprechenden der Anzahlen s_1', s_2', s_3' sind.

H. P. Hudson, *London M. Soc. Proc.* (2) **11**, 398 (1912), *Math. Ann.* **73**, 73 (1912) bestimmte die Äquivalenz einer Kurve, die für Flächen von einer genügend hohen Ordnung eine Berührungskurve bildet.

§ 8. Andere Resultate abzählender Art über schneidende und berührende Gerade und Kegelschnitte.

Auf mannigfache Art sind (von Cayley, Zeuthen u. a.) die Formeln entwickelt worden, welche die Lösung der abzählerischen Aufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen, die zu einer oder mehreren Kurven vorgegebene Beziehungen haben, bedeuten. Einzelne sind schon in § 6 angegeben, andere wollen wir jetzt noch anführen.

Wenn wir für eine Raumkurve die Voraussetzungen und Bezeichnungen des § 6 beibehalten, so bilden ihre Trisekanten eine Regelfläche von der Ordnung

$$(n-2)\left[h - \frac{n(n-1)}{6}\right],$$

und von ihren Quadrisekanten beträgt die Anzahl

$$\tfrac{1}{2}h(h - 4n + 11) - \tfrac{1}{24}n(n-2)(n-3)(n-13).$$

Diese beiden Formeln rühren her von Cayley, *Phil. Trans.* **153**, 453 (1863), *Papers V*, p. 168, der sie durch Zerfallen der Kurve und durch Auflösung gewisser Funktionalgleichungen unter der Voraussetzung ableitete, daß die gesuchten Zahlen nur von n und h abhängen können. Mit Benutzung des streng gefaßten Chasles schen Korrespondenzprinzipes (Bd. II[1], S. 344) ermittelte sie Zeuthen, *Ann. di Mat.* (2) **3**, 173 (1869). Nach ähnlichen Methoden wie Cayley fanden sie Picquet, *C. R.* **77**, 474 (1873),

Bull. Soc. math. **1**, 260 (1873), die erste noch Geiser, *Collectanea math. in mem. D. Chelini*, Milano 1881, p. 294; die zweite Krey, *Math. Ann.* **15**, 223 (1879); beide Schubert, *Kalkül*, S. 319; Berzolari, *Rend. Circ. Mat.* **9**, 186 (1895); Tanturri, *Ann. di Mat.* (3) **4**, 67 (1900); Beck, *Zürich. Vierteljahrsschr.* **52**, 266 (1907).

Die Anzahl der gemeinsamen Sehnen zweier Kurven von den Ordnungen n_1, n_2 mit h_1, h_2 scheinbaren Doppelpunkten und mit i gemeinsamen Punkten ist

$$h_1 h_2 + \frac{1}{4} n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1) - i(n_1 - 1)(n_2 - 1) + \frac{i(i-1)}{2}$$

wie fand Cremona, *J. f. Math.* **60**, 192 (1862), und wie aus der Formel hervorgeht, welche die Anzahl der gemeinsamen Strahlen zweier Kongruenzen liefert: Halphen, *C. R.* **68**, 141 (1869), **74**, 41 (1872). Vgl. auch Zeuthen, *C. R.* **78**, 1553 (1874); Schubert, *Math. Ann.* **10**, 96 (1876), *Kalkül*, S. 62; Schoute, *Amsterdam Verslagen* (2) **14**, 251 (1879); Beck, a. a. O.; R. Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie I*, Leipzig 1892, S. 42.

Die Anzahl der Sehnen einer Kurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten, die zwei andere Kurven von den Ordnungen n_1, n_2 treffen, wird, wenn diese mit der ersten i_1, i_2 Punkte und miteinander i_{12} Punkte gemein haben,

$$n_1 n_2 \left[h + \frac{n(n-1)}{2}\right] - (n-1)(n_1 i_2 + n_2 i_1) - h i_{12} + i_1 i_2 .$$

Die Anzahl der Geraden, die vier gegebene Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4, von denen die mit den Ordnungen n_r, n_s i_{rs} Punkte gemein haben, beträgt

$$2 n_1 n_2 n_3 n_4 - \sum n_p n_q i_{rs} + \sum i_{pq} i_{rs},$$

wobei die Indizes p, q, r, s alle voneinander verschieden sein müssen, so daß die erste Summe sechs und die zweite drei Glieder umfaßt.

Bei diesen Formeln ist vorausgesetzt, daß die Punkte, in denen jede der Geraden die gegebenen Kurven trifft, voneinander verschieden sind. Vgl. Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **8**, 45 (1853), *Dublin Trans.* **23**, 461 (1855); außerdem Cayley a. a. O., Picquet a. a. O. mit einer Berichtigung, die Guccia, *Palermo Rend. Circ. Mat.* **1**, 27 (1885) angegeben hat.

Einige der vorstehenden Probleme hat auch Severi, *Torino*

Mem. (2) **50**, 81 (1901) durch eine Vervollständigung der funktionellen Methode Cayleys und auch mittels des Korrespondenzprinzipes von Cayley-Brill (Bd. II[1], S. 345), behandelt und u. a. auch für eine Kurve von der Ordnung n, der Klasse n', dem Geschlecht p die Anzahl der *Hauptsehnen* bestimmt, d. h. der Sehnen, die in den Schmiegungsebenen ihrer beiden Treffpunkte liegen. Diese Anzahl beträgt

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2}+\frac{(n'-3)(n'-4)}{2}-12p$$

und wird durch jeden s-fachen Punkt mit nicht zusammenfallenden Tangenten um $\frac{s(s-1)}{2}$ Einheiten verringert.

Dieselben Probleme hat Brill auf algebraischem Wege behandelt, indem er sie zurückführte auf Probleme der ebenen Geometrie, die sich auf die Schnitte und Berührungen der Kurven eines linearen Systems mit einer auf die gegebene Raumkurve birational bezogenen Kurve beziehen: *Gött. Nachr.* 1870, S. 525, *Math. Ann.* **2**, 473 (1870), **3**, 459 (1871), **4**, 510, 527 (1871), **5**, 378 (1872), **6**, 33 (1873). Die Ordnung der von den Trisekanten gebildeten Regelfläche hat Brill, *Gött. Nachr.* 1901, S. 167, ebenfalls auf algebraischem Wege abgeleitet.

Die Singularitäten der Regelflächen, die gebildet werden von den Trisekanten einer Kurve oder von den Sehnen, die eine andere Kurve treffen, oder von den Geraden, die drei gegebene Kurven treffen, untersuchten Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **8**, 45 (1853), *Dublin Trans.* **23**, 461 (1857); Cayley, *Phil. Trans.* **153**, 453 (1863), **154**, 559 (1864), *Papers V*, p. 168, 201; Zeuthen, *Ann. di Mat.* (2) **3**, 175 (1869); Rupp, *Math. Ann.* **18**, 366 (1881); Kluyver, *Amsterdam Verslagen* (3) **7**, 121 (1890). Vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 296.

Bezeichnet für eine solche Regelfläche N den Grad, R den Rang, D die Summe der Ordnungen ihrer doppelten Leitkurven, E die Anzahl der Doppelerzeugenden, D' die Summe der Ordnungen der übrigen Doppelkurven außer den doppelten Leitkurven und Doppelerzeugenden (so daß $D+E+D'$ die Gesamtzahl der Doppelpunkte eines ebenen Schnittes wird), S die Anzahl der stationären Erzeugenden (oder der Rückkehrpunkte einer allgemeinen ebenen Schnittkurve), d. h. im allgemeinen der Erzeugenden, die durch die stationären Punkte einer Leitkurve gehen, dann wird für die *Regelfläche mit drei Leitkurven* (ohne gemeinsame Punkte)

von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, den Rängen r_1, r_2, r_3 mit h_1, h_2, h_3 scheinbaren Doppelpunkten und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stationären Punkten:

$$N: \quad 2n_1n_2n_3,$$

$$R = 2n_1n_2n_3 + n_2n_3r_1 + n_3n_1r_2 + n_1n_2r_3,$$

$$D = \tfrac{1}{2}n_1n_2n_3(n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2 - 3),$$

$$E = \tfrac{1}{2}n_1n_2n_3(n_1 + n_2 + n_3 - 3) + n_2n_3h_1 + n_3n_1h_2 + n_1n_2h_3,$$

$$D' = \tfrac{1}{2}n_1n_2n_3[4n_1n_2n_3 - (n_2n_3 + n_3n_1 + n_1n_2) - 2(n_1 + n_2 + n_3) + 5],$$

$$S = n_2n_3\alpha_1 + n_3n_1\alpha_2 + n_1n_2\alpha_3.$$

Für die *Regelfläche der Sehnen* einer Kurve mit der Charakteristik $(n_1, r_1, h_1, \alpha_1)$, die eine Kurve mit der Charakteristik $(n_2, r_2, h_2, \alpha_2)$ treffen, wird:

$$N = n_2[h_1 + \tfrac{1}{2}n_1(n_1 - 1)],$$

$$R = n_1n_2(n_1 - 1) + r_1n_2(n_1 - 3) + h_1r_2 - 3\alpha_1n_2,$$

$$D = \tfrac{1}{2}n_2[n_1n_2(n_1 - 1)^2 - n_1(n_1 - 1) + h_1(h_1 - 1)],$$

$$E = h_1h_2 + \tfrac{1}{4}n_1n_2(n_1 - 1)(n_2 - 1) + 3n_2(n_1 - 2)[h_1 - \tfrac{1}{6}n_1(n_1 - 1)],$$

$$D' = \tfrac{1}{2}n_2(n_1 - 2)(n_1 - 3)[\tfrac{1}{4}n_1(n_1 - 1) + h_1] + \tfrac{1}{2}n_2(n_2 - 1)[h_1^2 + h_1(n_1^2 - n_1 - 1) + \tfrac{1}{4}n_1(n_1 - 1)(n_1^2 - 5n_1 + 2)],$$

$$S = h_1\alpha_2 + \alpha_1n_2(n_1 - 2).$$

Für die *Regelfläche der Trisekanten* ist die Ordnung N und die Zahl E, welche das Sechsfache von der Anzahl der Quadrisekanten ist, bereits angegeben, ferner wird, wenn die Kurve die Charakteristik (n, r, h, α) hat:

$$R = -2h^2 + h(n^2 + 5n - 24) - \tfrac{1}{3}n(8n^2 - 42n + 52) - 3\alpha(h - 2n + 6),$$

$$D = \tfrac{1}{2}n(h - n + 1)(h - n + 2),$$

$$D' = \tfrac{1}{2}h^2n(n - 1) - \tfrac{1}{6}h(n^4 - 5n^3 + 5n^2 - 49n + 120) + \tfrac{1}{72}n(n^5 - 6n^4 + 31n^3 - 270n^2 + 868n - 840),$$

$$S = \alpha(h - 2n + 6).$$

Die funktionelle Methode und das Auflösen einer Kurve in gerade Linien haben Berzolari, *Lomb. Istit. Rend.* (2) **33**, 664, 809 (1900) und Severi, *Torino Atti* **35**, 774 (1900), **36**, 74 (1901) auch verwendet, um die Anzahl der *Kegelschnitte* zu bestimmen, welche eine oder mehrere gegebene Raumkurven schneiden oder berühren. Für einige besondere, rationale Kurven betreffende Fälle s. auch Stuyvaert, *Belgique Mém.* **62** (1902), N. 2, *Diss.* Gand 1902, p. 1—11.

Z. B. existieren

$$18nh - 64h + \tfrac{1}{3}(19n^3 - 261n^2 + 1052n - 1290)$$

Kegelschnitte, welche eine Kurve von der Ordnung n mit h scheinbaren Doppelpunkten in drei Punkten schneiden und außerdem fünf allgemeine Sehnen der Kurve treffen (für $n = 4$, $h = 2$, vgl. Lüroth, *Math. Ann.* **3**, 124 (1871); Noether, ebenda, 569; Cremona, *Math. Ann.* **4**, 219 (1871)).

Es gibt ferner

$$4h^2 + 2(2n^2 - 5n + 1)h - \tfrac{1}{3}n(n-1)(n^2 - 2n + 3)$$

Kegelschnitte, welche vier gegebene Ebenen berühren und eine gegebene Kurve (n, h) in vier Punkten schneiden.

Die Kegelschnitte, welche eine Kurve (n, h) in fünf Punkten schneiden und durch einen gegebenen Punkt A gehen, der nicht auf der Kurve liegt, erfüllen eine Fläche von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(n-4)\left[h^2 + \tfrac{1}{3}(n^2 - 11n + 21)h - \tfrac{1}{60}n(n-2)(n-3)(7n-27)\right],$$

für welche der Punkt A die Multiplizität

$$\tfrac{1}{2}(n-4)\left[h^2 - (2n-5)h - \tfrac{1}{60}n(n-2)(n-3)(3n-23)\right]$$

und die Kurve die Multiplizität

$$\tfrac{1}{12}(n-3)(n-4)\left[6h - (n-2)(n+3)\right]$$

besitzt.

Die Ebenen, die eine Kurve (n, h) in n Punkten schneiden, von denen sechs auf einem Kegelschnitt liegen, umhüllen eine Fläche von der Klasse

$$\tfrac{1}{24}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\left[h - \tfrac{7}{30}n(n-1)\right].$$

Die Kegelschnitte, welche eine Kurve (n, h) in sieben Punkten schneiden, erfüllen eine Fläche von der Ordnung

$$\frac{1}{5040}(n-6)[840h^3+420(n^2-21n+50)h^2 \\ -42(7n^4-78n^3+27n^2+972n-1640)h \\ +n(n-2)(n-3)(29n^3+46n^2-3023n+6980)],$$

für welche die Kurve die Multiplizität

$$\frac{1}{240}(n-5)(n-6)[60h^2-20(n^2+5n-21)h \\ +(n-3)(n^3+35n^2-48n-72)]$$

besitzt.

Es gibt

$$2h^3-(n^2+23n-110)h^2-\tfrac{1}{2}(n^4-46n^3+209n^2+164n-1216)h \\ +\tfrac{1}{4}n(n^5-23n^4+97n^3+215n^2-1730n+2208)$$

Kegelschnitte, welche eine gegebene Kurve (n, h) in zwei Punkten berühren und in zwei anderen Punkten schneiden.

Es gibt

$$\frac{1}{5040}(n-6)(n-7)[420h^3-210(n-3)(n+10)h^2 \\ +21(n^4+40n^3-167n^2-146n+760)h \\ +n(n-3)(n^4-103n^3-21n^2+2323n-3880)]$$

Kegelschnitte, welche eine gegebene Kurve (n, h) in acht Punkten schneiden.

Um zu erkennen, wieweit die so gewonnenen Resultate gültig sind, muß man entscheiden können, ob jede Gattung von eigentlicken Raumkurven in ein System von Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, ausarten kann. Vgl. Zeuthen, *Enzykl. III*, C 3 (1906), Nr. 9. Diese Frage hat wenigstens teilweise Brill, *Math. Ann.* **64**, 289 (1907) beantwortet, indem er auf algebraischem Wege bewies, daß sich jede allgemeine Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p, für die $p < n-3$, in eine allgemeine Kurve von der Ordnung $n-1$ und dem Geschlecht p und in eine Gerade, die diese Kurve in einem Punkte trifft, auflösen läßt, so daß, indem man diesen Satz wiederholt anwendet, schließlich die Kurve, wenn $p=0$ ist, in n Gerade zerfällt, die sich so anordnen lassen, daß jede von der zweiten an nur die vorhergehende trifft, während die Kurve, wenn $p>0$, sich in $n-p-3$ Gerade, die diese An-

ordnung haben, und eine Kurve von der Ordnung $p+3$ und dem Geschlecht p, welche die letzte der Geraden trifft, auflösen läßt.

Mit den Fragen des Zerfallens hat sich (für Kurven in einem Raum von beliebig vielen Dimensionen) Giambelli, *Annães Sc. da Acad. Polyt. do Porto* **4**, 18 (1909) und besonders *Torino Mem.* (2) **59**, 433 (1909) beschäftigt in der Absicht, die Lösung des allgemeinen abzählerischen Problems für die linearen Räume, die eine gegebene algebraische Kurve in einer gewissen Anzahl Punkten schneiden, zu finden. Er hat die so einem linearen Raum auferlegte Bedingung allgemein in eine Summe von charakteristischen Bedingungen (nach der symbolischen Bezeichnungsweise Schuberts) zerlegten und hieraus, indem er die bereits von ihm *Torino Mem.* (2) **52**, 171 (1902) gewonnenen Resultate verwertete, die Lösung des angegebenen Problems abgeleitet, zunächst mit Hilfe einer besonderen Methode der Ausartung in den einzelnen numerischen Fällen, die sich darbieten, und darauf mit Hilfe einer geeigneten algebraischen symbolischen Methode auch ganz im allgemeinen. Für den Fall einer allgemeinen rationalen Kurve wird die Lösung auch durch ein analytisches Verfahren gefunden, das auf einer neuen allgemeinen Theorie der durch das Verschwinden von Formenmatrizes dargestellten Mannigfaltigkeiten beruht (vgl. Kap. XXXI, § 1).

§ 9. Schnittpunktsätze für Raumkurven und Flächen.

Die Schnittpunkttheorie der ebenen Kurven (Bd. II^1, S. 320) wurde auf Raumkurven und Flächen ausgedehnt von Gergonne, *Ann. de Math.* **17**, 214 (1826—27); Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures II,* Paris (1830) 1866, p. 262ff.; Plücker, *Ann. de Math.* **19**, 129 (1828—29), *Abh. I,* S. 83, *J. f. Math.* **16**, 47 (1836), *Abh. I,* S. 323, in berichtigter Form *System der Geometrie des Raumes,* Düsseldorf (1846) 1852, S. 41ff., *Abh. I,* S. 607ff.; Jacobi, *J. f. Math.* **15**, 285 (1836), *Werke III,* S. 329; Cayley, *Cambr. Dubl. Math. J.* **2**, 52 (1847), *Papers I,* p. 259.

So gelten z. B. die Sätze:

Wenn eine Kurve von der Ordnung np, die auf einer Fläche von der Ordnung p liegt, einen Teil des Schnittes zweier Flächen von der Ordnung n bildet, so liegt der Restschnitt, der die Ordnung $n(n-p)$ hat, auf einer Fläche von der Ordnung $n-p$ (Poncelet).

Setzen wir (Kap. XXX, § 2)

$$N(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1,$$

so schneiden sich alle Flächen von der Ordnung n, die durch $N(n) - 1$ gegebene Punkte hindurchgehen, „im allgemeinen" in einer Kurve von der Ordnung n^2, und alle Flächen, die durch $N(n) - 2$ gegebene Punkte gehen, schneiden sich „im allgemeinen" in weiteren

$$n^3 - N(n) + 2 = \frac{(n-1)(5n^2 - n - 12)}{6}$$

Punkten (Plücker, Jacobi).

Allgemeiner, wenn $m \geqq n$ und man auf einer Fläche F_n von der Ordnung n willkürlich $N(m) - N(m-n) - 1$ Punkte annimmt, so schneiden alle Flächen von der Ordnung m, die durch diese Punkte gehen, F_n in einer und derselben Kurve von der Ordnung mn (Plücker, Jacobi).

Eine Fläche von der Ordnung n enthält allemal Schnittpunkte dreier Flächen von den Ordnungen n, m, l $(n \geqq m \geqq l)$, falls sie von diesen Punkten

$$N(n) - N(n-m) - N(n-l) - 2,$$

wenn $n < m + l$, und

$$N(n) - N(n-m) - N(n-l) + N(n-m-l) - 1,$$

wenn $n \geqq m + l$, enthält (Plücker und exakter Jacobi).

Vgl. Cremona, *Grundzüge,* S. 21—23, 97; Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 3, 575.

Jacobi hat a. a. O. auch die algebraischen Beziehungen untersucht, die zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte dreier Flächen bestehen. Für den Fall, wo diese durch eine und dieselbe Kurve gehen, vgl. End, *Diss.* Tübingen 1888, *Math. Ann.* **35**, 82 (1889).

Andere Schnittpunktsätze bei Reye, *Math. Ann.* **2**, 475 (1870), (vgl. Kap. XXX, § 9). Allgemeinere Sätze bei Valentiner, *Raumkurven* (1881) auf Grund von Konstantenabzählungen und Noether, *Acta Math.* **8**, 161 (1886) auf Grund strenger und ausnahmslos gültiger algebraischer Methoden. Z. B. fand Noether den folgenden Satz, der einem für die ebenen Kurven gültigen Satz (Bd. II[1], S. 316) analog ist:

Wenn die Schnittkurve zweier Flächen von den Ordnungen

m, n in λ irreduzible Kurven zerfällt, die keine mehrfachen Punkte besitzen und im ganzen i einfache Schnittpunkte aufweisen, so ist die Bedingung, die den Flächen von der Ordnung $m+n-4$ dadurch auferlegt wird, daß sie durch diese i Punkte hindurchgehen sollen, $i-\lambda+1$ linear unabhängigen Bedingungen äquivalent.

Für $\lambda = 2$ erhält man, wie Noether bemerkt, einen genaueren Satz, den schon Valentiner, *Raumkurven,* S. 199 mitgeteilt hatte, nämlich daß *jede der i Bedingungen, die jenen Flächen durch die i gemeinsamen Punkte auferlegt werden, eine lineare Folge der $i-1$ übrigen ist.*

Andere Sätze bei Valentiner, *Tidsskrift* (4) **3**, 22 (1879).

Die Schnittpunktsätze hat Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 218 (1864) mit Hilfe des Abelschen Theorems abgeleitet, indem er die für die ebenen Kurven in Bd. II[1], S. 320 angedeutete Methode auf die Raumkurve R von der Ordnung mn und dem Geschlecht

$$p \quad mn(m+n-4) \quad + 1$$

ausdehnte, welche der vollständige Schnitt zweier nicht einander berührenden Flächen von den Ordnungen m und n ist.

Mit Hilfe derselben Methode hat er auch für die Raumkurve R die Probleme behandelt, die sich auf *Berührungsflächen* und deren *Systeme* beziehen, wobei sich ganz analoge Resultate wie für die Ebene ergeben. So *gehen durch $mnk-pr$ willkürlich auf der Kurve angenommene Punkte, wenn $k \geqq m+n-3$, im allgemeinen r^{2p} Flächen von der Ordnung k hindurch, welche die Kurve in p Punkten r-punktig berühren. Eine Fläche von der Ordnung k, die durch die festen Punkte und die Berührungspunkte von $r-1$ der r^{2p} Flächen hindurchgeht, enthält auch noch die Berührungspunkte einer r^{ten} Fläche.*

Wenn, immer unter der Voraussetzung $k \geqq m+n-3$, das Produkt mnk durch r teilbar ist, so existieren, indem man

$$mnk = (p+\mu)\,r$$

setzt, Systeme von Flächen der Ordnung k, die die Kurve in $p+\mu$ Punkten r-punktig berühren. Die Anzahl dieser Systeme beträgt r^{2p}, wenn k und r relativ prim sind, hingegen $r^{2p}-r'^{2p}$, wenn $k = k's$, $r = r's$ und k', s' relativ prim sind.

Ähnlich existieren $2^{p-1}(2^p-1)$ Flächen von der Ordnung $m+n-4$, welche die Kurve in jedem Punkte, wo sie sie treffen, d. h. in $p-1$ Punkten, zweipunktig berühren.

Über die Erweiterung des Abelschen Theorems auf Raumkurven und Flächen s. noch Poincaré, *C. R.* **100**, 40 (1885); *Am. J.* 8, 308 (1886).

Die Anzahl der Flächen eines linearen Systems von der Dimension k und der Ordnung m, die mit einer beliebigen gegebenen Raumkurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p eine Berührung von der Ordnung k haben, ist nach den Formeln in Bd. II[1], S. 325 zu berechnen. Sie ist von Halphen, *Bull. Soc. math.* **6**, 40 (1878) mit Hilfe der differentiellen Kovarianten und von Humbert, *Rend. Circ. Mat.* **4**, 109 (1890) mit Hilfe der Darstellung der Koordinaten des laufenden Punktes auf der Kurve durch Theta-Fuchssche Funktionen eines Parameters bestimmt worden. Für $k = 3$ vgl. auch Thalreiter, *München Ber.* **37**, 211 (1907).

Wenn die Kurve nur mehrfache Punkte mit nicht zusammenfallenden Tangenten besitzt, so wird diese Zahl

$$(1) \qquad (k+1)[mn + k(p-1)]$$

und muß sich um $s(k+1)$ Einheiten verringern, wenn s einfache Grundpunkte des linearen Systems auf der Kurve liegen. Wenn hingegen durch die Kurve h linear unabhängige Flächen des Systems gehen, so enthält es

$$(k-h+1)[mn + (k-h)(p-1)]$$

Flächen, die mit der Kurve eine Berührung von der Ordnung $k-h$ haben.

Wenn z. B. die Kurve nicht auf einer Fläche 2. Ordnung liegt, so besitzt sie $20n + 90(p-1)$ Punkte, in denen sie eine Berührung 9. Ordnung mit einer Fläche 2. Ordnung hat, hingegen wenn die Kurve auf einer Fläche 2. Ordnung liegt, enthält sie $18n + 72(p-1)$ Punkte, in denen sie eine Berührung 8. Ordnung mit einer Fläche 2. Ordnung hat.

Ist die gegebene Kurve der vollständige Schnitt von zwei Flächen, so liefert die Formel (1) die Grade der *Berührungsinvarianten* dreier Flächen bezüglich der Koeffizienten in ihren Gleichungen, das Verschwinden dieser Invarianten drückt die Bedingung dafür aus, daß zwei von den Schnittpunkten der Flächen zusammenfallen. Sind die Flächen von den Ordnungen m, m', m'', so ist z. B. der Grad bezüglich der Koeffizienten in der ersten Gleichung $m'm''(2m + m' + m'' - 4)$. Vgl. Salmon, *Quart. J.* **1**,

339 (1857); Moutard, *Nouv. Ann.* (1) **19**, 58 (1860); s. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 609.

Über die Erniedrigung, die in der Anzahl der Flächen eines allgemeinen Büschels, welche die Schnittkurve zweier Flächen berühren, ein gemeinsamer singulärer Punkt dieser Flächen hervorruft, vgl. Lo Monaco-Aprile, *Rend. Circ. Mat.* **18**, 164 (1904).

§ 10. Fortsetzung. Die Geometrie auf einer Raumkurve. Postulation einer Kurve für die Flächen gegebener Ordnung und verwandte Fragen.

Die Schnittpunktsätze des vorhergehenden Paragraphen lassen sich als Anwendungen ansehen der Theorie der linearen Scharen von Punktgruppen, die in Bd. II[1], Kap. XIV (S. 306—341) entwickelt worden ist und die auch für Raumkurven gilt, außer in den Teilen, die projektiven Charakter haben und wesentlich der ebenen Geometrie angehören, wie der Restsatz und die daraus folgende Konstruktion der linearen Scharen mittels adjungierten Kurven.

Auf einer Raumkurve wird eine lineare Schar g_n^r, abgesehen von eventuellen festen Punkten, durch die Schnittpunkte mit einem ∞^k-fachen linearen Flächensystem gebildet. Dabei besteht zwischen r, k und der Dimension t des linearen Systems, das von allen durch die Kurve hindurchgehenden Flächen des gegebenen Systems gebildet wird, die Beziehung

$$r = k - t - 1.$$

Die Zahl $k - t$ oder $r + 1$ drückt aus, wieviel verschiedene Bedingungen den Flächen des gegebenen Systems dadurch auferlegt werden, daß sie durch die Kurve hindurchgehen sollen, und heißt nach Cayley, *London M. S. Proc.* **3**, 165, 179 (1870), *Papers VII*, p. 225, 239 die *Postulation* der Kurve für diese Flächen. Die Bestimmung der Postulation ist demnach mit der Bestimmung der Zahl r gleichbedeutend.

Im übrigen läßt sich ebenso wie in der Ebene (Bd. II[1], S. 308) eine lineare Schar von der Dimension r immer durch ein ∞^r-faches lineares Flächensystem, von dem eine einzige Fläche durch jede Punktgruppe der Schar geht, aus der Kurve ausschneiden.

Zwei irreduzible Kurven (ohne mehrfache Punkte), welche zusammen den vollständigen Schnitt zweier Flächen bilden, heißen *zueinander residual* oder die eine der *Rest* der anderen. Zwei Kur-

ven, welche den Rest einer dritten bilden, heißen *zueinander korresidual.*

Wenn zwei Kurven R und R' zueinander residual sind, so heißt zu R *adjungiert* jede Fläche, die durch R' geht. Der *Restsatz für die Raumkurven* lautet dann wie folgt:

Ist auf R eine lineare Schar beliebig gegeben, so gehört jede zu R adjungierte Fläche, die durch eine Punktgruppe der Schar geht, zu einem linearen System von adjungierten Flächen, welches die ganze Schar ausschneidet (Noether).

Insbesondere schneiden auf R alle adjungierten Flächen einer gegebenen Ordnung, ob sie durch eine gegebene Punktgruppe von R gehen oder nicht, eine vollständige lineare Schar aus, und wenn R den vollständigen, von mehrfachen Punkten freien Schnitt zweier Flächen bildet, so schneiden die Flächen einer beliebigen gegebenen Ordnung aus R eine lineare Vollschar aus.

Um demnach auf R die durch eine gegebene Punktgruppe G charakterisierte Vollschar zu konstruieren, genügt es, durch G eine zu R adjungierte Fläche von der Ordnung ϱ zu legen, ihren Restschnitt G' mit R zu bestimmen und R mit dem ganzen System von adjungierten Flächen der Ordnung ϱ zu schneiden, das durch die Punktgruppe G' hindurchgeht.

Es folgt aus dem vorstehenden Satze auch, daß jede irreduzible, von mehrfachen Punkten freie Kurve, welche den vollständigen Schnitt zweier Flächen bildet, eine *Normalkurve* ist, d. h. sich nicht als Projektion einer Kurve der gleichen Ordnung in einem Raum von mehr als drei Dimensionen gewinnen läßt. Dies gilt aber nicht, wenn die Kurve mehrfache Punkte hat. Vgl. Severi, *Rend. Circ. Mat.* **15**, Fußnote zu p. 51 (1901), **17**, 81 (1903).

Die Postulation von R läßt sich in einzelnen Fällen genau angeben, wie aus den folgenden Sätzen hervorgeht.

Ist R der vollständige Schnitt von zwei Flächen von den Ordnungen μ, ν, aber im übrigen irreduzibel oder reduzibel und mit beliebigen Singularitäten von endlicher Anzahl behaftet, so wird ihre Postulation für die Flächen von einer Ordnung $l \geqq \mu + \nu - 3$:

$$(1) \qquad l\mu\nu - \tfrac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4),$$

während sie für $l \leqq \mu + \nu - 4$ ist:

$$l\mu\nu - \tfrac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 4) + \binom{\mu + \nu - l - 1}{3}.$$

Ist R wieder der vollständige Schnitt zweier Flächen von den

Ordnungen μ, ν, *aber irreduzibel und von mehrfachen Punkten frei, hat es ferner die Ordnung* n *und das Geschlecht* p, *so schneiden die Flächen von einer Ordnung* $l \geqq \mu + \nu - 3$ *auf* R *nicht speziale Vollscharen aus, so daß die Postulation von* R *für sie*

$$nl - p + 1$$

ist; die Flächen von der Ordnung $\mu + \nu - 4$ *schneiden auf* R *die kanonische Schar aus und die Flächen niedrigerer Ordnung speziale Vollscharen.*

Wenn hingegen zwei Flächen von den Ordnungen μ, ν *durch eine irreduzible und von mehrfachen Punkten freie Kurve* R *von der Ordnung* n *und dem Geschlecht* p *hindurchgehen und sich außerdem in einer ebenfalls irreduziblen und von mehrfachen Punkten freien Kurve* R' *schneiden, welche die erste Kurve in* s *einfachen und voneinander verschiedenen Punkten trifft, so schneiden alle Flächen einer gegebenen Ordnung* $l \geqq \mu + \nu - 4$ *auf* R *eine nicht speziale Vollschar aus, so daß die Postulation von* R *für sie*

$$nl - p + 1$$

wird. Ist ferner $p > 0$, *so existieren Flächen von der Ordnung* $\mu + \nu - 4$, *die durch* R', *aber nicht durch* R *gehen und auf* R *außer den* s *gemeinsamen Punkten von* R *und* R' *die kanonische Schar von* R *ausschneiden. Auch die Flächen von der Ordnung* $l > \mu + \nu - 4$, *die durch* R' *und nicht durch* R *gehen (und, falls nicht* $n = 1$, $l = \mu + \nu - 3$, *immer existieren), schneiden aus* R *eine Vollschar aus.*

Für die vorstehenden Sätze vgl. außer Cayley a. a. O. und besonders Valentiner, *Raumkurven* und Noether, *Acta Math.* 8, 161 (1886) noch Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 189 (1864); Halphen, *Preisschrift,* S. 15ff.; aber vor allem Noether, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 163 (1871), *Math. Ann.* **8**, 495 (1875), *Preisschrift* § 7. S. auch R. Sturm, *Brit. Ass. York* 1881, p. 440; Rohn, *Leipz. Ber.* **49**, 627 (1897); *Verh. des 3. Internat. Math. Kongresses Heidelberg* 1904 (1905), S. 347; Picard und Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indép. I,* Paris 1897, p. 223; Hensel und Landsberg, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln,* Leipzig 1902, S. 474ff.; Pannelli, *Torino Atti* **44**, 443 (1909), außerdem, auch was allgemeinere Fragen betrifft, Severi, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **11**[1], 105 (1902), *Rend. Circ. Mat.* **17**, 73 (1903).

Wenn man von der irreduziblen und von mehrfachen Punk-

ten freien Kurve R nur die Ordnung n und das Geschlecht p kennt, so kann man mit Vorteil den Satz anwenden, daß *die Flächen von einer Ordnung* $l \geqq n-2$ *auf* R *eine nicht speziale Vollschar* g_{ln}^{ln-p} *ausschneiden, so daß die Postulation von* R *für sie* $ln-p+1$ *beträgt.* Vgl. Valentiner, *Raumkurven,* S. 194; Castelnuovo, *Rend. Circ. Mat.* **7**, 89 (1893); Picard und Simart, a. a. O., p. 230.

Castelnuovo hat auch bewiesen, daß eine nicht speziale Vollschar ebenfalls auf einer irreduziblen, *mit beliebigen Singularitäten behafteten* Kurve R von der Ordnung n durch die *adjungierten* Flächen von einer Ordnung $l \geqq n-2$ ausgeschnitten werden, wobei jetzt als adjungiert eine Fläche bezeichnet wird, die durch jeden mehrfachen Punkt von R derart hindurchgeht, daß sie dort mit jeden von diesem Punkte ausgehenden Zweig dieselbe Schnittmultiplizität besitzt wie mit den entsprechenden Zweig einer allgemeinen ebenen Projektion von R in dem Projektionspunkt eine adjungierte ebene Kurve.

Auf Grund dieses Begriffes der adjungierten Fläche haben Bertini und Severi, *Torino Atti* **43**, 847 (1908) den Restsatz auf Kurven mit beliebigen Singularitäten (auch in einem Überraum) ausgedehnt, indem sie bewiesen, daß, wenn R eine derartige irreduzible Kurve ist, und R' eine von mehrfachen Teilen freie Kurve, welche den Restschnitt zweier durch R gehenden Flächen bildet (und auch fehlen kann), die durch R' gehenden Flächen einer gegebenen *beliebigen* Ordnung, die zu R adjungiert sind, auf R abgesehen von den durch die Adjunktion bedingten festen Punkten eine lineare Vollschar ausschneiden. Vgl. auch Severi, *Torino Atti* **40**, 771 (1905).

Einen anderen der vorstehenden Sätze hat Bertini, *Torino Atti* **44**, 4 (1908) auf irreduzible Kurven mit beliebigen Singularitäten ausgedehnt, indem er zeigte, daß, wenn unter den vorstehenden Bedingungen die Kurve R den (vollständigen oder partiellen) Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen μ, ν bildet, die durch R' gehenden adjungierten Flächen von einer Ordnung $l \geqq \mu+\nu-3$ auf R eine nicht speziale Vollschar ausschneiden.

Welches auch die Singularitäten der irreduziblen Kurve R *von der Ordnung* n *seien, immer schneiden die Flächen von genügend hoher Ordnung* l *auf* R *eine nicht speziale Schar aus, deren Defekt* d *nicht von* l *abhängt* (und nur dann Null ist, wenn R keine mehrfachen Punkte hat).

Nennen wir π das Höchstgeschlecht, das R haben kann (§ 3),

und k die größte in $n-$: enthaltene ganze Zahl, so genügt hierfür, daß $l > k + \pi - p$, und es wird dann die Postulation von R $ln - p - d + 1$. Ferner wird

$$d \leqq \pi - p,$$

woraus wir folgern können, daß die Höchstzahl von Doppelpunkten, welche eine irreduzible Kurve R von der Ordnung n und dem Geschlecht p besitzen kann, $\pi - p$ beträgt, indem man hierbei einen s-fachen Punkt als $s - 1$ Doppelpunkten äquivalent ansieht.

Auf einer Kurve R von der Ordnung n und dem Höchstgeschlecht $p = \pi$ schneiden die Flächen von einer Ordnung $l \geqq k$ eine nicht speziale Vollschar aus, mithin ist die Postulation von R für sie $ln - p + 1$; ist hingegen $l \leqq k$, so wird die Postulation $l(l + 2) + 1$.

Alle diese Sätze gab Castelnuovo a. a. O.

Wenn die irreduzible, mit beliebigen Singularitäten behaftete Kurve R den vollständigen Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen μ, ν bildet, so hat der Defekt einen konstanten Wert d für $l \geqq \mu + \nu - 3$ und wird um 1 geringer für $l = \mu + \nu - 4$. Vgl. Bertini, *Torino Atti* **44**, 4 (1908).

Was den Beitrag betrifft, den die mehrfachen Punkte von R zu dem konstanten Defekt d oder zur Erniedrigung der Postulation $ln - p + 1$ liefern, so hat Castelnuovo a. a. O. hervorgehoben, daß *er nicht allein von den Zahlen, welche ihre Multiplizitäten ausdrücken (und für einen s-fachen Punkt von R mindestens $s - 1$ beträgt), sondern auch von den Beziehungen, die zwischen den Tangenten von R in jedem mehrfachen Punkte bestehen, abhängt.* So trägt ein dreifacher Punkt mit drei verschiedenen Tangenten zu jenem konstanten Defekt drei oder zwei Einheiten bei, je nachdem die drei Tangenten in einer Ebene liegen oder nicht. Vgl. auch Picard und Simart, a. a. O., *II,* Paris 1906, p. 46ff.

Über den Ausdruck der Postulation für eine Kurve mit beliebigen Singularitäten s. noch Autonne, *Ann. de l'Université de Lyon* 1896, Chap. II.

Es haben Picard, *J. f. Math.* **129**, 284 (1905) mit Hilfe transzendenter Methoden (vgl. auch Picard und Simart, a. a. O., *II,* p. 437) und Severi, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **17**^{2}, 465 (1908) auf geometrischem Wege den folgenden Satz bewiesen:

Wenn eine Kurve von der Ordnung n und dem Geschlecht p mit t triplanaren dreifachen Punkten sich als Doppelkurve einer

Fläche von der Ordnung m ansehen läßt, so wird der Wert der Postulation $ln - p + 1 - 2t$ für alle Flächen von einer Ordnung $l > m - 4$.

Noether, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 163 (1871) hat auch in verschiedenen Fällen die Anzahl der linearen Bedingungen bestimmt, denen eine Fläche von gegebener Ordnung l genügen muß, damit sie eine gegebene Kurve R in einer gegebenen Multiplizität s enthält. Wenn z. B. R die Ordnung n, den Rang r hat und D Knotenpunkte enthält, so wird diese Zahl für genügend hohes l

$$\tfrac{1}{6}ns(s+1)(3l-2s+5)-\tfrac{1}{12}s(s+1)(2s+1)(r+2D).$$

S. noch Noether, *Math. Ann.* **3**, 177 (1871).

Die Postulation einer Kurve, die eine Berührungskurve für Flächen von genügend hoher Ordnung sein muß, hat P. H. Hudson, *London M. Soc. Proc.* (2) **11**, 398 (1912), *Math. Ann.* **73**, 73 (1912) bestimmt.

Die oben behandelten Fragen der Postulation stehen in engem Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen *Formenmoduln* (vgl. Bd. I[1], S. 393 ff.) und dem Problem der Darstellung einer Form als lineare Kombination von mehreren anderen.

Als Folge aus sehr allgemeinen Untersuchungen bewies Hilbert, *Math. Ann.* **36**, 473 (1890), daß *durch eine gegebene algebraische Kurve R man immer eine endliche Zahl k algebraischer Flächen*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_k = 0$$

legen kann, derart, daß jede andere durch R gehende algebraische Fläche mittels einer Gleichung

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_kF_k = 0$$

dargestellt werden kann, wo die $A_1, A_2, \ldots, A_k$ Formen der Punktkoordinaten bedeuten.

Die Gesamtheit der Formen, die gleich Null gesetzt durch R hindurchgehende Flächen darstellen, bildet daher einen Formenmodul, und die Postulation von R für die Flächen einer gegebenen Ordnung l ist die Hilbertsche *charakteristische Funktion* des Moduls (Bd. I[1], S. 398). Als besondere Fälle hat Hilbert für genügend hohes l die Postulationsformel (1) dieses Paragraphen und die Formel (1) des § 7, welche die Anzahl der Schnittpunkte zweier zusammen den vollständigen Schnitt zweier Flächen bildenden Kurven liefert, bestimmt.

Betreffs dieser und noch allgemeinerer Fragen vgl. noch

Severi, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **11**[1], 105 (1902), *Rend. Circ. Mat.* **17**, 73 (1903), *Torino Atti* **41**, 205 (1906); König, *Einleitung in die allgemeine Theorie der alg. Größen*, Leipzig 1903, S. 385ff.; Lasker, *Math. Ann.* **60**, 20 (1905); R. Torelli, *Torino Atti* **41**, 224 (1906), *Ann. di Mat.* (3) **18**, 81 (1911); Giambelli, *Torino Atti* **41**, 235 (1906), *Lomb. Ist. Rend.* (2) **45**, 1016 (1913), **46**, 797 (1913); Bertini, *Introduzione*, S. 240, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **18**[1], 365, 637 (1909), (5) **18**[2], 3 (1909); Macaulay, *Math. Ann.* **74**, 66 (1913).

Über die allgemeine Gleichung der Flächen von gegebener Ordnung, die durch den Schnitt mehrerer algebraischer Flächen hindurchgehen, sowie über die analoge Frage für die Überräume s. auch Delassus, *C. R.* **123**, 546 (1896); *Bull. Sciences math.* (2) **21**[1], 59 (1897), *Ann. éc. norm.* (3) **14**, 21 (1897).

Was die Ausdehnung des Noetherschen Fundamentalsatzes (Bd. II[1], S. 306) auf die Flächen betrifft, so wollen wir uns auf den folgenden für die Anwendungen wichtigsten Fall beschränken:

Sind $f = 0$, $\varphi = 0$ die Gleichungen zweier Flächen, die keine gemeinsamen Teile besitzen, so ist dafür, daß eine andere Fläche F durch eine Gleichung von der Form

$$Af + B\varphi = 0$$

darstellbar ist, hinreichend, daß in einer allgemeinen Ebene π eines Büschels, dessen Achse die Kurve $f\varphi$ nicht trifft, die Bedingungen erfüllt sind, die bestehen müssen, damit die Kurve $F\pi$ als eine lineare Kombination der Kurven $f\pi$ und $\varphi\pi$ darstellbar ist.

Daraus folgt der *Restsatz für die Flächen:*

Wenn auf einer Fläche F eine Kurve R zu Resten eine Kurve R' und eine andere R'' hat, so sind die Kurven auf F von der gleichen Ordnung wie R, die Reste von R' sind, auch Reste von R''.

Vgl. Noether, *Math. Ann.* **2**, 314 (1870), **6**, 358 (1873); Picard-Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes II*, Paris 1906, p. 17, und die drei oben angeführten Arbeiten von Severi.

§ 11. Höchstgeschlecht der Kurven auf einer Fläche von gegebener Ordnung.

Sätze, welche die Verknüpfung der Postulation einer Raumkurve R_n^p der Ordnung n und des Geschlechtes p für die Flächen

einer gegebenen Ordnung mit den Ordnungen der der allgemeinen ebenen Projektion der Raumkurve adjungierten Kurven liefern, haben angegeben Halphen, Noether, *Preisschriften*, und Valentiner, *Raumkurven*, S. 181ff. Vgl. auch Löflund, *Diss.* Tübingen 1912.

So *liegt* nach Noether (a. a. O., S. 25), *wenn*

$$p > ni - \tfrac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3) + k + 1,$$

wobei $k = 0, 1, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots$, *falls die* h *Doppelpunkte der Projektionskurve der Adjungierten von der Ordnung* $n - i - 3$ *mehr als* $h - \frac{1}{6}i(i+1)(i+2) + k$ *Bedingungen auferlegen, die Raumkurve* R_n^p *auf mindestens* $k+1$ *linear unabhängigen Flächen von der Ordnung* i.

Nennen wir $\bar{n}$ (§ 12) den niedrigsten Wert, den die Ordnung eines Kegels, der durch die h von einem allgemeinen Punkte an R_n^p ausgehenden Sehnen gelegt wird, annehmen kann, d. h. die Mindestordnung einer Kurve, die einer allgemeinen ebenen Projektion von R_n^p adjungiert ist, so ergibt sich nach Halphen a. a. O., p. 149, und für $i = 2$ p. 51, daß *für*

$$\bar{n} < \frac{i}{i+1}(n - i - 1)$$

die Kurve auf einer Fläche von der Ordnung i *(oder auf Flächen von niedrigerer Ordnung) liegt.*

Mit denselben Betrachtungen verknüpfte Sätze hat Noether a. a. O., § 4 für Kurven von der Ordnung n angegeben, die aus dem Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen m, μ entstehen, *wenn der Restschnitt (der auch fehlen kann) eine ebene Kurve ist.*

Halphen a. a. O., p. 195ff., Valentiner, *Raumkurven*, S. 189ff. und Noether, a. a. O., § 6, haben bewiesen, daß *diese Kurven nichts anderes sind wie die Kurven von gegebener Ordnung* n, *die auf einer Fläche von gegebener Ordnung* μ *ohne mehrfache Punkte liegen und das größtmögliche Geschlecht besitzen.*

Nennen wir n' die Ordnung der Restkurve, so daß

$$0 \,.\; n' < \mu, \quad n + n' = m\mu,$$

dann *wird der Wert* π_μ *dieses Maximalgeschlechtes*

$$\pi_\mu = \tfrac{1}{2}(n'-1)(n'-2) + \tfrac{1}{2}(m\mu - 2n')(m + \mu - 4).$$

Insbesondere *ist eine Kurve von der Ordnung* $m\mu$ *und dem*

Geschlecht $\frac{1}{2}m\mu(m+\mu-4)+1$, *die auf einer Fläche von der Ordnung* μ *ohne mehrfache Punkte liegt, der vollständige Schnitt dieser Fläche mit einer anderen von der Ordnung* m.

Halphen a. a. O., p. 195ff. gibt den vorstehenden Resultaten die folgende Form:

Für jede ganze Zahl μ, *die kleiner oder gleich der kleinsten, der Bedingung*

$$\frac{(M+1)(M+2)(M+3)}{3} \geqq Mn+3$$

genügenden ganzen Zahl M *ist, existiert eine andere Zahl* $H(\mu)$, *die eine beständig wachsende Funktion von* μ *bildet, derart, daß jede irreduzible Kurve von der Ordnung* n, *die weniger als* $H(\mu)$ *scheinbare Doppelpunkte hat, auf einer Fläche von niedrigerer Ordnung als* μ *liegt.*

Diese Funktion $H(\mu)$ fällt mit π_μ nur dann zusammen, wenn $\mu^2-\mu<n$ ist, sonst ergibt sich für sie kein einfacher Ausdruck.

§ 12. Klassifikation der Raumkurven. Die Gesamtheit der Raumkurven R_n^p.

Während alle ebenen Kurven von einer gegebenen Ordnung n eine einzige Gattung bilden, indem sie sich durch kontinuierliche Veränderung aus der durch die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades dergestellten Kurve ableiten lassen, gilt dies für die Raumkurven nicht mehr. Es gibt wohl einzelne Eigenschaften, die allein von der Ordnung n abhängen (wie die Anzahl der Schnittpunkte mit einer gegebenen Fläche), aber im allgemeinen genügt die Ordnung nicht, um eine Gattung algebraischer Raumkurven zu charakterisieren. In der Tat erhält man schon für $n=4$ zwei vollkommen verschiedene Kurvenarten, von denen die eine zwei, die andere drei scheinbare Doppelpunkte besitzt, wie bereits Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **5**, 23 (1850) hervorgehoben hat.

Die Tatsache, daß viele Eigenschaften der Raumkurven nur von den beiden Zahlen n und h abhängen, hat dann nahe gelegt, die Kurven nach diesen beiden Zahlen einzuteilen. Aber auch diese Einteilung ist unzulänglich, da z. B. für $n=9$, $h=18$ Ed. Weyr, *Diss.* Gött. 1873, *Prag. Abh.* (6) **6** (1874) und Halphen, *Bull. Soc. math.* **2**, 69 (1874) zwei Kurvenarten gefunden haben, die, obwohl beide von derselben Konstantenzahl 36 abhängig, doch vollständig verschieden sind: die eine ist der voll-

ständige Schnitt zweier F_3, die andere der Schnitt einer F_2 und einer F_6 mit drei sechspunktigen Sekanten als Restkurve. Vgl. Halphen, *Preisschrift*, p. 166; Noether, *Preisschrift*, S. 101.

Auch wenn wir mit Halphen noch die Zahl $\overline{n}$ hinzunehmen (von Halphen mit n bezeichnet), welche die Minimalordnung eines Kegels ausdrückt, der durch die von einem allgemeinen Punkt an die Kurve gelegten Sehnen hindurchgeht, wobei für das zuletzt angeführte Beispiel in einem Falle $\overline{n} = 4$, im anderen $\overline{n} = 5$ wird, genügen diese drei Zahlen nicht, um eine Kurvengattung festzulegen, da Halphen z. B. für $n = 15$, $h = 63$, $\overline{n} = 9$ zwei verschiedene Kurvenarten gefunden hat. Andererseits hat Cayley, *Papers V*, p. 613 (1892) und *J. f. Math.* **111**, 347 (1893), *Papers XIII*, p. 468 bemerkt, daß für gegebene Werte von $n, h, \overline{n}$ die wirkliche Existenz einiger von Halphen betrachteten Kurven von dem Bestehen bestimmter Beziehungen zwischen den von einem allgemeinen Punkt ausgehenden Sehnen abhängt; z. B. ist für die Existenz einer Kurve mit $n = 9$, $h = 16$, $\overline{n} = 4$ (Halphen, a. a. O., p. 166) notwendig, daß die 16 Sehnen die Basis eines Büschels von Kegeln 4. Ordnung bilden.

Alles dies gibt zu der Vermutung Anlaß, daß es überhaupt nicht möglich ist, eine endliche Menge von Zahlen anzugeben, die geeignet sind, eine Kurvengattung allgemein zu charakterisieren.

Betrachten wir die Raumkurven R_n^p von gegebener Ordnung n und gegebenem Geschlecht p, so bilden sie eine algebraische, im allgemeinen reduzible Mannigfaltigkeit, deren irreduzible Gebiete auch verschiedene Dimensionen ($\geqq 4n$, s. § 13) und auch gemeinsame Untergebiete haben können. Alle Kurven, die demselben irreduziblen Gebiete angehören, lassen sich dann einer *Kurvenfamilie* zuerteilen. Neue Kriterien werden dazu führen, die Kurven einer Kurvenfamilie wieder in mehrere Arten einzuteilen; z. B. nach der Ordnung, welche die durch die Kurve gelegten Flächen zum mindesten haben, und der Konstantenzahl, welche die Definition einer solchen Kurve mit sich bringt (§ 13).

Die erste Grundlage für die Klassifikation der Raumkurven der niedrigsten Ordnungen findet sich in der angeführten Arbeit von Salmon, wo die Kurven als Schnitte der Flächen der niedrigsten Ordnungen eingeführt und so bis zur 5. Ordnung bestimmt werden. Mit Hilfe der monoidalen Darstellung wurden die Kurven 4. und 5. Ordnung aufs neue bestimmt von Cayley, *C. R.* **54**, 55, 396, 672 (1862), **58**, 994 (1864), *Papers V*, p. 7, 24, die der 5. und 6. Ordnung von Ed. Weyr, *C. R.* **76**, 424, 475, 555 (1873) (vgl. Halphen, ebenda, p. 558), die der 7. Ord-

nung von Ed. Weyr, *Wien. Sitzungsber.* **69**, 399 (1874). Für die Kurven 5. und 6. Ordnung siehe noch Ed. Weyr, *Diss.* Göttingen 1873, *Prag. Abh.* (6) **6** (1874), und für die 6. Ordnung Baule, *Diss.* Göttingen 1872. Aber in diesen Arbeiten sind die Typen der Kurven 6. und 7. Ordnung noch nicht vollständig bestimmt worden.

Das allgemeine Problem, alle R_n^p anzugeben, die auf einer gegebenen Fläche liegen, und damit auch alle R_n^p, die im Raume vorhanden sind, wurde für Kurven ohne mehrfache Punkte ausführlich behandelt von Halphen und Noether in ihren im Jahre 1882 mit dem Steinerpreis der Berliner Akademie gekrönten Arbeiten: Halphen, *J. éc. pol.* **52**, 1 (1882), schon vorher kurz *C. R.* **70**, 380 (1870); Noether, *Berl. Abh.* 1882, Auszug *J. f. Math.* **93**, 271 (1882). In der Richtung von Halphen und Noether liegen die Arbeiten von Rohn, *Leipzig. Ber.* **46**, 84 (1894), **49**, 631 (1897) der die Kurven auf den allgemeinen Flächen 3. und 4. Ordnung bestimmt hat, und von Haure, *Ann. éc. norm.* (3) **13**, 115 (1896), der ausgehend von der Definition der Raumkurven als birationale Transformierten einer ebenen Kurve gewisse Klassen von Raumkurven untersucht hat.

Halphen stützt sich wesentlich auf die monoidale Darstellung der Raumkurven und die Eigenschaften einer gewissen unbegrenzten Doppelreihe von Polynomen, die nach einem bestimmten Gesetz gebaut sind. So findet er insbesondere die Bedingungen dafür, daß die gegebene Kurve auf einer Fläche von gegebener Ordnung liegt oder den vollständigen Schnitt zweier Flächen bildet, außerdem gibt er in vielen Fällen die Bestimmung der Konstantenzahl, von der die Kurven R_n^p abhängen, sowie die im folgenden angeführten Sätze.

Während (§ 3) für einen gegebenen Wert von n der Mindestbetrag von h $\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\right]$[1]) ist, hat Halphen gefunden, daß *zwischen diesem Minimum und dem Wert* $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{3}\right]$ *h nicht jeden beliebigen Wert annehmen kann, so daß die Folge der Werte von h für gegebenes n gewisse Lücken zeigt.*

Alle Kurven, für die $h < \left[\frac{(n-1)(n-2)}{3}\right]$, liegen auf einer Fläche 2. Ordnung (a. a. O. p. 126).

Hingegen zeigt von dieser Grenze an die Folge der Werte h

1) $[k]$ soll die größte in k enthaltene ganze Zahl bezeichnen.

keine Lücken mehr, und für jeden gegebenen Wert von h existiert eine Kurvenfamilie, die auf einer F_3 liegt. Während aber von der Grenze $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{3}\right]$ bis zu der neuen Grenze $3\left[\frac{(n-2)^2}{8}\right]$ (ausschließlich) diese Kurvenfamilien allgemeine Typen bedeuten, so daß diese Kurven zusammen mit den auf einer F_2 liegenden für die gegebenen Werte von n, h die einzigen sind, bilden sie von der neuen Grenze der Zahl h an nur besondere Typen.

Ein analoges, aber verwickelteres Gesetz besteht auch für noch größere Werte von h, es ist von Halphen allgemein formuliert und durch viele Beispiele erläutert worden.

Für den folgenden Satz über die Kurven auf einer F_2 (a. a. O., p. 56), hat Halphen, *Bull. Soc. math.* **1**, 19 (1872) auch einen direkten Beweis gegeben:

Die Flächen niedrigster Ordnung, die durch eine auf einer F_2 gelegene Kurve hindurchgehen, schneiden die F_2 außerdem in einer Gruppe von Regelstrahlen derselben Regelschar.

Insbesondere ist jede algebraische Kurve von der Ordnung $2k$ oder $2k+1$, die auf einem Kegel 2. Ordnung liegt, der vollständige Schnitt des Kegels mit einer Fläche von der Ordnung k oder mit einer beliebigen Seitenlinie des Kegels zusammen der vollständige Schnitt des Kegels mit einer Fläche von der Ordnung $k+1$. Daraus folgt, daß *längs jeder auf einem Kegel 2. Ordnung gezogenen algebraischen Kurve sich dem Kegel eine algebraische Fläche umschreiben läßt, die mit dem Kegel nur diese Kurve gemein hat* (welche Eigenschaft weder den allgemeinen Flächen 2. Ordnung noch den Kegeln von einer Ordnung > 2 zukommt). Vgl. Humbert, *Bull. Soc. math.* **21**, 3 (1893).

Noether greift auch auf die Darstellung der Raumkurven als spezielle Flächenschnitte zurück, stützt sich aber hauptsächlich auf die Theorie der linearen Scharen von Punktgruppen auf einer Kurve und damit auf immer gültige algebraisch-funktionentheoretische Sätze.

Er gibt zunächst (a. a. O. § 7) die ausreichenden Bedingungen dafür an, daß eine Fläche F_μ von der Ordnung μ durch eine gegebene irreduzible R_n^p hindurchgeht, und findet, indem er

$$N_\mu = \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3) - 1$$

setzt, daß, *wenn der größte ganzzahlige Wert λ, welcher den Ungleichungen*

(1) $$\mu n < 2(N_\mu - \lambda), \quad p > \mu n - N_\mu + \lambda$$

genügt, nicht negativ ist, ein ∞^{λ}*-faches lineares System von* F_μ *durch die Kurve hindurchgeht* (und im allgemeinen kein System von höherer Dimension).

Insbesondere genügt es, damit durch R_n^p eine F_μ hindurchgeht, daß

$$\mu n < 2 N_\mu, \quad p \geqq \mu n - N_\mu + 1$$

wird, oder auch, daß

$$\mu n \leqq 2 N_\mu, \quad p > \mu n - N_\mu + 1.$$

Indem er darauf eine irreduzible F_μ, die durch die irreduzible R_n^p geht, als bekannt voraussetzt, findet er in ähnlicher Weise (a. a. O. § 8), daß, *wenn der Höchstwert der ganzen Zahl* λ, *der den Ungleichungen*

$$\nu n < 2 (W_{\nu,\mu} - \lambda), \quad p > \nu n - W_{\nu,\mu} + \lambda$$

genügt, nicht negativ ist, durch die Kurve ein ∞^{λ}*-faches lineares System von Flächen* F_ν *(wobei* $\nu \geqq \mu - 3$*) hindurchgeht, die* F_μ *nicht als Teil enthalten (und im allgemeinen auch keine anderen* F_ν*).*

Hierbei bezeichnet $W_{\nu,\mu}$ die Mannigfaltigkeit aller Kurven von der Ordnung $\nu\mu$, die auf der gegebenen F_μ von allen F_ν des Raumes ausgeschnitten werden, mithin wird

$$\begin{aligned} W_{\nu,\mu} &= N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1 \\ &= \tfrac{1}{6}(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3) + \tfrac{1}{2}\mu\nu(\nu - \mu + 4). \end{aligned}$$

Insbesondere ist, damit durch R_n^p eine (F_μ nicht als Teil enthaltene) F_ν geht, hinreichend, daß

$$(2) \qquad \nu n < 2 W_{\nu,\mu}, \quad p \geqq \nu n - W_{\nu,\mu} + 1.$$

Wenn die zweite dieser Ungleichungen nicht befriedigt ist, so bedeutet die Existenz einer von F_μ verschiedenen, durch die Kurve hindurchgehenden F_ν eine besondere charakteristische Eigenschaft der Kurve selbst. Wenn hingegen die zweite, aber nicht die erste Ungleichung (2) erfüllt ist, d. h. wenn

$$(3) \qquad \nu n \geqq 2 W_{\nu,\mu},$$

so geht entweder durch R_n^p eine von F_μ verschiedene F_ν hindurch oder die von den F_ν auf der Kurve ausgeschnittenen Punktgruppen bilden eine speziale Schar. Sind n und μ gegeben, so liefert (3)

für ν eine *obere Grenze,* während eine *untere Grenze* gegeben ist durch

$$\nu\mu \geqq n.$$

Um zu erkennen, welcher der beiden vorstehenden Fälle eintritt, hat Noether (a. a. O., § 9) zwei Methoden angegeben, von denen die eine, die *„Restmethode“*, auf dem Restsatz bei Raumkurven (§ 10) beruht und das Problem auf die Untersuchung einer zu der gegebenen korresidualen Kurve zurückführt, so daß Untersuchungen über die Reduzibilität oder Irreduzibilität der Restkurven benötigt werden, während die andere, die *„Methode des ebenen Schnittes“*, die in allen Fällen die andere Methode ergänzt und nicht jene Untersuchungen braucht, sich auf die Betrachtung der Punktgruppen stützt, die auf einer irreduziblen ebenen Schnittkurve von F_μ durch die R_n^p enthaltenden Flächen ausgeschnitten werden.

Hierauf bestimmt Noether nun (a. a. O., § 10), um die Gesamtheit aller im Raum existierenden irreduziblen R_n^p zu finden, zuerst alle irreduziblen R_n^p, die auf einer gegebenen irreduziblen F_μ, aber nicht auf Flächen von niedrigerer Ordnung liegen. Zu diesem Zweck nimmt er eine ganze Zahl $\nu \geqq \mu$, die so groß ist, daß $n' = \mu\nu - n$ nicht negativ wird. Auf Grund von (2) folgt dann, daß man ν kleiner als die kleinste Zahl ν_0, welche den Ungleichungen

$$W_{\nu_0-1,\mu} - (\nu_0 - 1)n + p > 0,$$

$$2\,W_{\nu_0-1,\mu} - (\nu_0 - 1)n > 0$$

gleichzeitig genügt, annehmen kann.

Indem man außerdem

$$p' = p - \tfrac{1}{2}(n - n')(\mu + \nu - 4)$$

setzt, nehme man auf F_μ,

a) wenn

$$p' \leqq n'(\mu - 3) - \tfrac{1}{6}\mu(\mu - 1)(\mu - 2) + 1,$$

alle Kurven $R_{n'}^{p'}$, durch die eine F_ν geht,

b) wenn

$$p' > n'(\mu - 3) - \tfrac{1}{6}\mu(\mu - 1)(\mu - 2) + 1,$$

alle Kurven $R_{n'}^{p'}$, durch die eine F_ν geht, deren Ordnung ν der Beziehung genügt

$$(\nu - 1)[\mu(\mu - 3) - n'] \geqq \tfrac{1}{3}(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3),$$

aber keine $F_{\nu_1}(\nu_1 \geqq \mu - 2)$, welche F_μ außerdem in einer irreduziblen Kurve schneidet und deren Ordnung ν_1 der Beziehung genügt

$$(\nu_1 - 1)[\mu(\mu - 3) - n'] < \tfrac{1}{3}(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3).$$

Im einen wie im anderen Falle findet man auf F_μ, indem man durch die gewonnenen $R_{n'}^{p'}$ alle F_ν legt, als Restkurven die gesuchten R_n^p.

Die für die verschiedenen Werte von ν erhaltenen R_n^p sind im allgemeinen voneinander verschieden, und F_ν bildet in jedem Falle die Fläche niedrigster Ordnung, die durch R_n^p geht und F_μ nicht als Teil enthält. Indessen können einzelne besondere R_n^p auf die angegebene Weise auch mehrfach erhalten werden, indem durch R_n^p gleichzeitig auch eine $F_{\nu-i}$ $(i > 0)$ geht. Diese Fälle lassen sich mit den oben zwei angegebenen Methoden erledigen.

Um nun alle R_n^p des Raumes zu erhalten, genügt es, in der angegebenen Weise alle irreduziblen F_μ für $\mu = 2, 3, \ldots$ zu betrachten, wobei nach (1) der höchste Wert, den man μ erteilt, der niedrigste Wert μ_0 ist, der den Ungleichungen genügt

$$2N_{\mu_0} - n\mu_0 > 0, \quad N_{\mu_0} - n\mu_0 + p > 0.$$

Von den besonderen Resultaten, die Noether für die auf bestimmten Flächen gezogenen Kurven erhält, führen wir die folgenden an (a. a. O. S. 76, 78):

Auf einer allgemeinen F_3 liegen außer ihren vollständigen Schnitten mit anderen Flächen keine anderen Kurven als solche, deren Restkurven von der Ordnung n' eine Anzahl $\geqq \frac{(n'-1)(n'-2)}{2}$ von scheinbaren Doppelpunkten besitzen.

Auf einer allgemeinen F_4 liegen außer den Kurven des Höchstgeschlechtes nur solche, für welche auf F_4 Restkurven $R_{n'}^{p'}$, bei denen $p' \leqq n' - 3$, existieren.

Ein wichtiger allgemeiner Satz, den Noether (a. a. O., §§ 11, 12) abgeleitet hat, ist der folgende:

Die Flächen von der Ordnung $\mu > 3$, auf denen andere Kurven als vollständige Schnittkurven enthalten sind, bilden im Raum eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension geringer ist als die der von allen Flächen der Ordnung μ gebildeten Mannigfaltigkeit, so daß die Kurven, die einer allgemeinen Fläche von der Ordnung $\mu > 3$ angehören, alle die vollständigen Schnitte dieser Fläche mit anderen Flächen bilden.

Zum Schluß bemerken wir, daß *auf einer von mehrfachen Punkten freien Fläche (und allgemeiner auf einer regulären Fläche,* vgl. S. 757*) jedes kontinuierliche System von algebraischen Kurven in einem linearen System vollständig enthalten ist, sodaß auf einer solchen Fläche die Kurven einer gegebenen Ordnung sich immer auf eine endliche Zahl von linearen Systemen verteilen.*

Dieser Satz, welchen man Enriques, *Rend. Circ. mat.* **13**, 95 (1899) verdankt, und den man auch, wie Severi, *Torino Atti* **39**, 490 (1904) gezeigt hat, aus einem anderen allgemeineren ableiten kann, zeigt, welche Wichtigkeit die Behandlung der auf einer gegebenen Fläche liegenden linearen Kurvensysteme für die Untersuchung der Kurven im Raume hat. Vgl. dazu die neueren Arbeiten von Castelnuovo, Enriques, Severi und Picard, insbesondere Castelnuovo und Enriques, *Ann. di Mat.* (3) **6**, 165 (1901), und die auf S. 766 zitierten Arbeiten von Severi und Poincaré (ferner Poincaré, *Archiv Math. Phys.* (3) **18**, 28 (1911)) über die Gesamtheit aller algebraischen Kurven einer algebraischen Fläche.

Wir beschränken uns im vorliegenden besonderen Fall darauf, den folgenden Satz von Severi anzuführen: *Auf einer von mehrfachen Punkten freien Fläche (allgemeiner auf einer regulären Fläche) kann man alle algebraischen Kurven aus einer endlichen Anzahl von ihnen durch Summation und Subtraktion (oder kürzer durch rationale Operationen) ableiten.*

Abrisse dieser Untersuchungen finden sich bei Castelnuovo und Enriques, *Math. Ann.* **48**, 241 (1896) und *Note V* in Picard und Simart, *Théorie des fonctions alg. de deux variables indép. II,* Paris 1906, p 485.

§ 13. Die Konstantenzahl der Raumkurven.

Ein wichtiges Problem ist das, die Konstantenzahl der Gesamtheit der Raumkurven R_n^p bei gegebenem n und p zu bestimmen.

Aus einer Formel in Bd. II[1], S. 317, folgt zunächst für $r = 3$, daß *für die irreduzibeln Kurven R_n^p mit allgemeinen Moduln* (Bd. II[1], S. 319), *für die $n \geqq \frac{3}{4}(p+4)$, die Konstantenzahl $4n$ ist, während für $n < \frac{3}{4}(p+4)$, wenn solche Raumkurven R_n^p überhaupt existieren, ihre Konstantenzahl $\geqq 4n$ ist.*

Dieser Satz findet sich bei Brill und Noether, *Math. Ann.* **7**, 307 (1874) und wird wieder angeführt von Noether, *Preisschrift,* S. 18. S. auch Picard, *Traité d' analyse II*, 2. Aufl., Paris 1905, p. 570.

Im übrigen erlauben die Sätze über lineare Scharen von Punktgruppen, einige besondere Fälle eingehender zu behandeln. Z. B. *wird für* $2p - 2 \geqq n > p + 2$ *die Konstantenzahl der* R_n^p, *deren ebene Schnitte eine Spezialschar bilden,* $3n + p + 2$ (Noether, a. a. O., S. 20).

Aber die Sätze der vorigen Paragraphen liefern nach Noether, a. a. O. S. 58ff., eine genaue Bestimmung der Konstantenzahl auch für viele spezielle Arten von Raumkurven und ebenso für Fälle von allgemeinen Raumkurven, deren Ordnung $< \frac{3}{4}(p + 4)$ ist, und führen in jedem Fall zu einer unteren Grenze für die Konstantenzahl, die größer als die vorstehende $4n$ ist.

Angenommen, daß eine R_n^p nur der Bedingung genügt, den vollständigen oder partiellen Schnitt einer F_μ mit einer F_ν $(\nu \geqq \mu)$ zu bilden, so mögen A_μ und A_ν die Anzahlen der Bedingungen bezeichnen, die einer unbestimmten F_μ oder F_ν dadurch auferlegt werden, daß sie durch eine gegebene dieser R_n^p hindurchgehen sollen, und A_μ' und A_ν' die analogen Anzahlen für die Restschnitte $R_{n'}^{p'}$ zweier solcher F_μ, F_ν.

Nennen wir dann u und u' die Dimensionenzahlen der R_n^p und $R_{n'}^{p'}$ dieser Art im Raume, so wird (Noether, a. a. O., S. 60)

$$u - u' = A_\mu + A_\nu - A_\mu' - A_\nu',$$

so daß man, wenn man die Postulationen der R_n^p, $R_{n'}^{p'}$ für die F_μ und F_ν kennt, u aus u' berechnen kann.

Andere Ausdrücke für u erhält man, indem man die Anzahl $s_{\mu,\nu}$ der gemeinsamen Punkte einer R_n^p und der aus zwei durch diese Kurve gehenden Flächen F_μ, F_ν gewonnenen Restkurve einführt, und weiter die Anzahl $\sigma_{\mu,\nu}$ der Bedingungen, denen eine F_μ und eine F_ν zusammen genügen müssen, damit ihr Schnitt in zwei Kurven R_n^p, $R^{n'}$ mit $s_{\mu,\nu}$ Schnittpunkten zerfällt. Es ergibt sich in der Tat (Noether, a. a. O., S. 62)

$$(1) \qquad \sigma_{\mu,\nu} \leqq s_{\mu,\nu}, \quad u = A_\mu + A_\nu - \sigma_{\mu,\nu}$$

In gewissen Fällen kann man hieraus präzisere Resultate ableiten. So findet man, wenn die Kurve die allgemeinste R_n^p ist, für die $n \geqq \frac{3}{4}(p + 4)$, für alle Flächen von den Ordnungen μ, ν, die sie enthalten können,

$$\mu n + 1 - p, \quad A_\nu = \nu n + 1 - p, \quad \sigma_{\mu,\nu} \quad s_{\mu,\nu}.$$

Ein Fall dagegen, in welchem für die erste der Beziehungen (1) das Ungleichheitszeichen gilt, wird durch die irreduziblen Kur-

ven des Höchstgeschlechtes π_μ geliefert, die auf einer Fläche von der Ordnung $\mu\,(\nu \geqq \mu)$ ohne mehrfache Punkte liegen können (§ 11). Man findet in der Tat (Noether, a. a. O., S. 68), daß in diesem Fall nur dann $\sigma_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu}$ wird, wenn die Ordnung der ebenen Restkurve $\leqq 3$ ist.

Noether hat auch, ebenso wie Halphen, die Kurven betrachtet, die auf den Flächen von den Ordnungen 2, 3, 4, 5 liegen, indem er insbesondere feststellte (a a. O., S. 75, 77), daß, wie in der Ebene, *damit der vollständige Schnitt einer* F_2 *oder einer* F_3 *mit einer* F_ν *in zwei Kurven mit* $s_{2,\nu}$ *oder* $s_{3,\nu}$ *gemeinsamen Punkten zerfällt, genau* $s_{2,\nu}$, *bzw.* $s_{3,\nu}$ *voneinander unabhängige Bedingungen erfüllt sein müssen.*

Über die Bestimmung der Konstantenzahl vgl. noch Rohn, *Math. Ver.* **5**, 84 (1901), *Verh. des dritten Intern. Math.-Kongresses, Heidelberg* 1904 (1905), S. 347.

§ 14. Die irreduziblen, von mehrfachen Punkten freien Raumkurven der ersten sechs Ordnungen.

Halphen und Noether haben in ihren *Preisschriften* die Klassifikation der R_n^p ohne mehrfachen Punkte für viele besondere Werte von n ausgeführt. Der erstere hat die allgemeinen Typen bis zu $n = 20$ angegeben, der letztere alle Typen irreduzibler und reduzibler Kurven bis zu $n = 6$, alle Typen der irreduzibeln Kurven für $n = 7, 8, 9$ und die allgemeinen Arten der Kurven von den Ordnungen 10 bis 17.

Die *Preisschrift* von Halphen ebenso wie die vorausgehende Note *C. R.* **70**, 380 (1870) enthalten allerdings einige Ungenauigkeiten, die durch die im § 12 angeführten Arbeiten von Cayley, Noether und Rohn richtig gestellt wurden.

Wir geben hier die Aufzählung aller *irreduziblen, von mehrfachen Punkten freien Kurven der ersten sechs Ordnungen,* indem wir für jede die Minimalordnungen (μ, ν) von zwei Flächen F_μ, F_ν anführen, aus deren Schnitt sie hervorgeht, ferner die Art der Restkurve und außerdem die Werte von $p, h, \bar{n}$, die Konstantenzahl u und die Postulation A_μ für die Flächen der Ordnung μ.

Kurven 1. Ordnung:

$$R_1^0: n = 1,\ p = 0,\ h = 0,\ \bar{n} = 0;\ (1, 1);\ u = 4,\ A_\mu = \mu + 1.$$

Kurven 2. Ordnung:

$$R_2^0: n = 2,\quad p = 0,\quad h = 0,\quad n = 0;\quad (1, 2);$$
$$u = 8,\quad A_\mu = 2\mu + 1.$$

Kurven 3. Ordnung:

$$\text{a)}\quad R_3^0: n = 3,\quad p = 0,\quad h = 1,\quad \bar{n} = 1;$$

(2, 2) und als Restkurve eine Gerade, die $R_3{}^0$ in zwei Punkten schneidet;

$$u = 12,\quad A_\mu = 3\mu + 1.$$

$$\text{b)}\quad R_3^1: n = 3,\quad p = 1,\quad h = 0,\quad \bar{n} = 0;\quad (1, 3);$$
$$u = 12,\quad A_\mu = 3\mu.$$

Kurven 4. Ordnung:

$$\text{a)}\quad R_4^0: n = 4,\quad p = 0,\quad h = 3,\quad \bar{n} = 2;$$

(2, 3) und als Restkurve zwei windschiefe Gerade, deren jede R_4^0 in drei Punkten schneidet;

$$u = 16,\quad A_\mu = 4\mu + 1.$$

$$\text{b)}\quad R_4^1: n = 4,\quad p = 1,\quad h = 2,\quad \bar{n} = 1;\quad (2, 2);$$
$$u = 16,\quad A_\mu = 4\mu.$$

$$\text{c)}\quad R_4^3: n = 4,\quad p = 3,\quad h = 0,\quad \bar{n} = 0;\quad (1, 4);$$
$$u = 17,\quad A_\mu = 4\mu - 2\quad (\text{aber } A_1 = 3).$$

Kurven 5. Ordnung:

$$\text{a)}\quad R_5^0: n = 5,\quad p = 0,\quad h = 6,\quad \bar{n} = 3;$$

(3, 3) und als Restkurve eine vierfach schneidende Gerade und eine achtfach schneidende kubische Raumkurve R_3^0, die miteinander keine Punkte gemein haben;

$$u = 20,\quad A_\mu = 5\mu + 1.$$

a') R_5^0 (Sonderfall von a): $n = 5,\quad p = 0,\quad h = 6,\quad \bar{n} = 3;$

(2, 4) und als Restkurve drei paarweise windschiefe vierfach schneidende Gerade;

$$u = 18,\ A_\mu = 5\mu + 1\quad (\text{aber } A_2 = 9).$$

Während die Kurve a) eine einzige Quadrisekante hat, besitzt die Kurve a') ∞^1, welche die eine Regelschar der F_2 bilden. Durch beide Kurvenarten gehen $\infty^3 F_3$, aber für die Kurven a') zerfallen sie in die vorstehende F_2 und eine beliebige Ebene.

b) $R_5^1: n = 5, \quad p = 1, \quad h = 5, \quad \bar{n} = 2;$

(3, 3) und als Restkurve eine R_4^0, die R_5^1 in zehn Punkten schneidet;

$$u = 20, \quad A_\mu = 5\mu.$$

c) $R_5^2: n = 5, \quad p = 2, \quad h = 4, \quad \bar{n} = 2;$

(2, 3) und als Restkurve eine dreifach schneidende Gerade;

$$u = 20, \quad A_\mu = 5\mu - 1.$$

d) $R_5^6: n = 5, \quad p = 6, \quad h = 0, \quad \bar{n} = 0; \quad (1, 5);$

$$u = 23, \quad A_\mu = 5\mu - 5 \quad (\text{aber } A_1 = 3, \quad A_2 = 6).$$

Kurven 6. Ordnung:

a) $R_6^0: n = 6, \quad p = 0, \quad h = 10, \quad \bar{n} = 4;$

(3, 4) und als Restkurve eine R_6^0, welche die gegebene in 20 Punkten trifft; insbesondere kann die Restkurve bestehen aus vier der sechs Quadrisekanten und einem Kegelschnitt, der jede dieser vier Geraden in einem Punkt und die R_6^0 in vier Punkten schneidet, oder aus einer Quadrisekante von R_6^0 und einer R_5^0, welche diese Gerade in einem Punkte und die R_6^0 in 16 Punkten schneidet;

$$u = 24, \quad A_\mu = 6\mu + 1.$$

a′) R_6^0 (Sonderfall von a): $n = 6, \quad p = 0, \quad h = 10, \quad \bar{n} = 4;$

(3, 3) und als Restkurve zwei windschiefe Gerade, von denen eine doppelt zu zählen ist, R_6^0 in fünf Punkten trifft und ihre einzige fünffach schneidende Gerade bildet, während die andere Gerade R_6^0 in vier Punkten trifft (umgekehrt läßt sich jede R_6^0 mit einer einzigen fünffach schneidenden Geraden aus dem Schnitt zweier Flächen 3. Ordnung gewinnen);

$$u = 23, \quad A_\mu = 6\mu + 1 \quad (\text{aber } A_3 = 18).$$

a_1') R_6^0 (Sonderfall von a′): $n = 6, \quad p = 0, \quad h = 10, \quad \bar{n} = 4;$

(2, 5) und als Restkurve vier Regelstrahlen derselben Regelschar einer F_2, welche die Kurve in je fünf Punkten treffen (jeder Regelstrahl dieser Regelschar ist eine fünffach schneidende Gerade);

$$u = 20, \quad A_\mu = 6\mu + 1 \quad (\text{aber } A_2 = 9, \quad A_3 = 16).$$

b) $R_6^1: n = 6, \quad p = 1, \quad h = 9, \quad \bar{n} = 3;$

(3, 3) und als Restkurve drei paarweise windschiefe Gerade, welche die Kurve in je vier Punkten treffen (und ihre einzigen Quadrisekanten bilden);

$$u = 24, \quad A_\mu = 6\mu.$$

c) $R_6^2 : n = 6, \quad p = 2, \quad h \qquad\qquad 3;$

(3, 3) und als Restkurve eine Gerade und ein Kegelschnitt ohne gemeinsame Punkte, welche die Kurve in vier und in sechs Punkten treffen;

$$u = 24, \quad A_\mu = 6\mu - 1.$$

d) $R_6^3 : n = 6, \quad p = 3, \quad h = 7, \quad \bar{n} = 3;$

(3, 3) und als Restkurve eine R_3^0, welche sie in acht Punkten schneidet;

$$u = 24, \quad A_\mu = 6\mu - 2.$$

d′) R_6^3 Sonderfall von d): $n = 6, \quad p = 3, \quad h = 7, \quad \bar{n} = 3;$

(2, 4) und als Restkurve zwei windschiefe Gerade, welche die Kurve in je vier Punkten schneiden;

$$u = 23, \quad A_\mu = 6\mu - 2 \quad (\text{aber } A_2 = 9).$$

e) $R_6^4 : n = 6, \quad p = 4, \quad h = 6, \quad \bar{n} = 2; \quad (2, 3);$

$$u = 24, \quad A_\mu = 6\mu - 3.$$

f) $R_6^{10} : n = 6, \quad p = 10, \quad h = 0, \quad \bar{n} = 0; \quad (1, 6);$

$$u = 30, \quad A_\mu = 6\mu - 9 \quad (\text{aber } A_1 = 3, \quad A_2 = 6, \quad A_3 = 10).$$

Kapitel XXXVII.

Besondere algebraische Raumkurven.

Von *Luigi Berzolari* in Pavia.

§ 1. Einige besondere Klassen von Raumkurven.

Unter den zahlreichen Klassen von Raumkurven, die sich auf eine spezielle Art erzeugen lassen oder durch irgend eine Besonderheit gekennzeichnet sind, führen wir die folgenden an:

a) De Jonquières, *Giorn. di Mat.* (1) **23**, 48 (1885), der *Académie des sciences* im Jahre 1859 vorgelegt (s. *C. R.* **49**, 542 (1859)) und darauf im Auszug veröffentlicht *Nouv. Ann.* (2) **3**, 97 (1864), und Cremona, *Bologna Mem.* (2), **2**, 621 (1863), **5**, 3 (1864), *Giorn. di Mat.* (1) **1**, 305 (1863), **3**, 269, 363 (1865) haben die Kurve untersucht, auf welcher die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier birational aufeinander bezogener Bündel liegen (Bd. II[1], Kap. XVI). Ist die Korrespondenz von der Ordnung n, so ist die Kurve im allgemeinen von der Ordnung $n+2$ und dem Geschlecht $n-1$.

b) Die algebraischen oder nichtalgebraischen Raumkurven, deren Tangenten einem linearen Strahlenkomplex angehören, wurden besonders von Appell, *Ann. éc. norm.* (2) **5**, 245 (1876) und Picard, ebenda (2) **6**, 329 (1877) untersucht, von denen der letztere gezeigt hat, daß ihre allgemeinen Gleichungen sich ohne Quadraturen erhalten lassen. Vgl auch Lie, *Math. Ann.* **5**, 145 (1872); Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen I*, Leipzig 1896, S. 230ff.

Die Schmiegungsebene einer solchen Kurve in einem beliebigen Punkte ist die Nullebene des Punktes bezüglich des Komplexes (Appell).

Im Berührungspunkt einer stationären Ebene hat die Tangente mit der Kurve eine dreipunktige Berührung, so daß, wenn die Kurve rational von der Ordnung n ist, die Anzahl dieser Punkte $2(n-3)$ *beträgt* (Picard).

Vgl. auch Steinmetz, *Am. J.* **14**, 161 (1892); Autonne, *J. éc. pol.* **63**, 79 (1893); Snyder, *Am. J.* **29**, 279 (1907); Michel, *Nouv. Ann.* (4) **7**, 539 (1907) und für den Fall, wo die Kurve rational ist, Snyder, *Am. J.* **28**, 237 (1906).

Die Untersuchung der rationalen Raumkurven von der Ordnung n, deren Tangenten einem linearen Komplex angehören, reduziert sich auf die Bestimmung zweier Büschel binärer Formen von der Ordnung n, welche dieselbe Jacobische Form besitzen, wie Darboux in Vorlesungen 1880—81 und Stephanos, *Sav. étrang.* **27**, 53 (1882) gezeigt haben.

Allgemeiner hat Egan, *Dubl. Proc.* **29**, 33 (1911) die Kurven untersucht, für welche die Klasse jedes Zweiges der Ordnung gleich wird. Diese Kurven haben, wenn sie algebraisch sind, eine Klasse, die ihrer Ordnung gleich ist.

c) De la Gournerie, *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, Paris 1867, p. 234 ff., hat die *tetraedral-symmetrischen Raumkurven* betrachtet, d. h. die Schnittkurven zweier *tetraedral-symmetrischen Flächen*, die in homogenen Koordinaten durch Gleichungen von der Form

$$a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + a_3 x_3^n + a_4 x_4^n = 0, \quad b_1 x_1^n + b_2 x_2^n + b_3 x_3^n + b_4 x_4^n = 0$$

dargestellt werden. Diese Kurven sind algebraisch, wenn n rational (positiv oder negativ) ist. Ihre Tangenten treffen die Seitenflächen des Grundtetraeders in Gruppen von vier Punkten, die ein konstantes Doppelverhältnis haben, sie gehören daher einem tetraedralen Strahlenkomplex an.

Über die Kurven, deren Tangenten einem tetraedralen Komplex angehören, vgl. Lie, *Gött. Nachr.* 1870, S. 53; Lie-Scheffers, a. a. O., Kap. VIII und IX; Eiesland, *Rend. Circ. Mat.* **36**, 233 (1913).

d) W. Stahl, *J. f. Math.* **99**, 154 (1886) hat die algebraischen Raumkurven untersucht, die auf einer einzigen Fläche 2. Ordnung liegen und deren Schmiegungsebenen eine einzige andere Fläche 2. Ordnung berühren, so daß ihre Tangenten diese beiden Flächen berühren. Ein besonders bemerkenswerter Fall dieser Kurven ist die Raumkurve 4. Ordnung 2. Art (§ 3).

e) Voss, *Math. Ann.* **27**, 364 (1886) hat die Paare von Kurven betrachtet, die vermöge fünf biquaternärer Gleichungen aufeinander eindeutig bezogen werden, und von ihnen insbesondere die Ordnung, den Rang und das Geschlecht bestimmt. Z. B. liefern fünf bilineare Gleichungen ein Paar von Kurven 10. Ordnung, 10. Ranges vom Geschlecht 21.

f) Bei einer *hyperelliptischen Raumkurve* von der Ordnung n und dem Geschlecht $p\,(n \geqq p + 3)$ bilden die Verbindungslinien der Punktepaare ihrer linearen Schar g_2^1 (Bd. II[1], S. 309, 332) im allgemeinen eine rationale Regelfläche von der Ordnung $n - p - 1$. Hierauf gründet sich eine Einteilung dieser Kurven in Arten, die durch die Mindestordnung charakterisiert werden, die eine auf der Regelfläche gezogene Kurve haben kann. Vgl. Segre, *Math. Ann.* **30**, 203 (1887).

Über den Fall $p = 2$ vgl. auch J. de Vries, *Amsterdam Verslagen* (4) **16**, 871 (1907).

Mit den besonderen hyperelliptischen R_n, die eine $(n-2)$-fach schneidende Gerade besitzen, hat sich Bobek, *Wien. Sitzungsber.* **95**, 349 (1887) beschäftigt.

g) Sätze über die *elliptischen Kurven* (d. h. vom Geschlecht $p = 1$), insbesondere über die der 5. und 6. Ordnung, hat Segre, *Math. Ann.* **27**, 296 (1886) geliefert in Verknüpfung mit den Regelflächen, die man erhält, wenn man bei den beiden Arten von eindeutigen Transformationen in sich, welche die Kurve zuläßt, die Paare entsprechender Punkte verbindet (Bd. II[1], S. 353). Für die ∞^1 Korrespondenzen erster Art (die alle involutorisch sind) erhält man rationale Regelflächen von der Ordnung $n - 2$, die durch die Kurve einfach hindurchgehen. Die drei Korrespondenzen zweiter Art, die involutorisch sind, liefern hingegen drei elliptische Regelflächen von der Ordnung n, die durch R_n einfach hindurchgehen.

h) Zahlreiche besondere Kurven, Flächen und Verwandtschaften haben untersucht Kantor, *Wien. Denkschr.* **46**, 83 (1882) und Montesano, *Ann. di Mat.* (3) **1**, 313 (1898), der erste bei der Betrachtung der linearen Systeme von linearen Transformationen (in der Ebene und) im Raume, der zweite bei der Behandlung des Problems der Projektivität für Gruppen von linearen Strahlenkomplexen und Strahlenkongruenzen; ferner R. Sturm, *Math. Ann.* **12**, 254 (1877) bei der Untersuchung von reziproken Bündeln.

i) In Ergänzung von Kap. XXXI, § 1 führen wir an, daß Stuyvaert, *Liège Mém.* (3) **7** (1907) in vielen besonderen Fällen die Kurve untersucht hat, die man erhält, wenn man die Determinanten der Ordnung l einer Matrix $\|a_{ik}\|$ von l horizontalen und $l+1$ vertikalen Reihen gleich Null setzt, wo a_{ik} eine quaternäre Form der Punktkoordinaten von der Ordnung $n_i + p_k$ ist. Die Kurve ist von der Ordnung

$$\sum_i n_i^2 + \sum_{i \neq k} n_i n_k + \sum_{i \neq k} p_i p_k + (\sum_i n_i)(\sum_i p_i)$$

und von dem Geschlecht

$$1 + \mu(\sum_i n_i + \sum_i p_i - 2) - \sum_{i \neq j \neq k} n_i n_j n_k - \sum_{i \neq j \neq k} p_i p_j p_k$$
$$- \tfrac{1}{2}[\sum_{i \neq j} n_i^2 n_j + \sum_{i \neq j} p_i^2 p_j + (\sum_i n_i)^2 \sum_i p_i + (\sum_i n_i)(\sum_i p_i)^2].$$

Wenn die a_{ik} linear sind, erhält man eine Kurve von der Ordnung $\frac{1}{2} l(l+1)$, dies hatte schon Cayley, *Cambr. and Dublin Math. J.* **4**, 132 (1849), *Papers I,* p. 457, gefunden.

Die von Stuyvaert betrachteten Kurven findet man, wenn man voraussetzt, daß die a_{ik} von der 1. oder 2. Ordnung sind, mithin werden sie durch projektive lineare Systeme von Ebenen und Flächen 2. Ordnung erzeugt, insbesondere sind darunter außer der kubischen Raumkurve Kurven R_5^2, R_6^3, R_7^5, R_8^7, R_9^9, R_{10}^{11}. Über einige von diesen wollen wir nun noch weiter sprechen.

Die R_{10}^{11} mit der Konstantenzahl 40 war bereits auf geometrischem Wege von Reye, *J. f. Math.* **108**, 89 (1891) als Ort eines Punktes, in dem sich entsprechende Ebenen von fünf kollinearen Räumen schneiden, untersucht worden. Diese Räume bestimmen ein lineares System von ∞^4 kollinearen Räumen, das ∞^4 Gebüsche von solchen Räumen enthält. Die zu diesen Gebüschen gehörenden ∞^4 Kernflächen 4. Ordnung gehen durch die R_{10}^{11} hindurch, und irgend zwei von ihnen haben außerdem eine R_6^3 gemein, welche die R_{10}^{11} in 20 Punkten trifft und die Kernkurve des den beiden Gebüschen gemeinsamen Raumbündels ist.

Nach R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung*, Leipzig 1867, S. 229ff., *läßt sich auf jeder R_7^5 ein Punkt V_0 bestimmen, derart, daß die Ebenen durch V_0 und nur diese die Kurve außerdem in sechs Punkten eines Kegelschnittes treffen.* Diese Kegelschnitte sind die Restschnitte der ∞^2 Flächen 3. Ordnung, die durch die Kurve hindurchgehen, und bilden eine lineare Kongruenz, d. h. ein System von ∞^2 Kurven der Art, daß durch jeden Punkt des Raumes eine einzige Kurve geht (vgl. Kap. XXXII, § 1).

Diese Kongruenz wurde von Montesano, *Torino Atti* **27**, 660 (1892) untersucht, der die Kegelschnitte als die Schnittkurven der Ebenen eines Ebenenbündels mit den entsprechenden Flächen eines dem Ebenenbündel kollinearen Bündels von F_2 fand; *Napoli*

Rend. (3) **1**, 93, 155 (1895) hat er alle Typen von linearen Kegelschnittkongruenzen bestimmt, was zur Betrachtung anderer besonderer Raumkurven von den Ordnungen 5, 6, . . . führt.

Die R_7^5 bietet sich auch bei der Untersuchung der bilinearen Kegelschnittkomplexe im Raume dar: Montesano, *Napoli Atti* (2) **15** (1913), Nr. 8.

Durch Zerfällen der R_7^5 ergibt sich, daß der Sturmsche Satz auch für die R_6^2 und ihre (einzige) Quadrisekante (auf der V_0 liegt) gilt, ferner für die R_6^3 und eine ihrer Trisekanten (V_0 liegt auf R_6^3 und ändert sich mit der Trisekante), für die R_5^1 und zwei windschiefe Trisekanten von ihr (V_0 liegt auf R_5^1), endlich für die R_5^0, ihre Quadrisekante und eine Trisekante (V_0 liegt dann auf der Quadrisekante, und es ergibt sich ein Satz, von dem in § 4 gesprochen wird).

Eine R_7^5 besonderer Art hat Stuyvaert, *Diss.* Gand. 1902, Chap. 3, erhalten als Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die man von einem festen Punkte P an die ∞^2 kubischen Raumkurven legen kann, die durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und drei gegebene Gerade zu Bisekanten haben. Die Kurve geht durch A, B und P einfach hindurch und hat zu Tangenten in A und B die Geraden AP und BP.

Eine speziellere R_7^5 findet man als Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die von einem Punkte P an die durch fünf gegebene Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 gehenden kubischen Raumkurven gelegt werden. Dieses System von kubischen Raumkurven, das schon Reye, *Zschr. Math. Phys.* **13**, 521 (1868) und Koenigs, *Nouv. Ann.* (3) **2**, 301 (1883) betrachtet hatten (vgl. auch Stuyvaert, a. a. O.), wurde von Humbert, *Journ. éc. pol.* **64**, **123** (1894) insbesondere in Beziehung zu der daraus hervorgehenden speziellen R_7^5 und der allgemeinen Fläche 3. Ordnung untersucht. Der Sturmsche Punkt V_0 fällt mit P (dem *Pol* der Kurve) zusammen. Die Kurve geht durch P, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 einfach hindurch und hat zur Tangente in A_i die Gerade A_iP, außerdem geht sie durch jeden der zehn Punkte hindurch, in denen die Verbindungslinien je zweier der Punkte A_i die jedesmalige Verbindungsebene der drei übrigen Punkte treffen. Diese Eigenschaft ist für die in Rede stehende R_7^5 charakteristisch, d. h. jede R_7^5, die durch fünf gegebene Punkte A_i und die zehn in der angegebenen Weise aus ihnen abgeleiteten Punkte hindurchgeht, läßt sich wie angeführt erzeugen. Durch die Kurve gehen ∞^2 Flächen 3. Ordnung, insbesondere liegt sie auf fünf kubischen Kegeln, deren

Spitzen in den Punkten A_i liegen und deren Seitenlinien die Kurve dreifach schneiden. Umgekehrt ist jede Fläche F_3 der Ort der R_7^5, von denen der Pol auf einer Geraden von F_3 liegt und für welche die Punkte A_i die Berührungspunkte der durch die Gerade gelegten Tangentialebenen sind.

j) Andere bemerkenswerte Kurven findet man bei der Bestimmung der birationalen (insbesondere involutorischen) Transformationen des Raumes, bei welchen die Verbindungslinien der Paare entsprechender Punkte besondere Komplexe bilden.

So hat Montesano, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (4) **4**¹, 207, 277 (1888) alle involutorischen Transformationen angegeben, welche einen nicht speziellen linearen Strahlenkomplex liefern, und gefunden, daß die allgemeinste solche Transformation durch eine besondere R_{10}^{11} bestimmt wird, welche die charakteristische Eigenschaft hat, von jeder Ebene des Raumes in zehn Punkten einer Kurve 3. Ordnung geschnitten zu werden. Durch eine besondere Zerfällung dieser Kurve findet man aufs neue die oben genannte R_7^5.

Ebenso wird nach Montesano, *Rom. Acc. Lincei Rend.* (4) **5**¹, 497 (1889) die allgemeinste involutorische Transformation, welche einen tetraedralen Komplex liefert, durch eine R_{11}^{14} bestimmt (die mit einer sie in 18 Punkten treffenden R_5^2 zusammen die Grundkurve eines Büschels von F_4 bildet) und nach Pieri, *Rend. Circ. Mat.* **7**, 296 (1893) wird die allgemeinste Transformation, bei welcher die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen nicht ausgearteten Kegelschnitt Γ treffen, durch eine R_{13}^{14} bestimmt, von der 13 Punkte auf Γ liegen, die aber nicht auf einer durch Γ doppelt hindurchgehenden F_4 enthalten ist.

k) Kurven (und Flächen) 5. und höherer Ordnung kommen auch in kinematischen Untersuchungen vor. Vgl. z. B. Thévenet, *Thèse,* Paris 1886; Schoenflies, *J. f. Math.* **98**, 265 (1885), *Bull. sc. math.* (2) **12**¹, 18 (1888), *Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung*, Leipzig 1886, S. 140; Mannheim, *Principes et développements de géometrie cinématique,* Paris 1904, p. 166, 249, 381.

§ 2. Allgemeine Eigenschaften der rationalen Raumkurven.

Die in Bd. II¹, S. 326 auseinandergesetzten allgemeinen Eigenschaften gelten auch mit leicht erkennbaren Modifikationen für

die rationalen Kurven in einem Raume von drei oder mehr Dimensionen. Insbesondere *wird die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine irreduzible Kurve in einem beliebigen Raum rational ist, d. h. auf die Punkte einer Geraden algebraisch und wechselweise eindeutig bezogen werden kann, die, daß ihr Geschlecht* $p = 0$ *ist.*

Wenn man dann die homogenen Koordinaten eines Kurvenpunktes ganzen Funktionen eines Parameters λ ohne gemeinsame Faktoren proportional setzt, so wird die Kurve rational, und man kann immer, nötigenfalls nach einer rationalen Transformation des Parameters, annehmen, daß die Beziehung zwischen den Werten von λ und den Punkten der Kurve wechselweise eindeutig ist.

Wenn die Kurve allgemein und von der Ordnung n ist, so geht aus den Formeln in Kap. XXXVI, § 6 hervor, daß sie von der Klasse $3(n-2)$ und dem Range $2(n-1)$ ist; durch einen allgemeinen Punkt des Raumes gehen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Bisekanten und $2(n-2)(n-3)$ doppelt berührende Ebenen von ihr; jede ihrer Tangenten trifft $2(n-3)$ andere; es existieren $4(n-3)$ stationäre Ebenen und $6(n-3)(n-4)$ Schmiegungsebenen, die in einem anderen Punkte berühren, $2(n-2)(n-3)$ Tangenten, welche die Kurve in einem anderen Punkte schneiden,

$$\tfrac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$$

dreifach berührende Ebenen,

$$\tfrac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)$$

vierfach treffende Gerade, während die Regelfläche der Trisekanten von der Ordnung

$$\tfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$

ist.

Über diese Zahlen vgl. auch z. B. Em. Weyr, *Giorn. di Mat.* (1) **9**, 217 (1871), *Wien. Sitzungsber.* **79**, 680 (1879); W. Stahl, *Math. Ann.* **40**, 1 (1892); Genty, *Bull. Soc. math.* **20**, 106 (1892); W. F. Meyer, *Monatsh. f. Math.* **4**, 229, 331 (1893); *Math. Ann.* **43**, 286 (1893); F. Deruyts, *Belg. Bull.* (3) **35**, 287 (1898); Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 111, 662; R. Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verw. I*, Leipzig 1908, S. 348.

Auch die allgemeinen Eigenschaften, die mit der Theorie der Kombinanten und der Apolarität verknüpft sind (Bd. II^1, S. 328), lassen sich auf die Raumkurven R_n ausdehnen, für welche man

vier *direkte* und vier *indirekte erzeugende Funktionen* G', G_1', G_2', G_3 und Γ', Γ_1', Γ_2', Γ_3 findet, die entweder allein binäre Veränderliche oder mit diesen zusammen auch Koordinaten von Punkten, Geraden und Ebenen enthalten. Sie liefern wie in der Ebene die *elementaren Kombinanten* von R_n, die entweder rein binär oder einfach, zweifach, dreifach gerändert sein können. Und es zeigt sich:

Alle algebraischen Formen, welche in der Theorie einer rationalen Raumkurve auftreten und invariant sind bezüglich der linearen Transformationen des Parameters sowie bezüglich der linearen Transformationen des Raumes, sind binäre simultane In- oder Kovarianten der elementaren Kombinanten und umgekehrt. Dazu kommen noch Ausdrücke vom Typus $(xx'x''x''')$, $(xx'yz)$, $(yzy'z')$, $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4$.

Die Gleichungen $G' = 0$, $G_1' = 0$, $G_2' = 0$, $G_3 = 0$ liefern die Bedingung dafür, daß die vier Punkte λ, μ, ν, ϱ von R_n in einer Ebene liegen, oder die Gleichung der Ebene, die durch die Punkte λ, μ, ν von R_n geht, resp. die Gleichung des speziellen linearen Strahlenkomplexes, dessen Achse die Verbindungslinie der Punkte λ, μ von R_n ist, oder die Gleichung des Punktes λ von R_n in Ebenenkoordinaten.

Das Verschwinden von Γ' liefert die Gleichung der *Fundamentalinvolution* von R_n, d. h. der Involution von der Ordnung n und Stufe $n - 4$, deren Punktgruppen apolar sind zu allen ebenen Punktgruppen von R_n (für $n = 4$ reduziert sie sich auf eine einzige Punktgruppe, nämlich die Berührungspunkte der stationären Ebenen), während $\Gamma_1' = 0$, $\Gamma_2' = 0$, $\Gamma_3 = 0$ die Involutionen von der Ordnung n und den Stufen $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$ darstellen, (welche die Fundamentalinvolution enthalten und) deren Punktgruppen apolar sind zu den Punktgruppen von R_n, die in den durch einen gegebenen Punkt oder eine gegebene Gerade gehenden Ebenen oder in einer gegebenen Ebene liegen.

Über alles dies vgl. Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 101 (1892), **21**, 1 (1893), wo die vorstehenden Involutionen auch mit Hilfe der Oskulanten und der Überräume konstruiert werden.

Mit den vorstehenden algebraischen Prozessen steht in enger Verbindung die Erzeugung einer rationalen R_n als Ort der Schnittpunkte entsprechender Schmiegungsebenen dreier zueinander projektiver rationaler Raumkurven oder der Schnittpunkte der Schmiegungsebenen einer rationalen Raumkurve mit den entsprechenden Erzeugenden einer auf die Kurve projektiv bezogenen rationalen Regelfläche, mithin die Aufsuchung der zur gegebenen R_n *perspek-*

tiven rationalen Ebenengewinde und Regelscharen (bei denen die Ebenen oder Strahlen durch die ihnen entsprechenden Kurvenpunkte gehen). Über diese Fragen vgl. Brill, *Münch. Ber.* 1885, S. 276 = *Math. Ann.* **36**, 230 (1890); Schumacher, *Math. Ann.* **38**, 304 (1891); W. Stahl, *Math. Ann.* **40**, 1 (1892); vom geometrischen Standpunkte aus auch Segre, *Torino Atti* **21**, 95 (1885), der im übrigen das Problem der projektiven Erzeugung einer Raumkurve auch für Kurven von beliebigem Geschlecht p gelöst hat: *Math. Ann.* **34**, 1 (1889); vgl. auch *Ann. di Mat.* (2) **22**, 136 (1894).

Es ergibt sich z. B., daß *sich die allgemeine rationale* R_n *durch den Schnitt entsprechender Ebenen von drei eindeutig aufeinander bezogenen rationalen Ebenengewinde niederer Klasse* k *erzeugen läßt, wo*

$$k = \frac{n}{3} \quad \textit{oder} \quad n-2 \quad n+1 \quad \textit{oder} \quad n-1 \quad n+2$$

ist, je nachdem n *von der Form* 3μ, $3\mu - 1$, $3\mu - 2$ (Brill).

Über die Raumkurven, welche perspektive Kegel 2. Ordnung besitzen, s. R. Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie II,* Leipzig 1893, S. 343.

Eine allgemeine Erzeugungsweise ebener und räumlicher rationaler Kurven, die von den vorstehenden völlig verschieden ist und sich auf den harmonischen Mittelpunkt eines Systems von Punkten bezüglich einer Ebene gründet, hat Fouret, *C. R.* **101**, 1241 (1885) angegeben.

Von der Parameterdarstellung ausgehend hat Brill, *Math. Ann.* **3**, 456 (1871) in Form einer Determinante die Bedingung für das Auftreten eines Doppelpunktes bei einer rationalen Raumkurve abgeleitet.

Korndörfer, *Math. Ann.* **3**, 415 (1871) hat mit Hilfe des Abelschen Theorems für eine rationale Raumkurve, die den vollständigen Schnitt zweier Flächen bildet, die den von Clebsch, *J. f. Math.* **64**, 43 (1865) für die ebenen rationalen Kurven behandelten analogen Berührungsprobleme gelöst.

Sätze über die ein- und umschriebenen Polygone gab F. Deruyts, *Belg. Bull.* (3) **36**, 553 (1898).

Unter den besonderen Fällen rationaler Raumkurven R_n ist besonders beachtenswert der Fall, wo R_n *vier Hyperoskulationspunkte* W_1, W_2, W_3, W_4 *besitzt,* d. h. vier einfache Punkte, in denen von der Schmiegungsebene $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ alle n Schnittpunkte

mit der Kurve im Berührungspunkte zusammenfallen. Die Tangenten einer solchen Kurve gehören alle dem tetraedralen Strahlenkomplex an, dessen Fundamentaltetraeder $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ist und dessen absolute Invariante die absolute Invariante der die vier Punkte W_i auf der Kurve liefernden Form 4. Ordnung ist.

Nach Berzolari, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **39**, 419 (1906) besitzt die Kurve für $n > 4$ unendlich viele $(n-1)$-fach schneidende Gerade dann und nur dann, wenn höchstens zwei von diesen vier Ebenen verschieden sind.

Unter der Annahme, daß $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ verschieden sind, ist die Kurve mit der Erweiterung auf den Überraum von Marletta, *Rend. Circ. Mat.* **21**, 192 (1906), **24**, 32 (1907), **25**, 376 (1908) untersucht worden, wo auch andere besondere Fälle behandelt sind; ferner von Berzolari, ebenda **22**, 214 (1906), **24**, 1 (1907); Ciani, ebenda **26**, 315 (1908).

Die Haupteigenschaften der Kurve hängen von der Existenz dreier gescharter Involutionen ab, welche die Kurve in sich transformieren. Nennen wir r_1, r_2, r_3 die Verbindungslinien der Punktepaare von R_n, die der Reihe nach W_2, W_3 und W_1, W_4; W_3, W_1 und W_2, W_4; W_1, W_2 und W_3, W_4 harmonisch trennen, so sind für gerades n die Achsen der drei Involutionen die Paare von Gegenkanten eines *Haupttetraeders* T, von dem r_1, r_2, r_3 drei von demselben Eckpunkt ausgehende oder drei in derselben Seitenfläche liegende Ecken sind, je nachdem n durch 4 teilbar ist oder nicht, während für ungerades n die Achsen dieser Involutionen drei paarweise harmonische Paare von Regelstrahlen einer Regelschar sind, die zu Transversalen r_1, r_2, r_3 hat.

Für gerades n sind r_1, r_2, r_3 *Hauptsehnen* von R_n (vgl. Kap. XXXVI, § 8), außerdem sind die Tangenten von R_n in den ∞^1 Punktgruppen der Involution 4. Ordnung, die auf R_n durch die Punktgruppe W_i und ihre Hessesche Gruppe festgelegt wird, Erzeugenden der einen Regelschar eines Hyperboloids, von dem T ein Poltetraeder ist.

Berzolari, *Palermo Rend. Circ. mat.* **24**, 1 (1907) hat außerdem gezeigt, wie die Untersuchung der Kurve für gerades n mit der Figur der vierfach perspektiven (desmischen) Tetraeder und für ungerades n mit der Kummerschen Konfiguration verknüpft ist. Die vier auftretenden Tetraeder sind die Tetraeder $W_1 W_2 W_3 W_4$ und $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$, ferner eines, welches zu Ecken die Schnittpunkte von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mit den Tangenten in W_1, W_2, W_3, W_4 hat, und eines, welches zu Seitenflächen die Ebenen hat,

die aus denselben Tangenten die Ecken des Tetraeders $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ der Reihe nach projizieren. *Für gerades n ist jedes der vier Tetraeder dem Tetraeder T vierfach perspektiv, für ungerades n bilden die Spitzen und Seitenflächen der vier Tetraeder eine Kummersche Konfiguration.*

Der Fall der kubischen Raumkurve ($n = 3$) ist von Berzolari, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **16**[1], 726 (1907) besonders untersucht worden.

§ 3. Rationale Raumkurven vierter Ordnung.

Die rationalen Raumkurven 4. Ordnung fallen unter die soeben besprochenen Kurven.

Die ersten Andeutungen über diese Kurve (die nach Cremona, *Lomb. Ist. Atti* **2**, 299 (1860), *Opere I,* Milano 1914, p. 274, im Gegensatz zu der Schnittlinie zweier F_2 als Raumkurve 4. Ordnung *2. Art* bezeichnet wird) finden sich bei Salmon, *Cambr. Dublin Math. J.* **5**, 23 (1850) und Steiner, *J. f. Math.* **53**, 133 (1857), *Werke II,* S. 649, während mit der ihr dual entsprechenden abwickelbaren Fläche sich schon Cayley, *J. f. Math.* **34**, 150 (1847), **39**, 15 (1850), *Papers I,* S. 354, 533 und Salmon, *Cambr. Dubl. Math. J.* **3**, 171 (1848) beschäftigt hatten.

Salmon und Steiner verdankt man den Satz, daß *eine Fläche 2. Ordnung und eine Fläche 3. Ordnung, die einen irreduziblen oder zerfallenden Kegelschnitt gemein haben, sich außerdem in einer Kurve 4. Ordnung erster Art schneiden, während, wenn sie zwei windschiefe Gerade gemein haben, der Restschnitt eine R_4 zweiter Art ist.*

Hiervon ausgehend hat Cremona, *Ann. di Mat.* (1) **4**, 71 (1861), *Opere I,* Milano 1914, p. 279, die Kurve auf geometrischem Wege ausführlich behandelt, indem er sie u. a. als Restschnitt einer Regelfläche 3. Ordnung mit einer durch ihre Doppellinie hindurchgehenden F_2 erzeugte.

Wir wollen W_i die Berührungspunkte der vier stationären Ebenen, B_i die Berührungspunkte und S_i die Schnittpunkte der vier berührenden Trisekanten nennen. Die Tangentenfläche von R_4 ist dann von der 6. Ordnung und 6. Klasse und hat eine rationale Doppellinie D_6 6. Ordnung, die auf einer F_2 liegt und deren Schmiegungsebenen eine andere F_2 berühren; die Tangentenfläche von D_6 besitzt eine Knotenlinie, die wieder von der 4. Ordnung und zweiten Art ist. Die Kurve D_6 trifft R_4 in den Punkten W_i

und S_i, hat in den letzteren jedesmal eine Spitze und zu Schmiegungsebenen die Schmiegungsebenen von R_4 in den Punkten B_i.

Die doppelt berührenden Ebenen von R_4 berühren alle die Fläche 2. Ordnung M, welche die Tangenten von R_4 in den Punkten W_i enthält. Die abwickelbare Fläche der doppelt berührenden Ebenen ist von der 6. Ordnung und 4. Klasse und hat zur Rückkehrkante eine Kurve R_6 6. Ordnung, die auf einer F_2 liegt und vier Spitzen in den Punkten B_i hat, indem sie dort die berührenden Trisekanten von R_4 berührt.

Der Tangentenfläche von R_4 sind einbeschrieben die Steinersche Fläche S 3. Klasse, die von den R_4 in vier harmonischen Punkten treffenden Ebenen umhüllt wird, und die Fläche E 2. Ordnung, welche zugleich von den R_4 in vier äquianharmonischen Punkten schneidenden Ebenen umhüllt wird und den Ort der Geraden bildet, durch welche drei Schmiegungsebenen von R_4 gehen.

Diese und andere Sätze stammen von Cremona, a. a. O. Einige wurden analytisch bewiesen von Em. Weyr, *Wien. Sitzungsber.* **63**, 493 (1871), während die geometrische Behandlung der Kurve fortgeführt wurde von Em. Weyr, ebenda **72**, 686 (1875), **73**, 203 (1876), **75**, 458 (1877); Adler, ebenda **86**, 919, 1201, 1212 (1883) mit Hilfe der Abbildung auf einen Kegelschnitt, ferner von Jolles, *Diss.* Dresden 1883; W. Stahl, *J. f. Math.* **101**, 73 (1887); Eberhardt, *Ztschr. Math. u. Phys.* **32**, 65, 129 (1887); Grünwald, *Wien. Sitzungsber.* **108**, 1009 (1899); Timerding, *J. f. Math.* **121**, 188 (1900).

Von jedem Punkt P der Kurve lassen sich an sie drei anderswo berührende Schmiegungsebenen legen: Cremona hat bewiesen, daß *die Verbindungsebene der drei Berührungspunkte durch P geht und, wenn man P die Kurve durchlaufen läßt, einen Kegel 2. Grades B umhüllt* (dessen Spitze wir mit O bezeichnen). Berzolari, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **23**, 96 (1890), **25**, 950 (1892) hat bewiesen, daß das durch die Tangenten in den drei Berührungspunkten bestimmte Hyperboloid die Kurve R_4 noch in zwei Punkten schneidet, die P in einer *symmetrischen* Korrespondenz (2, 2) entsprechen.

Die Ebenen, welche R_4 in vier Punkten eines Kreises schneiden, umhüllen eine Fläche 4. Klasse, die von Sturm, *Ann. di Mat.* (2) **4**, 73 (1870) und Cremona, ebenda, S. 85, untersucht wurde.

Daß *drei Hauptsehnen existieren, die im Punkte O zusammenlaufen* (Kanten des Haupttetraeders T: § 2), fanden Bertini, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **5**, 622 (1872) und Laguerre, *Nouv. Ann.* (2) **11**, 319, 337, 418 (1872), **12**, 55 (1873), *Œuvres II*, p. 281, von

denen der erste dies benutzt hat, um die Parameterdarstellung der Kurve auf die folgende einfache Form zu bringen (die immer gilt, außer wenn die Kurve eine Spitze hat):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2(\lambda^2 - a^2) : \lambda^2 - 1 : \lambda,$$

wo a^2 eine für die Kurve charakteristische Konstante bedeutet.

Die Bedingung dafür, daß vier Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von R_4 in einer Ebene liegen, lautet

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_3\lambda_4 + a^2 = 0.$$

Es ergibt sich, daß *O der dreifache Punkt und die Hauptsehnen die Doppelgeraden der Steinerschen Fläche S bilden, auf der R_4 eine Haupttangentenkurve ist.*

Bertini erkannte ferner das Bestehen einer einstufigen Involution J 4. Ordnung auf R_4, in welcher die irgendeinem Punkte konjugierten Punkte die weiteren Schnitte von R_4 mit den aus dem Punkt die Hauptsehnen von R_4 projizierenden Ebenen sind. Zu J gehören die drei Gruppen W_i, B_i und S_i, während die sechs Doppelpunkte der Involution die Treffpunkte der Hauptsehnen sind.

Formentheoretisch wurde die R_4 untersucht von Armenante, *Giorn. di Mat.* (1) **11**, 221 (1873), **12**, 250 (1874) und W. F. Meyer, *Apolarität und rationale Kurven,* Tübingen 1883, S. 19, 180ff. Liefert die Gleichung $w = 0$ die Gruppe der Punkte W_i und ist H die Hessesche Form der Form w, T ihre Kovariante 6. Ordnung, i und j ihre quadratische und ihre kubische Invariante (Bd. I[1], S. 363), so wird die Involution J durch $w + \lambda H = 0$ dargestellt, und liefern die Gleichungen $H = 0$, $3iH - 2jw = 0$ die Punkte B_i und S_i und $T = 0$ die Schnittpunkte der Hauptsehnen. Die Bedingung dafür, daß R_4 einen Doppelpunkt hat, wird $j = 0$; wird $i = 0, j = 0$, so hat R eine Spitze. Das Verschwinden von i kennzeichnet eine Kurvengattung, die Bertini *äquianharmonisch* nannte und als Schnitt (außer der Doppellinie) einer kubischen Regelfläche mit einer ersten Polare bestimmte. Das identische Verschwinden von T drückt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß die Tangenten von R_4 einem linearen Strahlenkomplex angehören, d. h. R_4 von der 4. Klasse wird.

Mit Hilfe der Oskulanten wurde R_4 untersucht von Beltrami, *Bologna Mem.* (3) **10**, 233 (1879), *Opere III,* Milano 1911, p. 168; Study, *Leipzig. Ber.* **38**, 3 (1886); Jolles, *Habilitationsschrift* Aachen 1886; W. Stahl, a. a. O. und *J. f. Math.* **104**, 38 (1887).

Die kubischen Oskulanten oskulieren die stationären Ebenen α_i, liegen auf der Tangentenfläche von R_4 und haben mit R_4 jede einen Punkt, die zugehörige Tangente und die Schmiegungsebene gemein Ihre Tangenten und Achsen liegen in dem tetraedralen Komplex K, dessen Haupttetraeder $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ ist und dem die Tangenten der Kurve angehören, ihre Schmiegungsebenen umhüllen die Steinersche Fläche S. Zwei beliebige der Oskulanten werden durch R_4 projektiv aufeinander bezogen, indem zwei entsprechende Tangenten in derselben Schmiegungsebene von R_4 liegen.

Salmon (s. Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II,* S. 322) hatte bemerkt, daß in einem besonderen Koordinatensystem die Gleichung der Tangentenfläche einer R_4 in die Gleichung der desmischen Fläche 12. Ordnung 4. Klasse übergeht (welche kollinear verwandt ist mit der Zentrafläche einer Fläche 2. Grades), wenn man die Punktkoordinaten durch ihre Quadrate ersetzt. Diese Beziehung zwischen den beiden Flächen wurde von W. Stahl, *J. f. Math.* **101**, 73 (1887) geometrisch beleuchtet. Es gibt ∞^1 Flächen F_2 2. Grades, für die $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ ein Poltetraeder ist und der Punkt O zur Polare eine Schmiegungsebene von R_4 hat. Diese F_2 umhüllen eben eine desmische Fläche ψ_{12}, die Brennfläche von drei Strahlensystemen 6. Ordnung 2. Klasse, von denen zwei aus den Regelscharen der verschiedenen F_2 bestehen und die dritte in dem tetraedralen Komplex K enthalten ist. Wenn man nun das Gebüsch der Flächen 2. Grades, die $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ zum Poltetraeder haben, projektiv auf die Ebenen des Raumes bezieht, indem man jeder dieser Flächen die Polarebene von O bezüglich ihrer entsprechen läßt, so entspricht der Tangentenfläche von R_4 die Fläche ψ_{12}.

Mit Hilfe spezieller Parameterdarstellungen wurde die Kurve aufs neue untersucht von R. A. Roberts, *London M. S. Proc.* **14**, 22, 308 (1883), **17**, 25 (1885) und von Rohn, *Leipzig. Ber.* **42**, 208 (1890), **43**, 1 (1891), von denen der zweite vier Korrelationen angegeben hat, welche die Punkte und Schmiegungsebenen von R_4 den Schmiegungsebenen und Punkten von D_6 oder R_6 zuordnen, ebenso die Realitätsfragen gelöst (vgl. auch Adler, a. a. O. und W. F. Meyer, *Württemberg. math. naturw. Mitt.* **4**, 99 (1891)) und sie zur Konstruktion von Modellen benutzt hat (*Math. Ver.* **1**, 43 (1892), vgl. auch den *Dyckschen Katalog mathematischer Modelle,* München 1892, S. 269).

Vom Standpunkt der darstellenden Geometrie finden sich die Kurven behandelt bei W. Fiedler, *Die darstellende Geometrie II,* Leipzig 1885, S. 451; Ch. Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie, II,* Leipzig 1887, S. 458.

W. F. Meyer, *Math. Ann.* **29**, 447 (1887) hat die algebraischen Prozesse entwickelt, welche mit der Erzeugung der R_4 mittels der Schnittpunkte entsprechender Schmiegungsebenen dreier projektiver rationaler Kurven verknüpft sind.

In Verbindung mit der Theorie der Kombinanten und der Apolarität wurde die R_4 untersucht von Berzolari, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 101 (1892). Dabei wurde gezeigt, daß *in den Punkten W_i ein Büschel von F_2 die R_4 berührt, für den das Haupttetraeder T ein Poltetraeder ist und der Kegel B, die Flächen E und M, die durch die Kurve gehende Fläche H (der Ort ihrer Trisekanten) und die Fläche, die* [nach einem Satze von Cremona, *J. f. Math.* **63**, 315 (1864)] *die vier singulären Kegelschnitte der Steinerschen Fläche S enthält, angehören.* Zwei beliebige Flächen des Büschels werden von allen Tangenten von R_4 in vier Punkten getroffen, die dasselbe Doppelverhältnis haben, insbesondere ergibt sich, daß *die Tangenten von R_4 allen Battaglinischen quadratischen Komplexen angehören, die durch zwei Flächen festgelegt werden, welche in dem Büschel in der Involution einander zugeordnet sind, bei der H und E die Doppelelemente bilden.*

Mit den Kollineationen, welche die Kurve in sich überführen (für die allgemeine R_4 sind dies nur die drei früher, am Ende von § 3, erwähnten gescharten Involutionen) haben sich beschäftigt Brambilla, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **20**, 780 (1887); Ciani, ebenda **37**, 341 (1904); ferner del Re, *Torino Atti* **22**, 901 (1887), *Napoli Rend.* (2) **1**, 167 (1887), **2**, 37 (1888) mit weitergehenden Untersuchungen für den Fall einer R_4 mit zwei Wendepunkten.

Den größten Teil der bekannten Sätze über die allgemeine R_4 und ihre besonderen Fälle hat auf geometrischem Wege Marletta, *Ann. di Mat.* (3) **8**, 97 (1903) abgeleitet, indem er R_4 als die Projektion der Kurve 4. Ordnung im vierdimensionalen Raume ansah.

Besondere Fälle der R_4 hat außer den angeführten Autoren u. a. behandelt Brambilla, *Ven. Ist. Atti* (6) **3**, 1471 (1885), *Napoli Rend.* **24**, 279 (1885); die R_4 mit Doppelpunkt Em. Weyr, *Math. Ann.* **4**, 243 (1871), *Wien. Sitzungsber.* **75**, 168 (1877), **78**, 891 (1879); W. Wirtinger, ebenda **93**, 28 (1886); Zecca, *Giorn. di Mat.* (1) **25**, 333 (1887); Brambilla, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **17**, 857 (1884), *Napoli Atti* (2) **9** (1898), Nr. 10; die R_4 mit Spitze Em. Weyr, *Wien. Sitzungsber.* **71**, 400 (1875), **78**, 396 (1879). Vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 134ff. Die äquianharmonische R_4 fand Lie, *Math. Ann.* **14**, 388 (1879) als Minimalkurven, deren Tangentenfläche dreimal durch den

Kugelkreis geht; die R_4 mit Wendepunkt Clebsch, *J. f. Math.* **67**, 1 (1867) und Cremona, *Lomb. Ist. Rend.* (1) **4**, 15 (1867) als Haupttangentenkurven der besonderen Steinerschen Fläche, für welche zwei der Doppelgeraden zusammenfallen. Für die R_4 mit zwei Wendepunkten, die auch dadurch charakterisiert werden, daß ihre Tangenten einem linearen Komplexe angehören, und welche die Haupttangentenkurven einer kubischen Regelfläche bilden (Kap. XXXIV, § 16), vgl. Cayley, *Quart. J.* **7**, 105 (1865), *Papers V*, p. 511; Cremona, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **1**, 199 (1868); Em. Weyr, ebenda (2) **4**, 144 (1871); Appell, *C. R.* **83**, 1209 (1876), *Arch. Math. u. Phys.* **62**, 175 (1878); Lie, *Math. Ann.* **14**, 389 (1879); Frauenfelder, *Diss.* Zürich 1903, *Monatsh. f. Math. u. Phys.* **15**, 299 (1904); Michel, *Nouv. Ann.* (4) **7**, 289 (1907). Vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 139.

Wir wollen kurz die Haupteigenschaften angeben.

Hat R_4 einen *Doppelpunkt* O, so existieren zwei Punkte A und B, aus denen die Kurve durch einen Kegel 2. Grades projiziert wird, den wir mit (A) bzw. (B) bezeichnen wollen. Die Tangenten in O schneiden die Gerade AB. Von den drei Hauptsehnen ist eine die Schnittlinie r der Schmiegungsebene in O, die Treffpunkte der anderen beiden bilden die Ecken eines vollständigen ebenen Vierecks, von dem zwei Diagonalpunkte A und B sind. Die Kurve wird in sich transformiert durch zwei involutorische perspektive Kollineationen (Homologien), deren Zentren A und B und deren Kollineationsebenen die Polarebenen α und β von A und B bezüglich (B) und (A) und auch bezüglich des Kegels 2. Grades, der R_4 aus O projiziert, sind. Die doppelt berührende abwickelbare Fläche wird offenbar von den Tangentialebenen der Kegel (A) und (B) gebildet. Die Doppelkurve der Tangentenfläche setzt sich aus zwei ebenen Kurven 3. Ordnung, die in α und β liegen, zusammen, sie haben einen Wendepunkt in B oder A und eine Spitze in O, in der die Tangente für beide Kurven die Gerade r ist.

Wird O eine *Spitze*, so fallen von den vier stationären Ebenen drei in eine einzige ω zusammen, von der anderen ω' wollen wir den Berührungspunkt mit O' bezeichnen. Die Tangentenfläche (5. Ordnung 4. Klasse) hat einen Doppelkegelschnitt, der in der Ebene liegt, die aus O' die Rückkehrtangente projiziert, derselbe Kegelschnitt berührt ω' in O' und in O die Rückkehrtangente. Die Ebene des Kegelschnittes ist der Ort eines Punktes, von dem vier Schmiegungsebenen ausgehen, deren Berührungspunkte in einer Ebene liegen.

Eine *äquianharmonische Kurve* R_4 wird sowohl dadurch charakterisiert, daß die vier Punkte W_i in einer Ebene π liegen, als auch dadurch, daß sie mit den Punkten S_i zusammenfallen. Die Doppelkurve der Tangentenfläche reduziert sich auf einen dreifachen Kegelschnitt in π. Dieser Kegelschnitt wird auch von den Ebenen umhüllt, die R_4 in äquianharmonischen Punkten schneiden, er geht durch die Punkte W_i und berührt in ihnen die Spuren der stationären Ebenen. R_4 und ihre doppelt berührende abwickelbare Fläche sind reziproke Polaren bezüglich einer Fläche 2. Ordnung.

Hat R_4 *zwei Wendetangenten* t, t', so ist die Tangentenfläche von der 4. Klasse und besitzt eine Knotenkurve 4. Ordnung, die t, t' zu Wendetangenten hat mit denselben Berührungspunkten wie R_4. Es existieren ∞^1 Hauptsehnen, diese bilden eine kubische Regelfläche, die auch der Ort aller Punkte ist, von denen vier Schmiegungsebenen in vier harmonischen Punkten ausgehen, und die Hüllfläche einer Ebene, welche R_4 in vier harmonischen Punkten schneidet. Die F_2, die durch die Kurve geht, ist der Ort aller Punkte, von denen vier Schmiegungsebenen in vier äquianharmonischen Punkten ausgehen. Auch hier sind die Kurve und ihre doppelt berührende abwickelbare Fläche reziproke Polaren bezüglich einer Fläche 2. Ordnung.

Für die ersten beiden Fälle und den letzten nimmt die Parameterdarstellung der Kurve der Reihe nach folgende einfache Formen an:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : \lambda^4 + k,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^4 : \lambda^2 : \lambda : 1,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^4 : \lambda^3 : \lambda : 1,$$

und die Bedingung, daß vier Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in einer Ebene liegen, wird der Reihe nach gegeben durch

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = k,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = 0.$$

§ 4. Rationale Raumkurven fünfter, sechster und siebenter Ordnung.

Projektive Konstruktionen der rationalen R_5 (ebenso wie der rationalen und elliptischen R_4) rühren her von Chasles, *C. R.*

53, 767 (1861), der die R_5 von der ersten oder zweiten Art nannte, je nachdem sie eine einzige oder unendlich viele Quadrisekanten besitzen. Eine rationale R_5 läßt sich auch erzeugen als Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen dreier projektiv einander zugeordneter Büschel, von denen, wenn R_5 von der ersten Art ist, in einem die einfachen Ebenen und in zweien die Ebenenpaare einer Involution, und wenn R_5 von der zweiten Art ist, in zweien die einfachen Ebenen und im dritten die Ebenentripel einer Tripelinvolution zu nehmen sind.

Eine R_5 2. Art ist mithin auch der Restschnitt der von ihren Quadrisekanten gebildeten F_2 mit einer geradlinigen F_4, die eine der Quadrisekanten zur dreifachen Geraden hat.

Durch eine R_5 1. Art gehen ∞^1 kubische Regelflächen, die einen Büschel bilden: sie haben zur gemeinsamen doppelten Leitlinie die Quadrisekante von R_5 und zu einfachen Leitlinien die Trisekanten von R_5. Die Kurve läßt sich deshalb als Restkurve zweier solcher F_3 betrachten. In dem Büschel sind vier Cayleysche Flächen enthalten.

Die durch die R_5 gehenden F_3 bilden ein homaloidisches System, das eine kubische Raumtransformation liefert, deren inverse Transformation von derselben Art ist.

Mit der allgemeineren rationalen R_5, d. h. der erster Art, haben sich in geometrischer Behandlung beschäftigt R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung,* Leipzig 1867, Kap. V, bei der Untersuchung der verschiedenen Arten, auf die die Schnittkurve zweier F_3 zerfallen kann, und darauf Bertini, *Collectanea math. in mem. D. Chelini,* Milano 1881, p. 313. Beide haben gezeigt, daß zwischen den Trisekanten von R_5 und den Punkten der Quadrisekanten eine eindeutige Beziehung besteht, wobei jede Ebene, die durch einen Punkt der Quadrisekante geht, die Kurve und die entsprechende Trisekante in sechs Punkten eines Kegelschnitts trifft (s. § 1, i)).

Die Regelfläche der Trisekanten (8. Grades, mit der R_5 als dreifacher und der Quadrisekante als vierfacher Geraden) ist mithin rational, und Bertini hat ihre Abbildung auf die Ebene untersucht. Er hat außerdem die die Kurve in fünf Punkten treffenden Kegelschnitte und die ebene Abbildung der Fläche (Kap. XXXVI, § 8), die der Ort der durch einen Fixpunkt gehenden fünffach treffenden Kegelschnitte ist, behandelt.

Andere Arbeiten über die rationale R_5 rühren her von Nugteren, *Diss.* Groningen 1901, und Colpitts, *Am. J.* **29**, 309

(1907), von denen der zweite auch viele Spezialfälle betrachtet hat. Weitere Spezialfälle findet man behandelt bei Ciani, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **37**, 341 (1904), **38**, 442 (1905); Marletta, *Rend. Circ. Mat.* **19**, 94 (1905), **21**, 56 (1906); Berzolari, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **38**, 446 (1905). Einen metrischen Spezialfall (eine R_5 mit einem dreifachen Punkte) untersuchte Schmitz, *Diss.* München 1887.

Die allgemeine rationale R_6 und die mit 1, 2, 3, 4 Doppelpunkten hat Johannes, *Diss.* Tübingen 1889, behandelt, indem er sie aus einem Kegelschnitt durch eine besondere kubische birationale Transformation ableitete; die R_6 mit vier Doppelpunkten untersuchte analytisch Sauerbeck, *Diss.* Tübingen 1889.

Über die sechs Quadrisekanten einer allgemeinen rationalen R_6, welche das eine Sextupel einer Doppelsechs auf der einzigen durch die Kurve gehenden F_3 bilden, vgl. Em. Weyr, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **15**, 250 (1882); F. Deruyts, *Belg. Bull.* (3) **35**, 421 (1898).

Mit Hilfe der Oskulanten untersuchte die rationalen R_5, R_6, R_7 W. Stahl, *J. f. Math.* **104**, 38 (1887), der die Punktgruppen der Fundamentalinvolution der Reihe nach auf eine kovariante kubische Raumkurve R_3, auf eine kovariante F_2 und auf den ganzen Raum abbildete, derart, daß jeder Punkt im Bilde einer einzigen Punktgruppe angehört. Die zu der R_6 gehörende F_2 ist der Ort der den ∞^1 Oskulanten R_5 von R_6 zugeordneten R_3, und ebenso gelangt man zu der Darstellung der Fundamentalinvolution auf R_7 durch die Punkte des Raumes, indem man die den Oskulanten R_6 von R_7 zugeordneten F_2 betrachtet.

Für die R_5 erhält man außerdem eine besondere Scharschar von Flächen 2. Klasse, durch welche die Beziehung zwischen R_5 und der kubischen Raumkurve R_3 vermittelt wird.

Zu denselben Gebilden und anderen Eigenschaften der R_5 gelangte Berzolari, *Rom. Acc. Lincei. Mem.* (4) **7**, 303 (1893) mit Hilfe der Kombinanten und auch (a. a. O., p. 328) durch eine Parameterdarstellung des laufenden Punktes vermittelst der dritten Derivierten einer Binärform 8. Ordnung.

Über die R_5 in Zusammenhang mit der Apolarität vgl. auch Coble, *Am. J.* **31**, 358 (1909).

Die durch eine endliche Anzahl von Raumkollineationen in sich übergehenden R_5 und R_6 hat Ciani, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **37**, 580 (1904), **39**, 359 (1906) angegeben.

Eine besondere, aber bemerkenswerte rationale R_6 fand

F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Leipzig 1884, S. 167 und darauf Geiser, *Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich* **50**, 306 (1905) und Ciani, *Rend. Circ. Mat.* **21**, 322 (1906) bei der Untersuchung der Konfiguration, die aus einem vollständigen Pentaeder entsteht. Nach Ciani sind sie und eine andere Kurve, welche mit ihr projektiv identisch ist, die einzigen irreduziblen rationalen R_6, die bezüglich der alternierenden Untergruppe G_{60} (aber nicht der ganzen Gruppe G_{120}) der das Pentaeder in sich überführenden Kollineationen invariant sind; die Kurve besitzt außerdem sechs Doppeltangenten und unendlich viele dreifach berührende Ebenen. Ciani, *Rend. Circ. Mat.* **22**, 287 (1906) hat auch bewiesen, daß abgesehen von dem Fall des Schnittes einer F_3 mit einem Kegel 2. Grades dies die einzige irreduzible Raumkurve R_6 mit unendlich vielen dreifach berührenden Ebenen ist.

§ 5. Rationale abwickelbare Flächen, insbesondere solche der sieben ersten Ordnungen.

Die Abbildung der rationalen abwickelbaren Flächen auf die Ebene hat Clebsch, *Math. Ann.* **5**, 16 (1872) als besonderen Fall der Abbildung der rationalen Regelflächen untersucht.

H. A. Schwarz, *J. f. Math.* **64**, 1 (1865), *Abh. II,* Berlin 1890, S. 8, hat *die abwickelbaren Flächen der ersten sieben Ordnungen* untersucht und gezeigt, daß sie *alle rational sind.* Für ihre Abbildung vgl. Lazzeri, *Pisa Scuola norm. Ann.* **3**,79 (1883).

Die abwickelbaren Flächen der drei ersten Ordnungen sind Kegel, die der 4. Ordnung haben zur Rückkehrkante eine kubische Raumkurve.

Die der 5. Ordnung haben zur Rückkehrkante eine R_4 mit Spitze, d. h. den Schnitt zweier F_2, die eine stationäre Berührung haben. Sie wurden behandelt von Cayley, *Cambr. Dublin Math. J.* **5**, 46, 152 (1850), *Quart. J.* **6**, 108 (1864), *Papers I,* p. 486, 500, *V,* p. 267; Chasles, *C. R.* **54**, 317, 418, 715 (1862); Cremona, ebenda 604. Die von Cremona nur ausgesprochenen Sätze wurden dann bewiesen von Dino, *Giorn. di Mat.* (1) **3**, 100, 133 (1865) analytisch und von d'Ovidio, ebenda 107, 184, 214 geometrisch.

Die abwickelbaren Flächen 6. und 7. Ordnung wurden zum Teil bereits von Cayley und Chasles, a. a. O. und von Salmon, *Cambr. Dublin Math. J.* **5**, 23 (1850) betrachtet, vollständig bestimmt wurden die der 6. Ordnung von Chasles, *C. R.* **54**, 718

(1862), die der 7. Ordnung von Schwarz, a. a. O. Für die der 6. Ordnung vgl. noch Cayley, *Phil. Mag.* (4) **27**, 437 (1864), *Quart. J.* **7**, 105 (1866), **9**, 129, 373 (1868), *Ann. di Mat.* (2) **2**, 99. 219 (1868), *Cambr. Phil. Trans.* **11**³, 507 (1871), *Papers V*, p. 135, 511, *VI*, p. 87, *VII*, p. 116, 118, 99 und außerdem für die Konstruktion eines Modelles *Quart. J.* **14**, 229, 235 (1877), *Papers X*, p. 68, 73.

Von den abwickelbaren Flächen 6. Ordnung liegt die Rückkehrkante auf einer F_2. sie sind von drei Arten, je nachdem die Rückkehrkante eine allgemeine R_4, eine R_5 mit zwei stationären Ebenen und zwei Spitzen oder eine R_6 mit vier Spitzen ist.

Die abwickelbaren Flächen 7. Ordnung bilden auch drei Arten, je nachdem die Rückkehrkante eine R_5 mit fünf stationären Ebenen und einer Spitze, eine R_6 mit drei stationären Ebenen und drei Spitzen oder eine R_7 mit einer stationären Ebene und fünf Spitzen ist.

Über das Vorstehende vgl. auch Salmon-Fiedler, *Raumgeom. II*, S. 135ff.

§ 6. Die Raumkurven fünfter Ordnung von den Geschlechtern $p = 1$ und $p = 2$.

Mit den R_5^1 haben sich besonders Em. Weyr, *Wien. Sitzungsber.* **90**, 206 (1884), **92**, 498 (1885), **97**, 592 (1888) und Montesano, *Napoli Rend.* (2) **2**, 181 (1888) beschäftigt, von denen der erste hauptsächlich die auf der Kurve enthaltenen Involutionen untersucht hat. Beide haben erkannt, daß die R_5^1 einen linearen Strahlenkomplex Γ festlegt, für den jeder Punkt von R_5^1 zur Nullebene die durch die zwei von ihm ausgehenden Trisekanten bestimmte Ebene hat. Es gehören so dem Komplex alle Trisekanten von R_5^1 an (die eine elliptische Regelfläche 5. Ordnung bilden), und bezüglich des Komplexes sind immer zwei Gerade konjugiert, welche dieselben fünf Trisekanten von R_5^1 treffen und mithin mit R_5^1 auf derselben F_3 liegen. Aus einer hieraus sich ergebenden perspektiven eindeutigen Abbildung der Strahlen von Γ auf die Punkte des Raumes hat Montesano einige Sätze über die Kegelschnitte, die R_5^1 in fünf Punkten schneiden, abgeleitet, insbesondere, daß jeder solche Kegelschnitt durch den Nullpunkt seiner Ebene bezüglich Γ hindurchgeht.

Durch zwei elliptische Raumkurven 5. Ordnung, deren Trisekanten demselben nicht speziellen linearen Komplex Γ angehören,

wird die allgemeinste birationale Raumtransformation festgelegt, bei der jeder Strahl von Γ ein einziges Paar entsprechender Punkte enthält (sie ist wie ihre Umkehrung von der 6. Ordnung). Es gibt ∞^{15} R_5^1, deren Trisekanten einem gegebenen linearen Strahlenkomplex angehören, und zwei beliebige von ihnen liegen auf derselben Fläche 4. Ordnung, welche dann einen Büschel von ihnen enthält. Damit von zwei R_5^1 die Trisekanten demselben linearen Strahlenkomplex angehören, ist notwendig und hinreichend, daß sie auf derselben F_4 liegen und auf dieser korresidual sind. Vgl. Montesano, a. a. O. und Pieri, *Rend. Circ. Mat.* **6**, 235 (1892), von denen der zweite alle birationalen Transformationen des Raumes bestimmt hat, die einen speziellen linearen Komplex liefern.

Über die R_5^1 s. noch London, *Math. Ann.* **45**, 545 (1894); J. de Vries, *Amsterdam Verslagen* (4) **8**, 451 (1898); Colpitts, *Am. J.* **29**, 309 (1907); Marletta, *Catania Acc. Gioenia Atti* (5) **1**, 1908, Nr. XIV, von denen der dritte auch auf die R_5^2 zu sprechen kommt.

Eine R_5^2 liegt auf einer F_2, und auf dieser bestimmen die Regelstrahlen der einen Regelschar eine Involution 2. Grades mit sechs Doppelpunkten. Einige Eigenschaften dieser Involution fand auf geometrischem Wege Caporali, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **2**, 749 (1878), *Memorie di Geom.*, Napoli 1888, p. 54, der die R_5^2 als Fundamentalkurve bei der eindeutigen Abbildung eines allgemeinen quadratischen Strahlenkomplexes auf die Punkte des Raumes erhielt. Es ergibt sich u. a., daß zwei gegenüberliegende Seitenflächen des durch die vier von einem Punkte ausgehenden Sehnen gebildeten Vierkants die Kurve außerdem in zwei konjugierten Punkten der Involution schneiden. Vgl. auch R. Sturm, *Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie III*, Leipzig 1896, S. 272ff.

Bei dieser Abbildung entspricht der Gruppe der 32 involutorischen linearen Verwandtschaften (die Identität einbegriffen), welche den Komplex in sich transformieren, eine Gruppe von 32 involutorischen birationalen Transformationen des Raumes, von denen eine die Identität ist und die 31 übrigen vom 3. Grade sind und die R_5^2 zur Fundamentalkurve haben. Umgekehrt bestimmt die R_5^2 die Gruppe vollständig. S. darüber Montesano, *Veneto Istit. Atti* (6) **6**, 1425 (1887).

Besonders in Beziehung zu den Abelschen Funktionen wurde die R_5^2 noch untersucht von Timerding, *J. f. Math.* **123**, 284 (1901).

§ 7. Die Raumkurven sechster Ordnung der Geschlechter $p = 1, 2, 3, 4$.

Eine R_6^1 besitzt drei Quadrisekanten q_1, q_2, q_3. Konstruktionen der Kurve aus gegebenen Elementen, z. B. aus q_1, q_2, q_3 und sechs Punkten hat Petot, *C. R.* **102**, 805 (1886), *Ann. éc. norm.* (3) **5**, suppl. (1888) angeführt.

Die R_6^1 bildet zusammen mit q_1, q_2, q_3 die Grundkurve eines Büschels von F_3. Em. Weyr, *Wien. Sitzungsber.* **99**, 932 (1890), **100**, 457 (1891) hat bewiesen, daß außer den 12 F_3 des Büschels, welche in den Schnittpunkten der Kurve mit q_1, q_2, q_3 je einen Doppelpunkt haben, in dem Büschel noch acht Flächen mit Doppelpunkt existieren, und daß von diesen Doppelpunkten vier auf dem durch q_1, q_2, q_3 bestimmten Hyperboloid liegen, während die anderen vier, S_1, S_2, S_3, S_4, die nicht auf dem Hyperboloid liegen, durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, daß jeder der Schnittpunkt von drei Trisekanten der R_6^1 ist.

London, *Math. Ann.* **45**, 545 (1894) hat die Kurve als Ort der Schnittpunkte entsprechender Ebenen von drei miteinander durch zwei trilineare Beziehungen verknüpften Ebenenbüscheln untersucht. Die vier *Hauptpunkte* S_i werden dann bestimmt durch die vier singulären trilinearen Beziehungen des durch jene zwei festgelegten Büschels von solchen Beziehungen.

Nach einem Satz von Rosanes, *J. f. Math.* **88**, 270 (1880) gibt es bei drei trilinearen Korrespondenzen sechs gemeinsame Elementetripel, die *assoziiert* heißen, weil sie die Eigenschaft haben, daß alle trilinearen Korrespondenzen, die fünf von ihnen enthalten, auch die letzte enthalten. London sagt nun, daß sechs Punkte von R_6^1 *assoziiert* sind, wenn die sechs Ebenentripel, die sie aus q_1, q_2, q_3 projizieren, ein assoziiertes System bilden, und beweist, daß, wenn man fünf von ihnen willkürlich annimmt, das letzte bestimmt ist. Die Betrachtung solcher Systeme ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der Punktinvolutionen auf R_6^1.

London zeigt noch, daß durch die R_6^1 vier Steinersche Flächen gehen, die zu dreifachen Punkten die Punkte S_i und zu Doppellinien die von ihnen ausgehenden Trisekanten haben, außerdem daß R_6^1 16 dreifach berührende Ebenen besitzt, welche die Doppelebenen der angeführten Steinerschen Flächen bilden. Zu diesen Steinerschen Flächen gelangten auch Rosati, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **35**, 407 (1902); Veneroni, ebenda (2) **38**, 523 (1905); Marletta, *Catania Acc. Gioenia Atti* (5) **1**, 1908, Nr. XIV, mit Hilfe der Überräume.

Die besonderen Eigenschaften der R_6^2 sind noch wenig untersucht. Fano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **39**, 1071 (1906) und Severi, *Rend. Circ. Mat.* **30**, 265 (1910) haben die allgemeinste durch eine R_6^2 gehende Fläche 4. Ordnung behandelt (vgl. S. 779). Der erste bewies, daß es eine unendliche diskontinuierliche Gruppe von birationalen Transformationen gibt, welche eine solche Fläche in sich überführen; der zweite hat alle auf der Fläche liegenden Kurven bestimmt und bewiesen, daß die Fläche weder rationale noch elliptische von mehrfachen Punkten freie Kurven enthält. Die vollständige Untersuchung der erwähnten Gruppe hat Severi durch Benutzung zahlentheoretischer Sätze erledigt.

Vgl. noch Snyder, *Amer. Math. Soc. Trans.* **11**, 15 (1910).

Eine besondere, sechs Punkte des Kugelkreises enthaltene R_6^2 hat Stuyvaert, *C. R.* **147**, 232 (1908), *Amsterdam Verslagen* (4) **17**, 346 (1908), *Giorn. di Mat.* (3) **3**, 67 (1912) behandelt.

Die R_6^3 ist der Restschnitt zweier durch eine kubische Raumkurve gehenden kubischen Flächen, und wurde zuerst bei der Untersuchung der kubischen birationalen Transformation des Raumes, die durch drei bilineare Gleichungen festgelegt wird, behandelt (vgl. Kap. XXXVIII, § 4). Es bildet dabei eine R_6^3 die Fundamentalkurve in dem ursprünglichen und in dem transformierten Raum. Die Kurve läßt sich auch auf unendlich viele Arten als Ort der Punkte erzeugen, durch die vier entsprechende Ebenen von vier kollinearen Bündeln gehen, und auch als Ort der Punkte, in denen die Achsen entsprechender Ebenenbüschel dreier kollinearer räumlicher Ebenensysteme zusammenlaufen. Die erste dieser Erzeugungen findet sich schon bei R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen 3. Ordnung*, Leipzig 1867, S. 204.

Mit Hilfe dieser Erzeugungsweise wurde die Kurve weiter untersucht von F. Schur, *Math. Ann.* **18**, 1 (1881) und von Reye, *J. f. Math.* **104**, 211 (1889) (vgl. auch Reye, *Geometrie der Lage,* 3. Abt. 4. Aufl., Leipzig 1910, S. 143ff. und R. Sturm, *Die Lehre von den geom. Verwandtsch. III,* Leipzig 1909, S. 549); diese haben die ganzen linearen Systeme 3. und 2. Stufe von kollinearen Ebenenbündeln und Ebenenräumen, welche die Kurve liefern, betrachtet. Schur hat daraus u. a. die Existenz gewisser Punktquadrupel auf der Kurve abgeleitet, die eine Involution J 4. Ordnung 2. Stufe bilden. Diese Quadrupel werden gebildet von den Doppelpunkten zweier beliebiger Räume des erzeugenden Bündels kollinearer Räume: zwei beliebige Punkte von R_6^3 gehören einer einzigen Punktgruppe an, ein Punkt ∞^1 Gruppen. Jedes Tripel, das mit einem gegebenen Kurvenpunkt zusammen eines

der Quadrupel bildet, liegt in einer Ebene, die durch eine bestimmte Trisekante hindurchgeht, und die Trisekanten werden derart in eindeutiger Weise den Punkten der Kurve zugeordnet. Die Zuordnung läßt sich auch so formulieren, daß die von einem Punkte der Kurve ausgehenden Trisekanten die Kanten eines Dreikants bilden, von dem jede Seitenfläche die Kurve außerdem in einem Punkte schneidet, für welchen die zugehörige Trisekante die gegenüberliegende Kante des Dreikants ist.

Diese Eigenschaften hat Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **25**, 795 (1892) aufs neue abgeleitet, indem er die R_6^3 als Fundamentalkurve der eindeutigen perspektiven Abbildung eines tetraedralen Strahlenkomplexes auf den Punktraum betrachtete.

Schur hat auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß das Gebüsch der kollinearen Bündel oder der Bündel der kollinearen Räume, welche die R_6^3 erzeugen, sich als das Gebüsch der Polarbündel einer Ebene π in bezug auf die Flächen 2. Ordnung eines Gebüsches G oder als der Bündel der Polarensysteme der Punkte des Raumes in bezug auf die Flächen 2. Ordnung eines Bündels betrachten lassen. Im ersten Falle ist die R_6^3 der Ort der Punkte, welche Punkten von π bezüglich aller Flächen von G konjugiert sind (diese Punkte erfüllen in π eine Kurve 4. Ordnung). Die zu erfüllende Bedingung besteht dann darin, daß die R_6^3 von π in den Ecken eines vollständigen Vierseits getroffen wird; wenn sie erfüllt ist, gibt es ∞^4 Gebüsche G, und die Schnittlinien der zehn Ebenenpaare, die jedes von ihnen enthält, werden Trisekanten von R_6^3. Diese besondere R_6^3 hat die Konstantenzahl 23 (statt 24 wie die allgemeine).

Im zweiten Falle ist R_6^3 die Kernkurve eines F_2-Bündels, d. h. der Ort der Spitzen der in dem Bündel enthaltenen Kegel. Die Bedingung hierfür besteht darin, daß irgend zwei Quadrupel der Involution J acht assoziierte Punkte bilden. In der kubischen Transformation (die offenbar involutorisch ist) entsprechen sich die bezüglich aller Flächen 2. Ordnung des Bündels konjugierten Punkte (so daß die zugehörigen bilinearen Gleichungen symmetrisch werden). Diese besondere R_6^3 hat die Konstantenzahl 21.

Wenn die beiden vorstehenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, findet man eine R_6^3 mit der Konstantenzahl 20, welche die Kernkurve des Bündels der Polarflächen aller Punkte einer Ebene bezüglich einer Fläche 3. Ordnung bilden.

Der zweite der genannten beiden Fälle war schon von Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analyti-*

schen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, § 75, 76, 83 und darauf von Hesse, *J. f. Math.* **49**, 279 (1855), *Werke*, S. 345 bei seinen Untersuchungen über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung, ferner von vielen anderen untersucht worden; vgl. besonders Steiner, *J f. Math.* **53**, 133 (1857), *Werke II*, S. 649; Geiser, *J. f. Math.* **69**, 197 (1868); R. Sturm, *Synth. Unters. üb. Flächen 3. Ordnung*, Leipzig 1867, S. 28ff., *J. f. Math.* **70**, 212 (1869); Reye, *Die Geometrie der Lage*, 4. Aufl. 3. Abt., Leipzig 1910, S. 134ff.; Montesano, *Torino Atti* **27**, 1053 (1892), *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **1**², 77 (1892), *Bologna Mem.* (5) **3**, 549 (1893); in der letztgenannten Arbeit wird die Kurve insbesondere in Beziehung zu dem kubischen Komplex aller Regelstrahlen der F_2 des Bündels betrachtet.

Als Ort der singulären Punkte einer der sechs linearen Kongruenzen von kubischen Raumkurven wurde die R_6^3 von Stuyvaert, *Belgique Bull.* 1907, p. 470 untersucht.

Die R_6^4, welche den vollständigen Schnitt einer F_2 mit einer F_3 bildet, ist die *Normalkurve* der φ (Bd. II¹, S. 318) für $p = 4$ und als solche besonders von Clebsch, *J. f. Math.* **63**, 237 (1864) untersucht worden, der für sie mit Hilfe des Abelschen Theorems die Schnittpunktprobleme und das Problem der Berührungsflächen behandelt hat. Die Kurve besitzt 120 dreifach berührende Ebenen. Es gibt 255 Systeme von F_2, welche die Kurve in sechs verschiedenen Punkten berühren, und die Berührungspunkte zweier F_2 desselben Systems liegen wieder auf einer F_2. In jedem dieser Systeme sind 28 Flächen enthalten, welche in zwei dreifach berührende Ebenen zerfallen, und die 12 Berührungspunkte zweier solcher Ebenenpaare liegen auf einer R_4^1. Solche R_4^1 gibt es 32130. Es gibt ferner $3^8 = 6561$ Kurven R_4^1, welche mit R_6^4 in vier verschiedenen Punkten eine dreipunktige Berührung haben; jede F_2, welche durch die Berührungspunkte von zweien dieser R_4^1 hindurchgeht, trifft R_6^4 außerdem in den Berührungspunkten einer dritten Berührungskurve.

Über die Konfiguration der 120 dreifach berührenden Ebenen und ihrer Berührungspunkte vgl. Pascal, *Ann. di Mat.* (2) **20**, 163 (1892), *Rom. Acc. Lincei Rend.* (5) **2**¹, 120, 204, 239 (1893), welcher eine geometrische Darstellung der ungeraden Charakteristiken für $p = 4$ und ihre Substitutionsgruppen (vgl. Brill-Noether, *Math. Ver.* **3**, 471ff. (1895)) mit Hilfe der Ebenen, die je drei von zehn Punkten des Raumes enthalten, benutzt.

Die gleichen Aufgaben für die dreifach berührenden *reellen* Ebenen, die eine *reelle* R_6^4 in den verschiedenen möglichen Fällen

besitzen kann, fallen unter die allgemeinen Aufgaben, welche für beliebiges p von F. Klein, *Math. Ann.* **42**, 1 (1893) gelöst wurden (Bd. II[1], S. 305), und wurden von Klein, *Riemannsche Flächen* (lith.) II, Göttingen 1892, S. 151, und mit Hilfe der vorstehenden Methode von Pascal, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **38**, 579 (1905) behandelt. Vgl. auch Comessatti, *Math. Ann.* **73**, 48 (1913).

Die gleiche Kurve fanden Caporali, *Rom. Acc. Lincei Mem.* (3) **2**, 769 (1878), *Memorie di Geom.*, Napoli 1888, p. 84 und vollständiger Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **25**, 795 (1892) bei der eindeutigen Abbildung der allgemeinen quadratischen Strahlenkomplexes auf den Punktraum als Ort der Punkte, welche auf den ihnen entsprechenden Geraden liegen. Diese Kurve und die R_5^2, welche bei der Abbildung die Fundamentalkurve bildet, haben neun Punkte gemein und bilden zusammen eine Ausartung der R_{11}^{14}, von der wir in § 1 (S. 941) bei Gelegenheit der involutorischen Transformationen, welche einen tetraedralen Komplex liefern, gesprochen haben. Im vorliegenden Fall sind in der Involution zwei Punkte einander konjugiert, welche in jeder einzelnen Ebene des Raumes die Bilder zweier Geraden des Komplexes, die in der Ebene selbst liegen, bilden (Montesano).

Über die R_6^4 vgl. noch Roth, *Monatsh. Math. Phys.* **22**, 64 (1911); in bezug auf die Gruppe der 120 Kollineationen, die die Kurve in sich überführen, s. Fricke, *Acta math.* **17**, 366 (1893).

Kapitel XXXVIII.

Rationale Transformationen des Raumes.

Von *H. E. Timerding* in Braunschweig.

§ 1. Rationale Transformationen des Raumes im allgemeinen.

Bei einer rationalen Transformation des Raumes gehen die Ebenen über in die algebraischen Flächen eines linearen Systems 3. Stufe, eines *Flächengebüschs* oder *Flächenkomplexes.* Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Koordinaten eines Punktes vor der Transformation, y_1, y_2, y_3, y_4 die Koordinaten des transformierten Punktes, so wird

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4,$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ homogene Funktionen einer gewissen Ordnung n von y_1, y_2, y_3, y_4 bedeuten.

Ist ν der *Grad* des Flächengebüschs

$$(2) \qquad u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 + u_4\varphi_4 = 0$$

im Raum (y), das den Ebenen des Raumes (x) zugeordnet ist, d. h. die Anzahl der veränderlichen Schnittpunkte von drei Flächen des Gebüschs (s. S. 668), so entspricht jedem Punkte des Raumes (y) ein Punkt des Raumes (x), aber umgekehrt sind jedem Punkt des Raumes (x) ν Punkte des Raumes (y) zugeordnet. Nur wenn der Grad $\nu = 1$, das Flächengebüsch also *homaloidisch* wird, ist die Beziehung der beiden Räume wechselweise eindeutig, wir sprechen dann von einer *birationalen* (oder Cremonaschen) *Transformation des Raumes.* In diesem Falle wird auch

$$(3) \qquad y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

wenn $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ ganze homogene Funktionen einer Ordnung m von x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen. Die birationale Transformation kann durch die Charakteristik (n, m) gekennzeichnet werden; n und m

sind nicht nur die Ordnungen der Flächen, die den Ebenen des einen Raumes im anderen Raume entsprechen, es entspricht auch einer Geraden des Raumes (y), weil sie von den Flächen des Flächengebüsches (φ) in n Punkten getroffen wird, eine rationale Kurve S n^{ter} Ordnung im Raume (x), und umgekehrt einer Geraden des Raumes (x) eine rationale Kurve R m^{ter} Ordnung im Raume (y). Diese Kurven müssen die Eigenschaft haben, daß von ihren $n \cdot m$ Schnittpunkten mit den Flächen des Gebüsches, das zu demselben Raum gehört, alle bis auf einen in die Grundelemente des Gebüsches fallen.

Greift man aus dem Gebüsch (φ) im Raum (y) eine Fläche φ heraus, so wird diese auf eine Ebene π des Raumes (x) eindeutig abgebildet. Den ebenen Schnittkurven der Fläche entsprechen die Kurven m^{ter} Ordnung eines linearen Komplexes, von dem zwei allgemeine Kurven n veränderliche Schnittpunkte haben. Hat der Kurvenkomplex σ_i i-fache Grundpunkte $(i = 1, 2, 3, \ldots m - 1)$, so wird demnach

$$m^2 - \sum_i \sigma_i i^2 = n. \tag{4}$$

Die Kurven des Komplexes sind selbst die Schnittkurven der Ebene π mit den Flächen ψ des Raumes (x), die den Ebenen des Raumes (y) entsprechen. Die ebenen Schnittkurven der Flächen φ und ψ haben dasselbe Geschlecht, weil sie paarweise eindeutig aufeinander bezogen sind. Dieses Geschlecht heißt nach Loria, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **23**, 824 (1890), der daran eine Klassifikation der birationalen Transformationen anknüpfte, das *Geschlecht der birationalen Transformation.*

Jedem der i-fachen Grundpunkte entspricht auf φ eine rationale Kurve i^{ter} Ordnung C_i, die auch zu der Jacobischen Fläche des Gebüsches gehört. Die σ_i i-fachen Grundpunkte sind aber die Schnittpunkte der Ebene π mit einer i-fachen Grundkurve von der Ordnung σ_i des Flächengebüschs (ψ). *Jedem Punkte einer Grundkurve im Raume (x), der i-fach für alle Flächen des Gebüschs (ψ) ist, entspricht demnach eine rationale Kurve von der Ordnung i, deren geometrischer Ort einen Teil der Jacobischen Fläche des Gebüschs (φ) bildet.*

Nach einem Satz auf S. 682 muß eine i-fache Grundkurve des Gebüschs (ψ), wenn sie von den Kurven S, die im Raum (x) den Geraden des Raumes (y) entsprechen, getroffen wird, für die Jacobische Fläche des Gebüschs $(4i - 1)$-fach sein, dagegen ist sie für diese Fläche $4i$-fach, wenn sie von den Kurven S nicht getroffen wird.

Nach einem anderen Satz, der ebenfalls auf S. 682 steht, muß jeder Grundpunkt im Raume (x), der für die Flächen des Gebüsches (ψ) l-fach ist, für die Jacobische Fläche $(4l-2)$-fach sein.

Einer Grundkurve im Raum (x), die von den Kurven S nicht getroffen wird, ist eine Grundkurve im Raume (y) derart zugeordnet, daß jedem Punkte der einen Kurve alle Punkte der anderen Kurve entsprechen. Die Beziehung zwischen den beiden Kurven ist durchaus wechselseitig. Ist die erste Kurve i-fach für die Flächen ψ und von der Ordnung i', so ist die zweite Kurve i'-fach für die Flächen φ und von der Ordnung i.

Einer allgemeinen Grundkurve C_r der Ordnung r des Raumes (x), die für die Flächen ψ i-fach ist, entspricht im Raume (y) eine Fläche, die einen Teil der Jacobischen Fläche bildet und jede Fläche φ außer in Grundkurven des Raumes (y) in r Kurven der Ordnung i schneidet; diese letzteren entsprechen den Punkten, in welchen die Grundkurve C_r von der der Fläche φ entsprechenden Ebene des Raumes (x) geschnitten wird. Hingegen hat der Teil der Jacobischen Fläche, der einem Grundpunkt O des Raumes (x) entspricht, mit einer beliebigen Fläche φ außer den Grundkurven des Raumes (y) keine Punkte gemein.

Bei der birationalen Transformation des Raumes wird jede der Flächen φ und jede der Flächen ψ auf eine Ebene abgebildet. Umgekehrt ist es leicht, wenn eine Fläche $\varphi_4=0$ auf eine Ebene abgebildet ist, eine Raumtransformation zu finden, bei der φ_4 der Ebene π entspricht. Man nehme die homaloidischen Flächen, welche dieselben mehrfachen Punkte und Linien besitzen wie φ_4. Die Schnittkurven dieser Flächen mit φ_4 liefern in π als Bilder ein Kurvensystem Σ. Man bestimme nun in π ein homaloidisches Netz von Kurven K, die mit einer festen (im allgemeinen reduzibeln) Kurve L zusammen je eine Kurve des Systems Σ bilden. Dann bestimmen irgend drei Kurven K_1, K_2, K_3 des Netzes, die keinem Büschel angehören, die Schnittkurven dreier Flächen

$$\varphi_1=0, \quad \varphi_2=0, \quad \varphi_3=0$$

mit $\varphi_4=0$, und die vier Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ legen ein homaloidisches Flächengebüsch fest, das eine birationale Raumtransformation bestimmt. Man sieht, daß man auf diese Weise alle Raumtransformationen erhalten kann, bei denen φ_4 einer Ebene entspricht.

Auf die birationalen Raumtransformationen kam, ausgehend

von den Arbeiten Cremonas über die birationalen Ebenentransformationen, zuerst Cayley, *Proc. Lond. Math. Soc.* **3**, 171 (1870) und kurz darauf Noether, *Math. Ann.* **3**, 547 (1871), vgl. ebenda **2**, 293 (1870), **4**, 213 (1872), **8**, 495 (1875), *Ann. di Mat.* (2) **5**, 163 (1873), fast genau gleichzeitig behandelte sie auch Cremona, *Göttinger Nachrichten 1871*, 129, *Ist. Lomb. Rend.* (2) **4**, 269, 315 (1871), *Math. Ann.* **4**, 213 (1871) und *Annali di Mat.* (2) **5**, 131 (1873). Eine merkwürdige besondere Transformation (5, 6) behandelte Cremona, *Lond. Math. Soc. Proc.* **15**, 242 (1884). S. weiter Reye, *J. f. Math.* **94**, 312 (1883); Pannelli, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **19**, 449 (1909).

Vgl. Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. des Raumes II* (3. Aufl. 1880), S. 545ff.; R. Sturm, *Die Lehre v. d. geom. Verwandtsch. IV*, Leipzig 1909, S. 339ff.; K. Doehlemann, *Geometrische Transformationen II*, Leipzig 1908, II. Abschnitt.

Die nähere Bestimmung der homaloidischen Flächengebüsche, welche die birationalen Transformationen begründen, hat sich Beloch, *Ann. di Mat.* (3) **16**, 27 (1909) zum Ziel gesetzt. Es ergibt sich, daß, wenn die Ordnung der Flächen $n = 4k + \varrho$ ($\varrho = 0, 1, 2, 3$) ist, entweder eine Basiskurve von einer Multiplizität $i \geqq k + 1$ und einer Ordnung $\leqq 15$ vorhanden ist oder ein Basispunkt von einer Multiplizität $\alpha \geqq 2k + \varrho + 1$. Ausgenommen ist dabei nur, wenn $\varrho > 0$, das Auftreten mehrerer Basispunkte von bestimmten Multiplizitäten $\geqq 2k + 1$.

Die durch eine birationale Transformation des Raumes (z. B. als Verbindungslinien entsprechender Punkte) bestimmten Strahlenkomplexe untersuchte allgemein Pannelli, *Giorn. di Mat.* **27**, 245 (1890). Die birationalen Transformationen mit gegebenem Komplex der Verbindungslinien entsprechender Punkte behandelte z. B. für den Fall eines tetraedralen Komplexes Montesano, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **5**[1], 497 (1889), für den Fall eines speziellen linearen Komplexes Pieri, *Rend. Circ. mat.* **6**, 254 (1892), für den Fall eines Hirstschen Komplexes Pieri, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **25**, 1037 (1892), für den Fall, daß die Verbindungslinien einen Kegelschnitt treffen, Pieri, *Rend. Circ. mat.* **7**, 296 (1893), für den Fall, daß sie eine kubische Raumkurve treffen, Caldarera, *Rend. Circ. mat.* **18**, 205 (1904). Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **25**, 795 (1892) hat bewiesen, daß ein allgemeiner quadratischer Strahlenkomplex nicht auf die angegebene Weise durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte gebildet werden kann.

Die kontinuierlichen Gruppen von birationalen Transforma-

tionen des Raumes behandelten Enriques und Fano, *Ann. di Mat.* (2) **26**, 59 (1897), indem sie sie auf Gruppen von Kollineationen und Inversionen reduzierten, ferner S. Kantor, *Acta math.* 21, 1 (1897); Fano, *Torino Atti* **33**, 480 (1898), *Monatsh. f. Math.* **9**, 17 (1898), *Verh. des I. Math.-Kongresses* 1897, *I*, 254, *Torino Mem.* (2) **48**, 221 (1898), *Torino Atti* **33**, 480 (1898), *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **7**^{1}, 302, 332 (1898), *Rend. Circ. Mat.* **10**, 1, 16 (1896), **11**, 240 (1897). Es ergeben sich neun typische primitive Gruppen, von denen acht aus den bereits von Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, *III*, Leipzig 1898, S. 139f. gefundenen hervorgehen. Fano zeigte, daß jede endliche kontinuierliche Gruppe von Cremonaschen Transformationen sich als eine projektive Gruppe auf einer höheren Mannigfaltigkeit in einem Raume von bestimmter Dimensionenzahl auffassen läßt.

Die kontinuierlichen Gruppen von quadratischen Transformationen bestimmte Noether, *Math. Ver.* **5**, 68 (1896).

Die birationalen Reziprozitäten (d. h. Zuordnungen der Punkte und Ebenen des Raumes), insbesondere solche, bei denen jeder Punkt in der ihm zugeordneten Ebene liegt (Nullsysteme) wurden in einzelnen besonderen Fällen von R. Sturm, *Math. Ann.* **19**, 461 (1882); Ameseder, *Wien. Sitzungsber.* **83**^{2}, 385 (1881), *J. f. Math.* **97**, 62 (1884) und allgemein von Montesano, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **4**, 583 (1888) behandelt. Vgl. Kap. XXXIX.

§ 2. Lineare Transformationen (Kollineationen und Korrelationen).

Der einfachste Fall einer Raumtransformation ist der einer linearen Transformation, wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ lineare Formen von y_1, y_2, y_3, y_4 sind. Den Ebenen und Geraden des einen Raumes entsprechen dann wieder Ebenen und Gerade des anderen Raumes.

Damit die Ebenen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ nicht einem Bündel angehören, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante Δ der Koeffizienten von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ nicht verschwindet.

Wenn die Determinante Δ verschwindet, aber nicht mit allen ihren Unterdeterminanten, so erhält man eine Beziehung des Raumes (y) zu einer Ebene π des Raumes (x), die als *Zentralprojektion* (*Zentralperspektive*) resp. *Parallprojektion* bezeichnet wird, und bei der den Punkten von π die Strahlen eines Bündels im Raume (y) zugeordnet sind. Vgl. u. a. Rohn und Papperitz, *Lehrb. der darst. Geom. II*, 3. Aufl. Leipzig 1906, S. 72ff.

Ist $\varDelta \neq 0$, so entsprechen den Ebenen (oder Strahlen) eines Büschels oder eines Bündels im Raum (y) die Ebenen (oder Strahlen) eines Büschels oder eines Bündels im Raum (x). Diese Raumverwandtschaft läßt sich auch deuten als eine Beziehung zwischen zwei *Ebenenräumen.* Sie ist vollständig bestimmt, wenn zu fünf Punkten oder Ebenen des einen Raumes die entsprechenden Punkte oder Ebenen des anderen Raumes bekannt sind.

Das Doppelverhältnis von irgend vier Punkten einer Geraden ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der zugehörigen vier Punkte des anderen Raumes. Die einander zugeordneten geraden Punktreihen sind projektiv aufeinander bezogen; irgend zwei einander entsprechende ebene Fehler sind kollinear verwandt.

Der Begriff und die Bezeichnung der Kollineation stammt von Moebius, *Der baryzentrische Kalkul,* Leipzig 1827, *Werke I,* Leipzig 1885, S. 266ff.

Wenn die unendlich fernen Ebenen beider Räume einander entsprechen, wird die Kollineation zu einer *Affinität.* Es ergibt sich dann, daß die Volumina entsprechender Raumteile in einem konstanten Verhältnis stehen. Irgend zwei einander entsprechende Ebenen sind affin aufeinander bezogen, und irgend zwei einander entsprechende Geraden sind zueinander ähnlich (d. h. das Abstandsverhältnis von irgend drei Punkten der einen ist gleich dem entsprechenden Abstandsverhältnis der zugehörigen drei Punkte der anderen).

Besondere Fälle der Affinität sind die *Ähnlichkeitstransformation* und die *Kongruenz.*

In kartesischen Koordinaten x, y, z und x', y', z' wird die affine Transformation durch lineare Gleichungen von folgender Form dargestellt:

$$x = a_1 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$
$$y = a_2 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$
$$z = a_3 + a_{31}x' + a_{32}y' +$$

Diese Gleichungen liefern eine Ähnlichkeitstransformation, wenn

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + a_{3i}^2 = \mu^2, \quad a_{1i}a_{1k} + a_{2i}a_{2k} + a_{3i}a_{3k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3,\ i \neq k)$$

wird, woraus auch

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 = \frac{1}{\mu^2}, \qquad a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + a_{i3}a_{k3} = 0$$

folgt, und eine Kongruenz, wenn noch

wird. Vgl. L. Euler, *Novi Comm. Ac. Petrop.* **15**, 1770 (1771), p. 76ff.; Lagrange, *Berlin. Nouv. Mém.* 1773, *Œuvres III*, p. 580ff.; Lexell, *Novi Comm. Ac. Petrop.* **20** (1776), p. 246.

Bei einer allgemeinen Kollineation entspricht der unendlich fernen Ebene des einen Raumes eine im Endlichen gelegene Ebene, die *Fluchtebene*, des anderen Raumes.

Wenn zwei zueinander senkrechten Ebenen des einen Raumes wieder zwei zueinander senkrechte Ebenen des anderen Raumes entsprechen, so sind diese jedesmal konjugiert bezüglich einer Schar konfokaler F_2, von welchen die Fluchtebene des betreffenden Raumes eine Symmetrieebene bildet. Jede dieser Ebenen berührt eine der konfokalen F_1, und die ihr konjugierten normalen Ebenen gehen durch den Berührungspunkt hindurch.

Den konfokalen Flächen des einen Raumes entsprechen in der Kollineation die konfokalen Flächen des anderen Raumes derart, daß die Krümmungslinien auf jeder dieser Flächen und ihre Normalen einander zugeordnet sind.

Bezieht man auf die Hauptachsen der konfokalen Flächen in beiden Räumen kartesische Koordinaten x, y, z und x', y', z', so stellt die Kollineation sich dar durch die Gleichungen

$$x = \frac{}{x'}, \quad y \quad b\frac{y'}{x'}, \quad z = c\frac{z'}{x'},$$

aus denen umgekehrt

$$x = \frac{}{}, \qquad b'\frac{y}{x}, \qquad c'\frac{z}{x}$$

folgt, wenn $bb' = cc' = A$ ist.

Die konfokalen Flächen sind dann durch die Gleichungen gegeben:

$$1, \quad \frac{x'^2}{\mu} + \frac{y'^2}{b'^2 - \mu} + \frac{}{c'^2 - \mu} \quad 1.$$

Vgl. Henry Smith, *Lond. Math. Soc. Proc.* **2**, 196 (1869), *Coll. Papers I*, Oxford 1894, p. 545; Kilbinger, Straßburger Diss. 1880; Reye, *Math. Ann.* **46** (1895) 423.

Setzt man die homogenen Punktkoordinaten x_i in dem einen Raum als lineare Formen von homogenen Ebenkoordinaten u_i im

anderen Raume an, so erhält man eine reziproke Transformation oder Korrelation. Den Punkten des ersten Raumes entsprechen dann Ebenen des zweiten Raumes, den Punkten einer Geraden die Ebenen eines Büschels, den Punkten einer Ebene die Ebenen eines Bündels. So aber entsprechen auch wieder den Punkten des zweiten Raumes Ebenen des ersten Raumes.

Wenn der unendlich fernen Ebene des einen Raumes ein unendlich ferner Punkt im anderen Raum entspricht, so entspricht auch wieder der unendlich fernen Ebene dieses Raumes ein unendlich ferner Punkt im anderen Raume. Die Korrelation ist dann *parabolisch* und läßt sich in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten darstellen wie folgt:

$$\beta \frac{y}{x}, \quad w$$

wenn die Ebenenkoordinaten durch die Ebenengleichung

$$ux' + vy' + wz' = 1$$

definiert werden.

In jedem anderen Falle ergibt sich in beiden Räumen je ein Mittelpunkt, der im Endlichen liegt und der unendlich fernen Ebene des anderen Raumes entspricht, und durch diese Mittelpunkte lassen sich immer je drei zueinander senkrechte Achsen ziehen, die einander paarweise entsprechen und auf die bezogen die Darstellung der Korrelation die Form annimmt:

$$\alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = \gamma z.$$

Läßt man zwei kollinear aufeinander bezogene Räume ineinander fallen, so daß jeder Punkt zum einen oder zum anderen Raum gerechnet werden kann, so erhebt sich zunächst die Frage nach den Doppelpunkten, d. h. den Punkten, die mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen. Setzt man die Kollineation in der Form an

$$\varrho x_i = \sum a_{ik} y_k, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

so ergibt sich zur Bestimmung der Doppelpunkte aus $x_i = y_i$ die biquadratische Gleichung

$$\begin{matrix} a_{11} - \varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \end{matrix} \quad 0,$$

deren vier Wurzeln im allgemeinen vier Doppelpunkten entsprechen; diese können aber auch paarweise konjugiert imaginär werden oder teilweise oder alle zusammenfallen.

Es kann auch der Fall eintreten, daß unendlich viele Doppelpunkte vorhanden sind, falls nämlich alle ersten Unterdeterminanten der vorstehenden Determinante für einen bestimmten Wert von ϱ verschwinden. Dieser Wert ist dann notwendigerweise mindestens eine Doppelwurzel der Gleichung und es ergibt sich eine Gerade, deren sämtliche Punkte Doppelpunkte sind.

Findet man zwei solche Gerade, so spricht man von einer *gescharten Kollineation.* Alle Strahlen, die die beiden Geraden treffen, entsprechen sich selbst, und mit ihren Treffpunkten bilden alle Paare entsprechender Punkte, die auf den Strahlen liegen, ein konstantes Doppelverhältnis. Die beiden Geraden können im besonderen auch zusammenfallen.

Wann für einen Wert von ϱ alle zweiten Unterdetermiuanten der Determinante verschwinden, in welchem Falle dieser Wert von ϱ eine mindestens dreifache Wurzel der Gleichung ist, sind alle Punkte einer Ebene, der *Kollineationsebene,* Doppelpunkte. Dann ist die Kollineation *zentral;* alle Paare entsprechender Punkte liegen auf einem Strahl durch den übrigbleibenden isolierten Doppelpunkt (das *Kollineationszentrum*) und bilden, falls dieser nicht in die Kollineationsebene fällt, mit ihm und dem Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Kollineationsebene ein konstantes Doppelverhältnis. Diese Kollineation wird auch als *Reliefperspektive* bezeichnet. Vgl. u. a. R. Staudigl, *Grundzüge der Reliefperspektive,* Wien 1868; H. Hertzer, *Die Grundprinzipien der Zentral-Raumprojektion,* Berlin 1875; L. Burmester, *Grundzüge der Reliefperspektive,* Leipzig 1883.

Bei einer Kollineation ineinander fallender Räume entsprechen im allgemeinen einem Punkte zwei verschiedene Punkte, je nachdem man ihn zum ersten oder zweiten Raum rechnet. Entspricht aber außer den Doppelpunkten einmal einem Punkte derselbe Punkt, gleichgültig zu welchem Raume man ihn rechnet, so gilt das gleiche für alle anderen Punkte des Raumes. Die Kollineation besteht dann in einer Paarung der Raumpunkte zu Paaren und heißt *involutorisch.* In diesem Falle ist die Kollineation notwendigerweise entweder geschart oder zentral und wird entsprechend als eine *gescharte* oder eine *zentrale Involution* bezeichnet.

Während die involutorischen Kollineationen nach einmaliger Wiederholung zur Identität führen, liefern die allgemeinen *zykli-*

schen Kollineationen nach einer bestimmten Anzahl von Wiederholungen die Identität. Über diese Kollineationen vgl. Reye, *Geom. d. Lage III,* 4. Aufl. Leipzig 1910, S. 182 ff.

Bei einer Korrelation zwischen zwei ineinander fallenden Räumen kann man nach den Punkten des ersten Raumes fragen, die in den ihnen entsprechenden Ebenen des zweiten Raumes liegen. Als Ort dieser Punkte ergibt sich, wenn die Gleichungen

$$u_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad \text{oder} \qquad x_k = \sum_k A_{ik} u_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

die Korrelation festlegen, die Fläche 2. Ordnung

$$\sum \sum a_{i} \qquad 0$$

und als Umhüllungsgebilde der Ebenen die andere quadratische Fläche, deren Tangentialgleichung lautet

$$\sum_i \sum_k A_{ik} u_i u_k = 0;$$

die Punkte der ersten Fläche liegen auch als Punkte des zweiten Raumes in den ihnen entsprechenden Ebenen des ersten Raumes, die wieder dieselbe quadratische Fläche umhüllen wie vorher.

Die beiden Flächen fallen zusammen, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ und damit auch $A_{ik} = A_{ki}$ wird. In diesem Falle entspricht jedem Punkte dieselbe Ebene, gleichgültig zu welchem Raum wir ihn rechnen, und die Zuordnung der Punkte und Ebenen wird als ein *Polarsystem* bezeichnet (vgl. S. 578 ff.).

Es kann auch geschehen, daß *jeder* Punkt in der ihm entsprechenden Ebene liegt. Dies tritt ein, wenn $a_{ik} = - a_{ki}$; in diesem Falle spricht man nach Moebius von einem *Nullsystem.* Jede Ebene hat einen *Nullpunkt,* der in ihr liegt, jeder Punkt eine *Nullebene,* die durch ihn geht. Die Strahlen, die in jeder Ebene durch den Nullpunkt gehen, bilden einen *linearen Strahlenkomplex,* und die Theorie des Nullsystems ist so aufs engste mit der Theorie der linearen Strahlenkomplexe verknüpft. Das Nullsystem fand Moebius von der Mechanik ausgehend: *Journ. f. Math.* **10**, 317 (1833), *Werke I,* S. 489.

Über Fragen, welche die linearen Transformationen betreffen, vgl. u. a. R. Sturm, *Math. Ann.* **1**, 533 (1869), **6**, 513 (1873), **15**, 407 (1879), **19**, 461 (1882), **22**, 569 (1883), **28**, 268, 277 (1886); Stephanos, ebenda **22**, 320 (1883) (über „harmonische Kollineationen"); Pasch, ebenda **23**, 419 (1884); Muth, ebenda

33, 493 (1889), **40**, 89 (1892), **55**, 594 (1902); Reye, ebenda **43**, 145 (1893), der hier das Problem der vertauschbaren Kollineationen behandelt. S. auch H. Wiener, *Leipz. Ber.* **42**, 13, 71, 245 (1890), **43**, 424, 644 (1891), und die zusammenfassenden Darstellungen: R. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften III,* Leipzig 1909; Reye, *Die Geometrie der Lage II,* 4. Aufl. Stuttgart 1907; Doehlemann, *Geometrische Transformationen I,* Leipzig 1902; Reye, *Die Geometrie der Lage II,* 4. Aufl. Stuttgart 1907.

Segre, *J. f. Math.* **100**, 318 (1886) führte Büschel von Kollineationen ein; Reye, ebenda **104**, 299 (1889), **106**, 30, 315 (1890), **107**, 162 (1891), **108**, 89 (1891) untersuchte weiter die linearen Systeme von Kollineationen und Korrelationen.

Die Kollineationen, welche eine Fläche 2. Ordnung in sich transformieren, bestimmte Voß, *Math. Ann.* **13**, 320 (1878); R. Sturm, *Math. Ann.* **26**, 465 (1886). Vgl. auch Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie II,* Leipzig 1891, S. 356ff.; außerdem Rosanes, *J. f. Math.* **80**, 67 (1875); Zeuthen, *Math. Ann.* **18**, 33 (1881), **26**, 247 (1886).

Lie, *Archiv for Math. og naturv.* **7**, 179 (1882) hat sich die Aufgabe gestellt, alle Flächen zu bestimmen, welche eine kontinuierliche mindestens dreigliedrige Gruppe von linearen Transformationen in sich gestatten. Als solche ergaben sich, von den Ebenen und Kegelflächen abgesehen:

1. die nicht ausgearteten Flächen 2. Grades, deren jede eine sechsgliedrige projektive Gruppe zuläßt,

2. die abwickelbare Fläche einer Raumkurve 3. Ordnung, welche dieselbe dreigliedrige Gruppe gestattet wie diese Raumkurve.

Dazu mußte später die damals übersehene Cayleysche Regelfläche 3. Grades gefügt werden, die ebenfalls eine dreigliedrige projektive Gruppe zuläßt, s. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen, III,* Leipzig 1893, S. 190ff.

Fano, *Rom. Linc. Rend.* (5) **4**, 149, 325 (1895), *Rend. Circ. Mat.* **10**, 1, 16 (1896) hat die Frage nach den Flächen mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich allgemein mit den Methoden der projektiven Geometrie behandelt und gefunden:

1. Jede algebraische Fläche mit unendlich vielen projektiven Transformationen in sich läßt sich eindeutig umkehrbar auf eine Regelfläche abbilden.

2. Gestattet eine algebraische Fläche eine transitive projektive Gruppe, so ist sie rational.

§ 3. Quadratische Transformationen.

Die eindeutigen quadratischen Transformationen lassen sich alle auf die oben angegebene Weise aus der Abbildung einer Fläche 2. Ordnung auf eine Ebene ableiten. Wir wollen uns aber damit begnügen, von den einzelnen Arten homaloidischer F_2-Gebüsche auszugehen.

1. Eine erste Art solcher Gebüsche wird gebildet von den F_2, die einen festen Kegelschnitt ω und außerdem einen festen Punkt O außerhalb der Ebene von ω gemein haben. Die Flächen schneiden sich paarweise außer in dem festen Kegelschnitt in einem veränderlichen Kegelschnitt, und diese Kegelschnitte entsprechen den geraden Linien des anderen Raumes, wenn die Flächen des Gebüschs selbst den Ebenen dieses Raumes zugeordnet werden. Nur den Geraden, die durch O gehen oder ω treffen, entsprechen wieder gerade Linien. Die Transformation hat sonach die Charakteristik (2, 2).

Wählt man $y_4 = 0$ als Ebene des festen Kegelschnittes ω, (0, 0, 0, 1) als den festen Punkt O, so wird die Gleichung des Kegels 2. Grades, der ω aus O projiziert, von der Form

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

und die Transformation läßt sich, abgesehen von einer hinzutretenden kollinearen Transformation, in der Form darstellen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_4 : y_2 y_4 : y_3 y_4 : \varphi(y_1, y_2, y_3),$$

woraus umgekehrt auch

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_4 : x_2 x_4 : x_3 x_4 : \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

folgt. Die Jacobische Fläche des F_2-Gebüsches besteht in diesem Falle jedesmal aus der zweimal gezählten Ebene des festen Kegelschnitts und dem Kegel, der den festen Kegelschnitt aus dem festen Punkt projiziert.

Bezieht man die Koordinaten x und y auf dasselbe Koordinatensystem, so kann man nach den Punkten fragen, die mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen. Man erkennt sofort, daß sie die Fläche 2. Ordnung

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_4^2$$

erfüllen, welche der den Kegelschnitt ω aus O projizierende Kegel längs ω berührt. Je zwei einander entsprechende Punkte liegen auf einem Strahl durch O und sind konjugiert bezüglich der soeben gefundenen Fläche 2. Ordnung.

Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo der Kegelschnitt ω der unendlich ferne Kugelkreis wird. Bedeuten dann x, y, z und x', y', z' die kartesischen Koordinaten zweier einander entsprechender Punkte, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung O, so ergibt sich

$$x : y : z : 1 = \alpha x' : \alpha y' : \alpha z' : x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$x' : y' : z' : 1 = \alpha x : \alpha y : \alpha z : x^2 + y^2 + z^2$$

und daraus, wenn wir mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

die Entfernungen der beiden Punkte von O bezeichnen,

$$r = \frac{\alpha}{r'}.$$

Man spricht deshalb von einer *Transformation durch reziproke Radienvektoren* oder kürzer einer *Inversion*. Den Ebenen entsprechen Kugeln, die durch O gehen, jeder anderen Kugel ist wieder eine Kugel zugeordnet. Daraus folgt, daß aus einer Reihe nacheinander angewendeter Inversionen, abgesehen von einer orthogonalen Transformation (Kongruenz), wieder eine Inversion resultiert.

Vgl. Liouville, *Journ. de Math.* **12**, 265 (1847), der im Anschluß an zwei Briefe von W. Thomson über die von ihm gefundenen elektrischen Bilder (*Journ. de Math.* **10**, 364 (1845), **12**, 256 (1847)) die allgemeinen Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radienvektoren entwickelte, ferner u. a. Moutard, *Nouv. Ann.* **3**, 306, 536 (1864); Pirondini, *Giorn. di Mat.* **27**, 168 (1889), ferner K. Doehlemann, *Geometrische Transformationen, II,* Leipzig 1908, § 201—286.

Den Flächen 2. Ordnung entsprechen bei der allgemeinen birationalen quadratischen Transformation Flächen 4. Ordnung, die durch den Kegelschnitt ω und den Punkt O doppelt hindurchgehen und deren Gleichung sich auf die Form bringen läßt:

$$\varphi^2 + 2u\varphi y_4 + \psi y_4^2 = 0,$$

wenn ψ ebenso wie φ eine quadratische Form und u eine lineare Form von y_1, y_2, y_3 bezeichnet. $\psi = 0$ ist die Gleichung des Tangentialkegels der Fläche in ihrem Doppelpunkt und gleichzeitig des Tangentialkegels der zugehörigen F_l. Die vier Schnittlinien der Kegel $\varphi = 0$, $\psi = 0$ gehören der F_2 an, ebenso die acht Geraden, welche den den Kegelschnitt ω treffenden Regelstrahlen der F_2 entsprechen. Bei besonderen Lagenbeziehungen der beiden Kegel ergeben sich speziellere Flächen.

Liegt der Punkt O auf dem Kegelschnitt ω selbst, so läßt sich die quadratische Transformation darstellen in der Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_2 y_4 - y_3^2,$$

woraus umgekehrt

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 x_2 : x_2^2 : x_2 x_3 : x_1 x_4 + x_3^2$$

folgt. Dann wird der Punkt O ein uniplanarer Knotenpunkt der den F_2 des einen Raumes entsprechenden F_4, durch den vier in einer Ebene liegende Gerade der F_4 gehen.

Die allgemeine Transformation (2, 2) läßt sich auch zur Untersuchung der Flächen 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt und ohne weitere Doppelpunkte verwenden. Eine solche Fläche entspricht einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung, die den Kegelschnitt ω einfach enthält. Den 16 Gernden der F_3, die diesen Kegelschnitt treffen, entsprechen die 16 Geraden der F_4. Die Gleichung der F_4 ergibt sich so unmittelbar in der Form

$$\varphi^2 + 2 U \varphi y_4 + \Psi y_4^2 = 9,$$

wo Ψ eine quadratische und U eine lineare Form von y_1, y_2, y_3, y_4 bedeutet.

2. Nehmen wir im Raume (y) die F_2, die eine Gerade o und außerdem drei Punkte O_1, O_2, O_3 gemein haben, so bilden diese wieder ein homaloidisches Gebüsch. Irgend zwei von ihnen haben außer o eine *kubische Raumkurve* gemein. Die zu dem F_2-Gebüsch gehörige quadratische Transformation hat also die Charakteristik (2, 3). Durch die Geraden, welche o treffen, gehen unendlich viele F_2 des Gebüsches, die einen Büschel bilden. Diesen Geraden entsprechen also wieder Gerade, und da in jeder Ebene unendlich viele von ihnen enthalten sind, *entsprechen die Ebenen des Raumes (y) kubischen Regelflächen R_3 des Raumes (x), und nur den Ebenen durch o entsprechen wieder die Ebenen eines Bü-*

schels. Die Achse a dieses Büschels ist die gemeinsame Doppellinie der Regelflächen R_3. Den ebenen Schnitten dieser Regelflächen entsprechen die ebenen Schnitte der F_2 des Gebüsches im Raume (y), also *Kegelschnitte,* und diese Kegelschnitte zerfallen in zwei Gerade, wenn der entsprechende ebene Schnitt der R_3 in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Daraus ist wieder zu sehen, daß *einer allgemeinen Geraden des Raumes (y) ein Kegelschnitt im Raum (x) entspricht.* Von diesen Kegelschnitten liegt in einer allgemeinen Ebene ein Büschel, die Grundpunkte dieser Büschel werden ausgeschnitten durch die Achse a und drei Gerade g_1, g_2, g_3, welche drei gemeinsame Regelstrahlen aller R_3 bilden. Den Punkten der Geraden o entsprechen die geraden Linien, welche g_1, g_2, g_3 treffen, der Geraden o selbst also die durch diese drei Geraden bestimmte Regelfläche R_2. Den Grundpunkten O_1, O_2, O_3 entsprechen die drei Ebenen, welche a mit g_1, g_2, g_3 verbinden.

Entsprechend den verschiedenen Lagen, welche die Punkte gegen einander und gegen die Gerade o einnehmen können, sind viele besondere Fälle möglich. Für alle diese hat Cremona, *Ann. di Mat.* (2) **5**, 148 (1873) die analytische Darstellung angegeben. Für den „allgemeinen Fall" hatte schon Cayley gefunden:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_3 : y_2 y_3 : y_1(y_2 + y_4) : y_2(y_1 + y_4),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1(x_1 x_4 - x_2 x_3) : x_2(x_1 x_4 - x_2 x_3)$$
$$: (x_1 - x_2) x_1 x_2 : (x_3 - x_4) x_1 x_2 .$$

Die Jacobischen Flächen in den beiden Räumen werden

$$y_1 y_2 y_3 (y_1 - y_2) = 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 x_2^2 (x_1 - x_2)^2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0,$$

d. h die eine besteht aus den Ebenen oO_1, oO_2, oO_3 und O_1, O_2, O_3, die andere aus den doppelt gezählten Ebenen ag_1, ag_2, ag_3 und der Regelfläche R_2.

3. Ein homaloidisches Gebüsch im Raume (y) bilden auch die F_2, die vier Punkte O, O_1, O_2, O_3 gemein und in O eine gemeinsame Tangentialebene τ haben. Irgendeine von ihnen wird in der Tat von irgend zwei anderen in Raumkurven 4. Ordnung 1. Art geschnitten, die einen Doppelpunkt und drei einfache Punkte, also nur noch einen veränderlichen Punkt gemein haben. *Die Transformation hat die Charakteristik* (2, 4). *Den Ebenen des Raumes (y) entsprechen Flächen 4. Ordnung F_4 im Raum (x).* Diese Flächen gehen durch drei in einem Punkt A zusammenlaufende Gerade d_1, d_2, d_3 doppelt hindurch (deren Punkte den durch je zwei der

Punkte O_1, O_2, O_3 gehenden und die Ebene τ in O berührenden Kegelschnitten, die also selbst den Ebenen OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2 entsprechen, während die Ebenen durch ihren gemeinsamen Punkt A den durch die Strahlen OO_1, OO_2, OO_3 hindurchgelegten Kegeln entsprechen). *Die F_4 sind demnach Steinersche Flächen.* Sie haben außer den Doppelgeraden d_1, d_2, d_3 noch einen Kegelschnitt k gemein, der d_1, d_2, d_3 schneidet, dessen Ebene dem Paar der Ebenen τ und $O_1O_2O_3$ und dessen Punkte den in τ durch O gehenden Strahlen zugeordnet sind. *Den Geraden einer Ebene des Raumes (y) entsprechen die Kegelschnitte auf der zugehörigen Steinerschen Fläche.* Diese Kegelschnitte treffen die Geraden d_1, d_2, d_3 und den Kegelschnitt k.

Für den „allgemeinen Fall" läßt sich den Transformationsgleichungen die Form geben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2y_3 : y_3y_1 : y_1y_2 : y_4(y_1 + y_2 + y_3),$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = f(x)\,x_2x_3 : f(x)\,x_3x_1 : f(x)\,x_1x_2 : x_1x_2x_3x_4,$$

wobei

$$f(x) = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2.$$

Die Jacobischen Flächen werden

$$y_1y_2y_3(y_1 + y_2 + y_3) = 0 \quad \text{und} \quad x_1^2x_2^2x_3^2(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)^3 = 0,$$

d. h. die eine besteht aus den Ebenen τ, OO_2O_3, OO_3O_1, OO_1O_2, die andere aus den doppelt gezählten Ebenen d_2d_3, d_3d_1, d_1d_2 und dem dreifach gezählten Kegel, der k aus A projiziert. Cremona hat *Ann. di Mat.* (2) **5**, 153 (1873) noch fünf Spezialfälle aufgezählt und behandelt. Vgl. auch Cremona, *Bologna Mem.* (3) **1**, 365 (1871).

Es kann geschehen, daß die den Ebenen zugeordneten F_2 sämtlich Kegel werden. Diese *„konischen Transformationen"* wurden untersucht von del Pezzo, *Napoli Rend.* (3) **2**, 288 (1896). Von solcher Art ist z. B. die Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_1y_2 : y_2y_3 : y_2y_4.$$

§ 4. Kubische Transformationen.

Unter den kubischen Transformationen sind am wichtigsten diejenigen, die man erhält, indem man von drei keinem Büschel angehörenden Korrelationen ausgeht und jedem Punkt den Schnitt-

punkt der drei ihm in diesen Korrelationen zugeordneten Ebenen zuweist. Die den Punkten einer Ebene in den Korrelationen zugeordneten Ebenenbündel sind kollinear aufeinander bezogen und erzeugen eine *Fläche 3. Ordnung, deren Punkte den Punkten der Ebene in der so begründeten Punkttransformation zugeordnet sind. Irgend zwei der auf diese Weise gewonnenen F_3 haben eine feste Kurve 6. Ordnung R_6 und außerdem eine kubische Raumkurve gemein, deren Punkte den Punkten der Schnittlinie der beiden den F_3 bei der kubischen Transformation zugeordneten Ebenen entsprechen.* Die Transformation hat demnach die Charakteristik (3, 3).

Die drei Korrelationen bestimmen einen ganzen Bündel von Korrelationen. Die Punkte des Raumes sind die Mittelpunkte von kollinearen Bündeln des Raumes (y), und entsprechende Ebenen dieser Bündel werden jedesmal in einer Korrelation den Punkten des Raumes (x) zugeordnet. Ist P ein Punkt dieses Raumes, P' der Mittelpunkt des entsprechenden Bündels im Raume (y), so gehen umgekehrt die Ebenen, die P' bei den ∞^2 Korrelationen im Raume (x) entsprechen, durch P hindurch, und die Ebenenbündel, die so im Raume (x) entstehen, sind wieder kollinear. Derart erkennt man, daß die Beziehung zwischen den beiden Räumen durchaus wechselseitig ist. Im Raume (x) existiert auch eine Fundamentalkurve 6. Ordnung R_6', durch welche die den Ebenen des Raumes (y) entsprechenden F_3 hindurchgehen. Die Kurven R_6 und R_6' haben das Geschlecht 3.

Die Jacobischen Flächen in den beiden Räumen sind Regelflächen 8. Grades. Sie werden gebildet von den Trisekanten der zugehörigen Fundamentalkurve 6. Ordnung und haben diese zur dreifachen Kurve. *Die Trisekanten sind in der kubischen Verwandtschaft jedesmal den Punkten der Fundamentalkurve des anderen Raumes zugeordnet.* Diese Punkte haben nämlich die Eigenschaft, daß die ihnen in den Korrelationen zugeordneten Ebenen durch eine und dieselbe Gerade gehen.

Durch die kubische Transformation wird jede der auftretenden F_3 auf eine Ebene π abgebildet. Die sechs Schnittpunkte dieser Ebene π mit der Fundamentalkurve des betreffenden Raumes bilden die Fundamentalpunkte der Abbildung, denen auf der F_3 gerade Linien zugeordnet sind. Den ebenen Kurven 3. Ordnung, die durch die sechs Fundamentalkurven gehen, entsprechen wieder ebene Kurven 3. Ordnung, welche die Fundamentalkurve ihres Raumes in sechs Punkten schneiden.

Den Geraden, welche in der Ebene π durch einen Fundamentalpunkt A gehen, entsprechen auf der zugehörigen F_3 Kegel-

schnitte k, welche die Fundamentalkurve in je fünf Punkten treffen und deren Ebenen sich in einer Geraden a_1 schneiden, diese trifft die Fundamentalkurve ihres Raumes in einem Punkte A_1, ihr entspricht in π der Kegelschnitt $\varkappa$, der die fünf von A_1 verschiedenen Fundamentalpunkte enthält. Läßt man a_1 sich um A_1 drehen, so verändert sich der Kegelschnitt $\varkappa$ so, daß seine Ebene beständig durch A geht und er die Fundamentalkurve des Raumes in fünf Punkten schneidet. Ebenso schneiden auch die Kegelschnitte $\varkappa_1$, die den Strahlen durch A entsprechen, die Fundamentalkurve ihres Raumes in fünf Punkten und ihre Ebene geht durch A_1. Derart sind die beiden Fundamentalkurven punktweise eindeutig aufeinander bezogen, und jedem Punkte A der einen ist gleichzeitig eine Trisekante t derselben Kurve zugeordnet als die dem zugehörigen Punkt A_1 der anderen Fundamentalkurve entsprechende Linie.

Ein bemerkenswerter Spezialfall ist der, wo die Korrelationen durch die Zuordnung der Punkte und Ebenen als Pole und Polaren bezüglich der F_2 eines Bündels ersetzt werden. Dann fallen die beiden Fundamentalkurven in die Kernkurve des F_2-Bündels, auf welcher die Spitzen der in diesem Bündel enthaltenen Kegel liegen. Jedem Punkte dieser Kurve ist eine Trisekante zugeordnet, in der sich die Polarebenen des Punktes schneiden. Jeder Sehne der Kurve ist eine andere Sehne zugeordnet. Die Endpunkte dieser beiden Sehnen bilden die Ecken eines Poltetraeders für die Flächen eines Büschels in dem Bündel.

Als noch speziellere Fälle können wir anführen:

1. den Fall, wo die F_2 des Bündels *ein gemeinsames Poltetraeder T haben.* Die Kernkurve besteht dann aus den Kanten dieses Tetraeders, und wenn wir auf dasselbe die Punktkoordinaten x und y beziehen, so wird die kubische Transformation durch die einfache Beziehung dargestellt:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4}.$$

Die F_3, welche den Ebenen entsprechen, haben die vier Ecken des Tetraeders T zu Doppelpunkten.

2. Wenn die F_2 des Bündels *alle dieselbe kubische Raumkurve γ_3 enthalten,* so liegen je zwei einander zugeordnete Punkte auf einer Bisekante der kubischen Raumkurve γ_3 und bilden auf ihr eine Involution, von der die Schnittpunkte der Bisekante mit der Kurve die Doppelpunkte sind. Zwei derart einander zugeordnete Punkte heißen *konjugiert* bezügl. der kubischen Raumkurve γ_3.

Die Kernkurve reduziert sich in diesem Falle auf die (doppelt zu zählende) Kurve γ_3. Stellt man γ_3 in der Form dar

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1^3 : \xi_1^2 \xi_2 : \xi_1 \xi_2^2 : \xi_2^3,$$

so läßt sich die Transformation dadurch geben, daß die Form

$$x_1 \xi_1^3 + 3 x_2 \xi_1^2 \xi_2 + 3 x_3 \xi_1 \xi_2^2 + x_4 \xi_2^3$$

der kubischen Kovariante der kubischen Binärform

$$y_1 \xi_1^3 - 3 y_2 \xi_1^2 \xi_2 + 3 y_3 \xi_1 \xi_2^2 - y_4 \xi_2^3$$

proportional wird, d. h.

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (y_1^2 y_4 - 3 y_1 y_2 y_3 + 2 y_2^3) : (y_1 y_2 y_4 - 2 y_1 y_3^2 + y_2^2 y_3)$$
$$: (y_1 y_3 y_4 - 2 y_2^2 y_4 + y_2 y_3^2) : (y_1 y_4^2 - 3 y_2 y_3 y_4 + 2 y_3^3).$$

Den Ebenen entsprechen Flächen 3. Ordnung, welche einander und die Tangentenfläche der Kurve γ_3 längs dieser selbst berühren, ferner die Tangenten von γ_3 zu Haupttangenten haben und in den Schnittpunkten der Ebene mit der kubischen Raumkurve drei Doppelpunkte besitzen. Sie enthalten die drei Verbindungslinien dieser Punkte als quaternäre Gerade, die drei Tangenten der kubischen Raumkurve in ihnen als binäre Gerade und noch sechs weitere unäre Gerade. Drei davon sind Schmiegungsstrahlen durch die drei Doppelpunkte und drei die Polaren der Ebene bezüglich der Kegel, die aus den Doppelpunkten die Kurve γ_3 projizieren. *Den Schmiegungsebenen der Kurve γ_3 entsprechen insbesondere kubische Regelflächen mit einer Rückkehrkante (der Tangente von γ_3, die in der Schmiegungsebene liegt).*

Es ist nämlich einer geraden Linie g im allgemeinen eine kubische Raumkurve zugeordnet; nur wenn die Gerade g die Fundamentalkurve γ_3 trifft, scheidet sich von der kubischen Raumkurve die Tangente in dem Treffpunkte P ab, und es bleibt ein Kegelschnitt übrig, dessen Ebene die Polarebene von g bezüglich des die Kurve γ_3 aus P projizierenden Kegels 2. Grades ist. Liegt die Gerade g aber außerdem in der Schmiegungsebene ihres Treffpunktes P, so gehört die Tangente in P zu dem Kegelschnitt, der demnach in diese Tangente und eine andere Gerade g' zerfällt. Diese Gerade g' schneidet wieder die Kurve γ_3 in einem Punkte Q und liegt in der Schmiegungsebene dieses Punktes Q; g und g' liegen mit der Kurve γ_3 auf einer Regelfläche 2. Grades, deren

eine Regelschar aus Sehnen von γ_3 besteht. Vgl. Sturm, *J. f. Math.* **70**, 212 (1869); Cantone, *Napoli Rend.* **15**, 181 (1886); Schoute, *Nieuw Archief voor Wisk.* (2) **4**, 90 (1899); Reye, *Geom. d. Lage II*, 4. Aufl. 1907, S. 181ff.

Die kubische Raumtransformation wurde zuerst von Magnus, *Aufgaben aus der anal. Geom. des Raumes I*, Berlin 1837, S. 408, gefunden und weiter behandelt von Cremona, *Journ. f. Math.* **68**, 72 (1868), *Gött. Nachr.* 1871, S. 129, *Math. Ann.* **4**, 213 (1871), *Grundzüge einer geometrischen Theorie* usw. S. 175ff.; Cayley, *Lond. Math. Soc. Proc.* **3**, 174 (1870), *Papers VII*, p. 233; Noether, *Math. Ann.* **3**, 552 (1871); R. Sturm, *Math. Ann.* **19**, 480 (1882). Vgl. Reye, *Geom. d. Lage III*, 4. Aufl. Leipzig 1910, S. 140ff.

Die kubischen Transformationen (3, 3), bei denen die Kernkurve aus sechs Geraden besteht, bestimmte Hudson, *Lond. Math. Soc. Proc.* (2) **9**, 51 (1910).

Eine Raumtransformation (3, 3) entsteht auch aus drei Paaren projektiver Ebenenbüschel, wenn man durch jeden Punkt die Ebenen dreier dieser Büschel legt und ihm den Punkt zuweist, in dem sich die entsprechenden Ebenen der zu diesen drei Büscheln projektiven Büschel schneiden. Vgl. v. Krieg, *Zschr. Math. Phys.* **29**, 38 (1884); Doehlemann, *München Akad. Sitzungsber.* **24**, 41 (1884).

Viele weiteren Fälle haben behandelt Cremona, *Gött. Nachr.* 1871, S. 129, *Math. Ann.* **4** (1871) 213; R. Sturm, *D. Lehre v. d. geom. Verw. IV*, Leipzig 1909, S. 362ff.

Allgemein behandelten die kubischen Transformationen Loria, *Torino Atti* **26**, 275 (1890); Bonicelli, *Giorn. di Mat.* **40**, 184 (1902); Sturm, *Math.-Ver.* **14**, 18 (1905). Periodische kubische Transformationen untersuchte S. Kantor, *Amer. J. of Math.* **19**, 1, 382 (1897).

§ 5. Involutorische Verwandtschaften.

Eine Reihe der bereits besprochenen Verwandtschaften ist *involutorisch*, d. h. einem Punkte ist derselbe Punkt zugeordnet, gleichgültig, ob man jenen zum Raume (x) oder zum Raume (y) rechnet. So ist die projektive Inversion involutorisch, ebenso die durch die kubische Raumkurve vermittelte kubische Transformation.

Eine weitere solche Transformation von der 7. Ordnung ist mehrfach behandelt worden. Sie besteht darin, daß man zwei

Punkte P, P' einander zuweist, die mit sechs festen Punkten O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 zusammen acht assoziierte Punkte (die Grundpunkte eines F_2-Bündels) bilden. Vgl. Geiser, *Journ. f. Math.* **67**, 83 (1867); Sturm, *Math. Ann.* **1**, 564 (1868); Eberhardt. *Diss.* Breslau 1885.

Man kann die Verwandtschaften auch so definieren, daß die acht Punkte O_1, O_2, O_3, O_4 und O_5, O_6, P, P' die Ecken zweier Poltetraeder eines räumlichen Polarsystems bilden sollen. Hieraus findet man sofort die einfachste analytische Darstellung der Verwandtschaft. Bezieht man die Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 von P und P' auf das Tetraeder $O_1 O_2 O_3 O_4$ und seien hierbei $(1, 1, 1, 1)$ und $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ die Punkte O_5 und O_6, so gehe man aus von den quadratischen Formen θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, von denen z. B.

$$\theta_1 = (\alpha_3 - \alpha_4)\,\alpha_2 y_3 y_4 + (\alpha_4 - \alpha_2)\,\alpha_3 y_4 y_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)\,\alpha_4 y_2 y_3,$$

und den linearen Formen u_1, u_2, u_3, u_4, von denen z. B.

$$u_1 = (\alpha_3 - \alpha_4)\,y_2 + (\alpha_4 - \alpha_2)\,y_3 + (\alpha_2 - \alpha_3)\,y_4,$$

so daß $\theta_i = 0$ den Kegel darstellt, der aus O_i die übrigen Punkte O projiziert und $u_i = 0$ die Ebene, die aus O_i die Punkte O_5, O_6 projiziert, dann wird die Transformation durch die Proportion gegeben:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 : u_2 \theta_3 \theta_4 \theta_1 : u_3 \theta_4 \theta_1 \theta_2 : u_4 \theta_1 \theta_2 \theta_3.$$

Hieraus ist sofort zu sehen, daß *den Ebenen des einen Raumes Flächen 7. Ordnung des anderen Raumes entsprechen, von denen die durch die sechs Punkte $O_1, \ldots O_6$ gelegte kubische Raumkurve γ_3 eine dreifache Kurve und die 15 Verbindungslinien dieser Punkte einfache gerade Linien sind. Den geraden Linien des einen Raumes entsprechen Kurven 7. Ordnung des anderen Raumes, die durch die sechs Punkte $O_1, \ldots O_6$ doppelt hindurchgehen.* Die Jacobische Fläche des F_2-Gebüsches besteht aus den doppelt gezählten sechs Kegeln, die aus je einem der sechs Punkte $O_1, \ldots O_6$ die fünf übrigen projizieren. Die Raumkurve γ_3 und die 15 Verbindungslinien $O_i O_k$ bilden die 16 *Fundamentallinien* der Transformation. Alle Punkte einer von ihnen sind jedem Punkte dieser Geraden als entsprechende zugeordnet, denn durch jede dieser Linien geht ein F_2-Bündel, der die sechs Punkte $O_1, \ldots O_6$ unter seinen Grundpunkten enthält.

Die Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte

P, P' bildet eine Bisekante der kubischen Raumkurve γ_3, diese Bisekanten sind so sich selbst zugeordnet, und auf ihnen begründen die Paare entsprechender Punkte je eine Involution, deren Doppelpunkte auf der durch die Punkte $O_1, \ldots O_6$ bestimmten Weddleschen Fläche W_4 (Kegelspitzenfläche) *4. Ordnung liegen.* Die Punkte dieser Fläche entsprechen sonach sich selbst. Diese Fläche enthält die 16 Fundamentallinien und hat die sechs Grundpunkte $O_1, \ldots O_6$ zu Doppelpunkten.

Die F_2, die durch die sechs Grundpunkte gehen, schneiden die Fläche W_4 in einer Raumkurve 8. Ordnung R_8 mit sechs Doppelpunkten. Jede dieser Flächen F_2 entspricht sich selbst, und auf ihr wird durch die Bisekanten von γ_3 eine involutorische Punktverwandtschaft begründet, bei der die Punkte der Kurve R_8, die sich selbst entsprechenden Punkte und Berührungspunkte von Sehnen der γ_3 bildet.

Die involutorischen Transformationen, die bis jetzt besprochen sind, haben alle die Eigentümlichkeit, daß die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Strahlenkongruenz bilden, auf deren Strahlen dann jedesmal unendlich viele Paare entsprechender Punkte liegen. Im einfachsten Falle besteht diese Kongruenz aus den Strahlen eines Bündels, wie es bei den quadratischen Transformationen der Fall war. Solche Transformationen kann man als *zentrale* bezeichnen. Man erhält z. B. eine derartige Transformation aus einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkt, indem man auf jedem Strahl durch diesen Punkt die Punktepaare sucht, welche die zwei weiteren Schnittpunkte des Strahles mit der Fläche harmonisch trennen. Die Flächengleichung ist von der Form

$$\varphi_n + \varphi_{n-1} y_4 + \varphi_{n-2} y_4^2 = 0,$$

wo $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}$ Formen der Koordinaten y_1, y_2, y_3 von der durch ihren Index angegebenen Ordnung bezeichnen. Die zentrale Transformation stellt sich dann in der Form dar:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 : y_2 : y_3 : -\frac{\varphi_n + \varphi_{n-1} y_4}{\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} y_4}.$$

Sie ist von der n^{ten} Ordnung, und die Flächen n^{ter} Ordnung, die den Ebenen entsprechen, haben in dem Zentrum der Transformation einen $(n-1)$-fachen Punkt: Martinetti, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **18**, 132 (1885). Vgl. dazu de Paolis, *Giorn. di Mat.* **13**, 282 (1875); die involutorischen Transformationen, bei denen den Ebenen

Monoide entsprechen, bestimmte allgemein Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **21**, 579, 684.

Insbesondere über die involutorische Verwandtschaft, die durch eine allgemeine F_3 begründet wird, wenn man die Strahlen durch den Schnittpunkt zweier Geraden auf ihr zieht, vgl. Montesano, *Ist. Veneto Atti* (2) **6** (1888).

De Paolis, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **1**^{2}, 735, 754 (1885) hat allgemein die Frage nach den involutorischen Transformationen beantwortet, bei denen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Strahlenkongruenz und nicht einen Strahlenkomplex bilden. Er hat drei Klassen von solchen Transformationen gefunden: bei der 1. Klasse bilden die Verbindungslinien einen Strahlenbündel, bei der 2. Klasse bilden sie die Sehnen einer kubischen Raumkurve, bei der 3. Klasse treffen sie eine Raumkurve n^{ter} Ordnung und eine Gerade, welche die Raumkurve in $n-1$ Punkten schneidet.

Außer den hier behandelten Transformationen gibt es noch zahlreiche andere; man vgl. z. B. über involutorische Verwandtschaften, bei denen den Ebenen Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$-fachen Geraden entsprechen, Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **21**, 688, und solche, bei denen den Ebenen Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen Geraden entsprechen, Montesano, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **5**^{2}, 123 (1889). Zwei involutorische Transformationen 4. Ordnung vom Geschlecht 0, bei denen jeder Ebene eine Steinersche Fläche entspricht, bestimmte Montesano, *Lomb. Ist. Rend.* (2) **30**, 563 (1897).

Noch andere involutorische Transformationen findet man behandelt bei Sturm, *D. Lehre v. d. geom. Verw. IV,* Leipzig 1909, S. 401 ff. Eine ziemlich allgemeine involutorische Transformation vom Geschlecht n und der Ordnung $2n+1$ untersuchte Montesano, *Giorn. di Mat.* **31**, 36 (1893). Die involutorischen Transformationen, bei denen die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen linearen Strahlenkomplex bilden, bestimmte Montesano, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **4**, 207, 277 (1888).

§ 6. Allgemeine quadratische Transformationen.

Die birationalen Transformationen bilden nur einen besonderen Fall der allgemeinen rationalen Transformationen, bei denen wieder

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

wird, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ ganze homogene Funktionen einer Ord-

nung n von y_1, y_2, y_3, y_4 bezeichnen, aber y_1, y_2, y_3, y_4 nicht notwendigerweise umgekehrt rationalen Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 proportional werden. Eine solche Transformation ist im allgemeinen nur nach der einen Seite eindeutig.

Der nächstliegende besondere Fall solcher Transformationen ist der Fall der allgemeinen *quadratischen Transformationen* ($n=2$). Wir erhalten dann im Raume (y) ein F_2-Gebüsch, das den Ebenen des Raumes (x) zugeordnet ist. Den Geraden des Raumes (x) entsprechen Raumkurven R_4 4. Ordnung 1. Art im Raume (y), jedem Punkte (x) sind im allgemeinen acht assoziierte Punkte (y) zugeordnet, jedem Punkte (y) aber nur ein Punkt (x). Irgend drei Gruppen assoziierter Punkte (y) liegen auf einer F_2 des Gebüschs.

Fallen zwei Punkte (y) aus einer Gruppe assoziierter Punkte in einem Punkte zusammen, so bildet dieser die Spitze eines Kegels, der dem F_2-Gebüsch angehört. Diese Punkte (y) liegen auf der *Kernfläche* K_4 4. Ordnung (Jacobischen Fläche) des F_2-Gebüschs und die ihnen entsprechenden Punkte (x) auf einer Fläche 4. Klasse Φ_4. Im allgemeinen sind in dem F_2-Gebüsch zehn Ebenenpaare enthalten. Ihre Doppelgeraden liegen auf K_4 und ihnen entsprechen zehn singuläre Berührungsebenen von Φ_4, welche längs Kegelschnitten berühren.

Nennt man *Hauptstrahlen* die Verbindungslinien von irgend zwei assoziierten Punkten (y), so ergibt sich, daß im allgemeinen ein Hauptstrahl unendlich viele solche Paare assoziierter Punkte enthält, die eine Involution bilden. Die Doppelpunkte dieser Involution sind zwei konjugierte Punkte P, P' der Kernfläche. Dem Hauptstrahl s' entspricht im Raume (x) wieder eine gerade Linie s, welche die Fläche doppelt berührt, und die Strahlen s, die man so erhält, bilden eine Strahlenkongruenz 28. Ordnung 2. Klasse, deren Brennfläche Φ_4 ist.

Durch jeden Hauptstrahl s' gehen die Flächen eines Büschels im F_2-Gebüsch, die Grundkurve dieses Büschels besteht aus s' und einer kubischen Raumkurve, welche s' in zwei Punkten Q, Q' schneidet. Diese Punkte Q, Q' liegen auf der Kernfläche und bilden mit P, P' zusammen deren sämtliche vier Schnittpunkte mit s'.

Einer allgemeinen Geraden g des Raumes (y) entspricht im Raume (x) ein Kegelschnitt r. Diese Kegelschnitte berühren in vier Punkten, nämlich in den Punkten, die den Schnittpunkten von g mit K_4 entsprechen. Die Ebene des Kegelschnitts k entspricht der einzigen Fläche des F_2-Gebüschs, die durch g geht.

Einer allgemeinen Ebene π des Raumes (y) entspricht eine

Fläche S_4 4. Ordnung im Raume (x), den Geraden der Ebene entsprechen die Kegelschnitte, die auf S_4 liegen. Die Fläche S_4 ist von der 3. Klasse, weil die Ebene von drei Flächen des F_2-Gebüschs berührt wird, und deshalb eine Steinersche Fläche.

Den drei Doppelgeraden der Fläche S_4 entsprechen drei Hauptstrahlen in π. Die Ecken des von diesen gebildeten Dreiecks sind assoziierte Punkte und entsprechen dem dreifachen Punkte von S. Man sieht so, daß *die von den Hauptstrahlen gebildete Kongruenz von der 3. Klasse ist. Sie ist ferner von der 7. Ordnung,* weil durch jeden Punkt seine sieben Verbindungslinien mit den ihm assoziierten Punkten gehen.

Den vier singulären Berührungsebenen der Steinerschen Fläche entsprechen vier Kegel des F_2-Gebüsches, welche die Ebene π längs einer Seitenlinie berühren. Den Kegelschnitten, welche dem von den vier Berührungslinien gebildeten Vielseit einbeschrieben sind, entsprechen die Haupttangentenkurven der Steinerschen Fläche. Diese sind sonach rationale Raumkurven 4. Ordnung, welche die Berührungskegelschnitte der vier singulären Ebenen berühren.

Die Steinersche Fläche S_4 berührt die Fläche Φ_4 längs einer Raumkurve 8. Ordnung.

Vgl. Reye, *Math. Ann.* **48**, 113 (1896), *Geom. d. Lage III,* 4. Aufl. Leipzig 1910, S. 143ff.

Ein sehr spezieller Fall der ein-achtdeutigen quadratischen Transformation wird durch das Gebüsch der F_2 mit gemeinsamem Poltetraeder gegeben. Die Kernfläche K_4 zerfällt dann in die Seitenflächen dieses Tetraeders, und die Transformation läßt sich, von einer Kollineation abgesehen, in der einfachen Form darstellen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1^2 : y_2^2 : y_3^2 : y_4^2.$$

Vgl. Painvin, *J. f. Math.* **63**, 58 (1864); Veronese, *Rom. Acc. Linc. Mem.* (3) **9**, 265, 306 (1881); Segre, *Giorn. di Mat.* (1) **21**, 355 (1883); Timerding, *Ann. di Mat.* (3) **1**, 95 (1898); Reye, *Geom. d. Lage III.* 4. Aufl. 1910, 233.

Ein bemerkenswerter Fall, in dem die quadratische Transformation ein-vierdeutig wird, ist der, wo das F_2-Gebüsch eine *Basisgerade a* besitzt, durch die alle Flächen gehen. Das Gebüsch enthält dann unendlich viele Ebenenpaare, die Kernfläche wird also eine Regelfläche 4. Grades, von der a eine dreifache Leitlinie bildet. Den Ebenen des Raumes (y) entsprechen kubische Regelflächen

des Raumes (x), den Geraden des Raumes (x) kubische Raumkurven des Raumes (y). Vgl. Rich. Krause, *Diss.* Straßburg 1879; Reye, *Geom. d. Lage III*, 4. Aufl. S. 168ff.

Der interessanteste Sonderfall der mehrdeutigen quadratischen Transformationen ist aber der Fall der ein-zweideutigen Transformation, wo das F_2-Gebüsch durch sechs feste Grundpunkte bestimmt ist. Die Kernfläche wird dann die Weddlesche Fläche W_4, die Fläche Φ_4 ist nicht bloß von der 4. Klasse, sondern auch von der 4. Ordnung. Sie hat 16 singuläre Ebenen, von denen zehn den Ebenenpaaren des F_2-Gebüschs und sechs den Kegeln entsprechen, die aus je einem der Grundpunkte die fünf übrigen projizieren. Die Fläche hat auch 16 Knotenpunkte; einem von diesen, O, entspricht die durch die sechs Grundpunkte des Raumes (y) gelegte kubische Raumkurve γ_3, die 15 anderen lassen sich den 15 Verbindungslinien der sechs Punkte zuordnen. Die 120 Verbindungslinien der Knotenpunkte sind mit den 120 Schnittlinien der singulären Ebenen identisch. Die Fläche ist die bekannte *Kummersche Fläche.*

Lassen wir θ_i, u_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ dieselben Formen bedeuten wie im vorigen Paragraphen, so kann die Transformation dargestellt werden durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta_1 : u_2 y_2 : u_3 y_3 : u_4 y_4.$$

Den Bisekanten von γ_3, auf denen die Punktepaare liegen, die mit den sechs Grundpunkten zusammen jedesmal acht assoziierte Punkte bilden, entsprechen die Strahlen durch den Knotenpunkt O. Dagegen entsprechen den Strahlen der sechs Grundpunkte, die ebenfalls als Hauptstrahlen anzusehen sind, jedesmal die Strahlen einer *Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse* im Raume (x), so daß wir *sechs solche Strahlenkongruenzen erhalten, von denen Φ_4 die Brennfläche ist.* Die Strahlenkongruenz 28. Ordnung 12. Klasse, die wir im allgemeinen Fall fanden, löst sich in diesem Fall auf in 16 Strahlenbündel, deren Mittelpunkte die Knotenpunkte sind, und sechs Strahlenkongruenzen 2. Ordnung 2. Klasse.

Jede solche Strahlenkongruenz ist in einem linearen Strahlenkomplex enthalten. Dem Schnittpunkt zweier Strahlen ist ihre Verbindungsebene in einem Nullsysteme zugeordnet. Aus zwei solchen Nullsystemen geht eine involutorische Kollineation hervor. Man findet so außer der Identität 15 Kollineationen, durch welche die Kummersche Fläche in sich übergeht. Aus dreien der Nullsysteme setzt sich ferner ein Polarsystem und zwar jedesmal das-

selbe wie aus den drei übrigen Nullsystemen zusammen. So ergeben sich außer den sechs Nullsystemen zehn Polarsysteme, also im ganzen 16 Korrelationen, durch welche die Kummersche Fläche in sich übergeführt wird. Diese merkwürdige Gruppe von 16 Kollineationen und 16 Korrelationen fand F. Klein, *Math. Ann.* **2**, 199 (1870). Vgl. Reye, *Journ. f. Math.* **86**, 84, 209 (1879).

Allgemein hat die ein-zweideutigen Raumtransformationen de Paolis, *Rom. Acc. Linc. Mem.* (4) **1**, 576 (1885) behandelt, mit der Erweiterung auf Räume von beliebig vielen Dimensionen. Er bezeichnet als *Ordnung* und *Geschlecht* der Transformation Ordnung und Geschlecht der Kurven, die den geraden Linien des einen Raumes entsprechen. Die Anwendung auf die Kummersche Fläche machte de Paolis: *Rom. Acc. Linc. Rend.* (4) **6**², 3 (1890).

Eine besondere ein-zweideutige Transformation 3. Ordnung, bei der den Ebenen Flächen 3. Ordnung mit drei festen Geraden und vier festen Punkten zugeordnet werden, bedandelte Romano, *Sopra una trasformazione doppia del terzo ordine,* Avola 1906.

Kapitel XXXIX.

Algebraische Liniengeometrie.

Von *Konrad Zindler* in Innsbruck.

Lehrbücher und Monographien:

(In der eckigen Klammer steht die Abkürzung, mit der die folgenden Werke in diesem Kapitel zitiert werden)

1. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement,* Leipzig, I. Abt. 1868, II. Abt. 1869 *[N. G.].*

2. Segre, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche, Torino, mem.* (2) **36** (1-84) *[G. R.].*

3. Sturm, *Liniengeometrie in synth. Behandlung*, 3 Bände, Leipzig, 1892, 1893, 1896 *[L. G.].*

4. Klein, *Einleitung in die höhere Geom.* (Vorlesung Göttingen), 1893 *[H. G.].*

5. Koenigs, *La Géométrie réglée,* Paris, 1895 *[G. R.].*

6. Fano, *Lezioni di Geometria della retta,* Roma 1896 *[G. R.].*

7. Zindler, *Liniengeometrie mit Anwendungen,* Leipzig, I. Band 1902; II. Bd. 1906 *[L. G].*

8. Jessop, *A Treatise on the Line Complex,* Cambridge, 1903 *[L. C.].*

9. Timerding, *Geometrie der Kräfte,* Leipzig, 1908 *[G. K.].*

§ 1. Linienkoordinaten und Stabkoordinaten.

Die tetraedrischen Linienkoordinaten $p_1, \ldots p_6$ wurden schon in Bd. II[1], Kap. VII, § 4 definiert. Für sie ist auch die Bezeichnung mit zwei Indizes

$$\pi_{ik} = x_i y_k - x_k y_i, \quad p_{ik} = u_i v_k - u_k v_i \tag{1}$$

im Gebrauch. Die Größen π_{ik} heißen *Strahlenkoordinaten,* die Größen p_{ik} *Achsenkoordinaten.* Es ist (Bd. II[1], S. 149f.):

$$p_{12} = \tau \pi_{34} \text{ usw.,} \tag{2}$$

wobei τ ein Proportionalitätsfaktor ist. Die Definition der Koor-

dinaten einer Geraden g durch die Inhalte der Tetraeder, die eine Einheitsstrecke auf g mit den Kanten des Grundtetraeders bestimmt (Zeuthen, *Math. Ann.* **1**, 432 (1869)), führt auf einen besonderen Fall der allgemeinen tetraedrischen Koordinaten, der mit den Graßmannschen Koordinaten (Bd. II[1], S. 165) verwandt ist.

Verschwindet eine Linienkoordinate, so schneidet g eine Kante des Grundtetraeders; für diese selbst ist nurmehr eine Koordinate von Null verschieden. Den gemeinsamen Punkt und die gemeinsame Ebene zweier sich schneidenden Geraden hat Cayley aus ihren Koordinaten berechnet (*Papers VII*, S. 66 (1869)).

Setzt man $\varrho = x_4 = y_4 = 1$ in die Definitionsgleichungen der p_ν (Bd. II[1], S. 149) ein, so erhält man bis auf die Bezeichnung dieselben Größen, die schon in Bd. II[1], S. 78 aufgetreten sind, nämlich:

$$p_1 = p, \quad p_2 = q, \quad p_3 = r;$$
$$p_4 = -l, \quad p_5 = -m, \quad p_6 = -n.$$

Wir stellen die Definition dieser *homogenen Linienkoordinaten im Parallelsystem* nochmals in geänderter Bezeichnung zusammen: Wenn (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten zweier Punkte in einem Parallelsystem sind, so definieren wir die Koordinaten q_ν der verbindenden Geraden durch:

$$(3) \qquad \begin{aligned} q_1 &= x_2 - x_1, & q_4 &= y_1 z_2 - y_2 z_1, \\ q_2 &= y_2 - y_1, & q_5 &= z_1 x_2 - z_2 x_1, \\ q_3 &= z_2 - z_1, & q_6 &= x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

Sie genügen der Beziehung

$$(4) \qquad \sum_{1}^{3} q_\nu q_{\nu+3} = 0.$$

Ist das System insbesondere *rechtwinklig*, so heißen die q_ν *rechtwinklige homogene Linienkoordinaten.* Solche werden wir von nun an bei *metrischen* Fragen immer voraussetzen. Die rechtwinkligen *inhomogenen* Linienkoordinaten, die von Plücker verwendet wurden (*N. G.* I, S. 1 (1868)), sind heute mit Recht außer Gebrauch.

Auch die absoluten Beträge der Linienkoordinaten haben eine Bedeutung, die wir nur für den Fall der rechtwinkligen Koordinaten angeben: Die Größen q_ν stellen nicht nur eine Gerade g,

sondern auf ihr auch einen *Linienteil* oder *Stab* (Bd. II[1], S. 165) von der Länge

$$l = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

dar. Je nachdem man also bloß die Verhältnisse oder auch die Größen der q_ν in Betracht zieht, spricht man von den Koordinaten einer Geraden oder eines Stabes.

Sechs beliebige Größen q_ν lassen, auch wenn (4) nicht erfüllt ist, eine *mechanische Deutung* zu: Sie können als Koordinaten einer *Dyname* aufgefaßt werden, und zwar bedeuten q_1, q_2, q_3 die Komponenten desjenigen Kraftstabes, der bei Reduktion der Dyname auf den Ursprung auftritt und q_4, q_5, q_6 die Komponenten des Drehmomentes (Timerding, *G. K.*, S. 87). Ist (4) erfüllt, ohne daß alle drei Größen q_1, q_2, q_3 verschwinden, so reduziert sich die Dyname auf eine Einzelkraft im Endlichen; verschwinden aber q_1, q_2, q_3, so bleibt von der Dyname nur das Drehmoment übrig, das durch ein Ebenenstück von bestimmter Stellung, Größe und bestimmtem Umfahrungssinn, d. h. durch ein *Feld* dargestellt werden kann. Sieht man von der Größe des Feldes ab, so kann man also $q_4 : q_5 : q_6$ als Koordinaten einer bestimmten Stellung, d. h. einer *unendlich fernen Geraden* betrachten. Nun entspricht *jedem* der Beziehung (4) genügenden System von Größen q_ν (wenn nicht alle verschwinden) eine (endliche oder unendlich ferne) Gerade.

Da q_1, q_2, q_3 den Richtungscosinus der Geraden proportional sind, kann man den Cosinus des Winkels ω zweier Stäbe q_ν, q_ν' nach Bd. II[1], S. 76, hinschreiben. Setzt man ferner

$$l'^2 = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2,$$

$$w^2 = (q_2 q_3' - q_3 q_2')^2 + (q_3 q_1' - q_1 q_3')^2 + (q_1 q_2' - q_2 q_1')^2,$$

so ist

(5)
$$\sin\omega = \frac{w}{ll'}$$

Der kürzeste Abstand d der Stäbe ist

(6)
$$d = \frac{\sum_1^6 q_\nu q_{\nu+3}'}{}$$

wobei die Reste der Indizes mod 6 als solche beizubehalten sind (wie auch im folgenden). Unter dem *Moment M* zweier Geraden versteht man das Produkt aus dem Sinus ihres Winkels mit dem kürzesten Abstand. Es ist:

$$(7) \qquad M = \frac{\sum_1 q_\nu q'_{\nu+3}}{l l'}.$$

Über die nötigen Vorzeichen-Festsetzungen bei diesen Formeln vgl. Zindler, *L. G. I*, § 12 und 37. Die Linienkoordinaten des kürzesten Abstands zweier Geraden hat Cayley, *Papers X*, S. 287 (1878) berechnet.

Von den Größen p_ν gelangt man nach Bd. II[1], S. 151 durch eine allgemeine lineare Transformation zu allgemeineren Linienkoordinaten. Die Form

$$(8) \qquad \Omega(p) = \check{\sum} p_\nu p_{\nu+3}$$

geht dabei in eine andere quadratische Form R über. Unter ihnen sind die Kleinschen Koordinaten x_λ ausgezeichnet (Klein, *Math. Ann.* **2**, 203 (1870)), bei denen die Beziehung zwischen den Koordinaten die Form

$$(9) \qquad \sum_1 x_\lambda^2 = 0$$

annimmt. Man erhält solche Koordinaten z. B. durch die Transformation

$$(10) \qquad \begin{aligned} p_1 + p_4 &= x_1, & p_1 - p_4 &= i x_4, \\ p_2 + p_5 &= x_2, & p_2 - p_5 &= i x_5, \\ p_3 + p_6 &= x_3, & p_3 - p_6 &= i x_6, \end{aligned}$$

durch die identisch

$$\Omega(p) = X(x) = \sum_1^6 x_\nu^2$$

wird, wenn wir mit X diesen besonderen Fall der Form R bezeichnen. Die Schnittbedingung zweier Geraden x, y ist hier

$$(11) \qquad \check{\sum} x_\nu y_\nu = 0.$$

Will man jedoch die Form (8) durch eine *reelle* Transformation in lauter Quadrate transformieren, so erhält man stets drei positive und drei negative Glieder (Klein, *H. G. I*, S. 489).

§ 2. Liniengebilde und Stabgebilde.

Von den sechs Koordinaten p_ν einer Geraden sind, da nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen und zwischen ihnen eine Beziehung

$$R(p) = 0 \tag{12}$$

besteht, nur vier als unabhängig zu betrachten, d. h. die Mannigfaltigkeit der Geraden ist eine *vierfache*, wie auch geometrische Überlegungen unmittelbar lehren. Eine von (12) unabhängige homogene Gleichung zwischen Linienkoordinaten stellt also eine dreifache Mannigfaltigkeit von Geraden, einen *Linienkomplex* oder *Komplex* dar; zwei solche Gleichungen, die mit (12) ein System von drei unabhängigen Gleichungen bilden, definieren eine doppelte Mannigfaltigkeit von Geraden, eine *Linienkongruenz* oder *Kongruenz* oder ein *Strahlensystem*, drei solche Gleichungen eine *Regelfläche*, endlich vier Gleichungen eine endliche Zahl von Geraden.

Ein *algebraischer* Komplex C ist durch eine Gleichung der Form

$$F(p_1, \ldots p_6) = 0 \tag{13}$$

definiert, wobei F eine ganze rationale homogene Funktion ihrer Argumente ist und die p tetraedrische (oder rechtwinklige) oder auch Kleinsche oder noch allgemeinere Koordinaten sein können. Wenn F den Grad n hat, so heißt auch C vom n^{ten} Grade. Die Gleichung eines Komplexes kann in verschiedenen Formen geschrieben werden. Ist nämlich M eine beliebige ganze homogene Funktion $n-2^{\text{ten}}$ Grades der Größen p, so stellt

$$F + MR = 0 \tag{14}$$

denselben Komplex dar wie (13) (Clebsch, *Math. Ann.* **2**, 2 (1870)).

Die Strahlen von C, die durch einen festen Punkt gehen, bilden eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, den *Komplexkegel* des Punktes; die Strahlen von C, die in einer Ebene liegen, umhüllen eine Kurve n^{ter} Klasse, die *Komplexkurve* dieser Ebene (Plücker, *N. G. I*, S. 18). Ein allgemeines Strahlenbüschel enthält n Gerade von C. Ausnahmspunkte, deren ganzes Bündel dem Komplexe angehört, heißen nach Reye (*Geom. d. Lage III*, S. 2 (1910)) *Hauptpunkte*; dual: *Hauptebenen*.

Eine Kongruenz heißt *algebraisch*, wenn sie der ganze oder

teilweise Schnitt zweier algebraischen Komplexe ist. Bei einer solchen versteht man unter ihrer *Ordnung* die Zahl ihrer Geraden, die i. A. durch einen Punkt gehen, unter *Klasse* die Zahl ihrer Geraden, die in einer Ebene liegen; unter *Rang* die Zahl, die angibt, wie oft zwei Strahlen der Kongruenz mit derselben Geraden zu einem Strahlbüschel gehören.

Schnittsätze (1 — 3 bei Plücker, *N. G. I,* S. 19f.):

1. Zwei Komplexe von den Graden n_1 und n_2 haben eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse $n_1 n_2$ gemeinsam.

2. Drei Komplexe von den Graden n_1, n_2, n_3 haben eine Regelfläche von der Ordnung $2 n_1 n_2 n_3$ gemeinsam.

3. Vier Komplexe von den Graden $n_1, \dots n_4$ haben $2 n_1 n_2 n_3 n_4$ Gerade gemeinsam.

4. Zwei Kongruenzen von den Ordnungen n_1, n_2 und den Klassen m_1, m_2 haben i. A. nach einem Satz von Halphen $n_1 n_2 + m_1 m_2$ Gerade gemein (Segre, *G. R.*, S. 90).

Die Treffgeraden einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung bilden einen (sehr speziellen) algebraischen Komplex n^{ten} Grades. Auch auf solche Komplexe lassen sich die obigen Schnittsätze anwenden, z. B.: Drei Kurven von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 bestimmen als Leitlinien eine Regelfläche der Ordnung $2 n_1 n_2 n_3$. Es gibt zwei Gerade, die vier gegebene (nicht hyperbolische) Geraden schneiden (Steiner, *Werke, I,* S. 402).

Die Tangenten einer algebraischen Fläche n^{ter} Ordnung bilden einen (sehr speziellen) Komplex, dessen Grad gleich dem Range der Fläche (d. i. der Klasse ihrer ebenen Schnitte), also für allgemeine Flächen $n(n-1)$ ist.

Auf einer Geraden liegen ∞^1 Stäbe; die Mannigfaltigkeit der Stäbe ist also eine *fünffache.* Eine Gleichung zwischen Stabkoordinaten

$$(15) \qquad \Phi(q_1, \dots q_6) = \Phi(q_\nu) = 0,$$

die also i. A. *nicht* homogen sein wird, sondert eine vierfache Mannigfaltigkeit von Stäben, einen *Stabwald* aus. Die drei-, zwei-, einfachen Stabmannigfaltigkeiten, die *Stabkomplexe, Stabkongruenzen*, *Stabflächen* werden beziehungsweise durch zwei, drei, vier Gleichungen zwischen Stabkoordinaten dargestellt. Die Geraden, auf denen die Stäbe liegen, bilden den *Träger* des Stabgebildes. Z. B. hat ein Stabkomplex i. A. einen Linienkomplex als Träger, dagegen ein Stabwald, wenn seine Gleichung nicht homogen ist,

den ganzen Linienraum. Ist durch (15) und $\Psi(q_\nu) = 0$ ein Stabkomplex definiert, so erhält man den Träger desselben, indem man aus den Gleichungen

$$\Phi(tq_\nu) = 0, \quad \Psi(tq_\nu) = 0$$

das t eliminiert (Zindler, *L. G. I,* S. 119f., wo auch die Schnittsätze auf dieses Gebiet übertragen sind).

Die Untersuchung der Liniengebilde und der Stabgebilde bildet den Inhalt der *Liniengeometrie,* die seit Plückers grundlegendem Werke, „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" (Leipzig, I, 1868; *II,* 1869) als besonderer Zweig der Geometrie betrachtet wird. Die wesentlichen Grundgedanken dieses Werkes hat Plücker schon 1865 (*Phil. Trans.* **155**, 725) veröffentlicht.

§ 3. Die linearen Komplexe und die linearen Stabwälder.[1])

a) Der lineare Komplex C habe die Gleichung

$$\check{\sum} a_\nu p_{\nu+3} = 0. \tag{16}$$

Ist die Größe

$$A = \check{\sum} a_\nu a_{\nu+3} \tag{17}$$

(die *Invariante* des Komplexes) gleich Null, so besteht C aus den Trefflinien einer Geraden mit den Koordinaten a_ν; dieser besondere lineare Komplex heißt *speziell* oder *singulär* oder ein *Strahlengebüsch.* Ist A nicht Null, so heißt C ein *Strahlengewinde* oder *Gewinde.*

Die Strahlen eines Gewindes G, die durch einen Punkt gehen oder in einer Ebene liegen, bilden ein Strahlenbüschel. Die Zuordnung, die so zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes bewirkt wird, ist eine spezielle Korrelation, in der entsprechende Punkte und Ebenen inzident sind. Jede Korrelation dieser Art ist involutorisch und heißt ein *Nullsystem* (II[1], S. 124). Umgekehrt ent-

1) Bei den zahlreichen elementaren Sätzen dieses und des folgenden Paragraphen wurde nicht immer eine Stelle angegeben, wo der Beweis zu finden ist. Man ziehe die Lehrbücher zu Rate, die am Eingang des Kapitels angeführt sind.

spricht jedem Nullsystem ein Gewinde. Die Ebene, die einem Punkte im Nullsystem entspricht, heißt *Nullebene* des Punktes; dieser heißt *Nullpunkt* der Ebene. Zwei Geraden, die einander in der Korrelation entsprechen, heißen *reziproke Polaren* des Gewindes G oder zueinander *polar*. Eine Gerade fällt mit ihrer Polaren nur zusammen, wenn sie zu G gehört, und ist sonst windschief zu ihr. Jede Gerade, die zwei reziproke Polaren schneidet, gehört zu G. Alle Strahlen von G, die eine Gerade treffen, schneiden auch ihre Polare. Zwei Paare von Polaren haben hyperbolische Lage. Wenn drei Strahlen einer Regelschar $\mathfrak{R}$ einem Gewinde angehören, so gehören ihm alle Strahlen von $\mathfrak{R}$ an.

Durchmesser von G heißen die Polaren der unendlich fernen Geraden, *Durchmesserebenen* die Nullebenen der unendlich fernen Punkte. Die Durchmesser sind alle zueinander parallel; durch ihren unendlich fernen Punkt gehen alle Durchmesserebenen. *Achse* von G heißt der (einzige) Durchmesser, der auf seiner Polaren senkrecht ist. Der kürzeste Abstand zweier reziproken Polaren schneidet die Achse *senkrecht*.

b) Wählt man zwei reziproke Polaren von G als Gegenkanten des Grundtetraeders, so nimmt die Gleichung von G die Form an:

$$a_{ik} p_{lm} + a_{lm} p_{ik} = 0, \tag{18}$$

wobei i, k, l, m die vier Zahlen 1, 2, 3, 4 in irgendeiner Reihenfolge sind. Wählt man die Achse von G als Z-Achse eines rechtwinkeligen Systems, so wird aus (18):

$$k q_3 + q_6 = 0. \tag{19}$$

Durch Rückgang auf die Punktkoordinaten mittels der Gleichungen (3) erhält man die einfachste Darstellung des Nullsystems

$$k(\zeta - z) + (x\eta - y\xi) = 0, \tag{20}$$

indem dies die Gleichung der Nullebene des Punktes (x, y, z) in den laufenden Koordinaten ξ, η, ζ ist.

Unterwirft man den Gesamtraum einer *Schraubung,* deren Translations- und Rotationsgeschwindigkeit beziehungsweise τ und ω sind, so bilden die Bahnnormalen aller Punkte ein Gewinde, dessen Achse die Schraubungsachse ist; der „*Parameter*“ k des Gewindes, der auch in (19) auftritt, ist:

$$k = \frac{\tau}{\omega}. \tag{21}$$

Jeder der ∞^3 Punkte hat ∞^1 Bahnnormalen. Daß trotzdem nur ∞^3 Gewindestrahlen herauskommen, liegt daran, daß jeder von ihnen für alle seine Punkte Bahnnormale ist. Die Strahlen von G lassen sich als Tangenten von ∞^2 Schraubenlinien anordnen, die entgegengesetzt gewunden sind, wie die zu G gehörige Schraubung. Je nachdem k positiv oder negativ ist, heißt die Schraubung rechts- oder linksgewunden. Durch eine rechtsgewundene Schraubung ist ein *linksgewundenes* Gewinde definiert. Wie jedem Strahlengewinde so eine Schraubung entspricht, so kann ihm vermöge des Dualismus zwischen Kräften und Geschwindigkeiten (Zindler, *L. G. I,* S. 43; Timerding, *G. K.,* Kap. 10) auch eine Dyname zugeordnet werden.

c) Wenn c der kürzeste Abstand eines Gewindestrahles s von der Achse ist und ϑ seine Neigung gegen die Ebenen, die zur Achse senkrecht sind, so ist:

$$c \cot \vartheta = -k. \tag{22}$$

Wenn c_1, ϑ_1; c_2, ϑ_2 für zwei reziproke Polaren g_1, g_2 dieselbe Bedeutung haben, wie c, ϑ für s, so gilt:

$$c_1 \cot \vartheta_2 = c_2 \cot \vartheta_1 = -k. \tag{23}$$

Auch bei allgemeiner Lage gegen das Koordinatensystem sich k berechnen:

$$k = \frac{A}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{24}$$

Die Koordinaten α_i der Achse eines Gewindes sind $(i = 1, 2, 3)$:

$$\alpha_i = a_i, \quad \alpha_{i+3} = a_{i+3} - k a_i. \tag{25}$$

Die Mannigfaltigkeit der linearen Komplexe ist eine *fünffache.* Die Verhältnisse der a_ν in (16) können als Koordinaten eines linearen Komplexes gelten. Ein Gewinde wird durch ∞^{10} Korrelationen in sich selbst übergeführt, ebenso durch ∞^{10} Kollineationen; diese bilden eine kontinuierliche Gruppe, deren Untergruppen Knothe bestimmt hat (*Archiv for Math. og Naturv.* **15,** 97 (1892) = *Diss.* Leipzig 1892).

Parameterdarstellungen des Gewindes von der Form

$$p_\nu = f_\nu(u, v, w) \qquad (\nu = 1, \cdots 6)$$

wobei u, v, w unabhängige Veränderliche sind, finden sich bei Zindler, *L. G. I,* S. 197f. Mit jeder solchen Darstellung ist, in-

dem u, v, w als Punktkoordinaten aufgefaßt werden, eine Abbildung auf den Punktraum verbunden. Die erste Abbildung fand Noether, *Gött. Nachr.* 1869, S. 298.

d) Wir geben eine Übersicht über verschiedene Erzeugungsarten oder Bestimmungsweisen eines Gewindes (von denen 1) und 3) schon besprochen sind); ein Gewinde (das in einigen Fällen auch in ein Strahlengebüsch ausarten kann) ist bestimmt:

1. Durch eine lineare Gleichung zwischen Linienkoordinaten.

2. Durch fünf Strahlen, wenn die Matrix ihrer Koordinaten den Rang 5 hat. Eine lineare Konstruktion des Gewindes aus fünf Strahlen hat Sturm, *L. G. I,* S. 107, angegeben.

3. Durch eine Schraubung.

4. Als Gesamtheit der Achsen, bezüglich deren ein räumliches Kräftesystem das Drehmoment Null hat (Möbius, *Ges. W. III,* Statik § 84 (1837)). So erklären sich die Namen Nullachse, Nullpunkt, Nullebene bei Möbius und Nullsystem bei Staudt, *Geom. d. Lage,* S. 191 (1847).

5. Als Ort der Geraden, die bezüglich zweier festen Geraden ein konstantes Verhältnis der Momente haben (Drach, *Math. Ann.* **2**, 135 (1870)).

6. Als Ort der Wirkungslinien aller Kräfte, die mit fünf Kräften, deren Wirkungslinien gegeben sind, im Gleichgewicht sind. Sollen nämlich auf sechs gegebenen Wirkungslinien Kräfte gefunden werden können, die im Gleichgewicht sind, so müssen die sechs Linien demselben linearen Komplex angehören (während auf sieben Wirkungslinien stets Kräfte im Gleichgewicht gefunden werden können); Sturm, *Ann. di mat.* (2) **7**, 217 (1875).

7. Durch ein räumliches Fünfseit, indem jeder Ecke desselben die Ebene der beiden Nachbarseiten als Nullebene zugeordnet wird, wodurch ein Nullsystem bestimmt ist (Staudt, *Geom. d. Lage,* S. 193 (1847)).

8. Durch zwei projektive Strahlbüschel, die so liegen, daß sie einen Strahl entsprechend gemein haben, ihre Scheitel und Ebenen jedoch getrennt sind. Die Treffgeraden entsprechender Strahlen bilden ein Gewinde. Dies ist die Sylvestersche Erzeugungsweise (*C. R.* **52**, 742 (1861)).

9. Durch eine involutorische Regelschar 2. Ordnung. Die Trefflinien aller Paare der Involution bilden ein Gewinde (Chaslessche Erzeugungsweise, *J. de Math.* (1) **4**, 348 (1839)).

10. Durch zwei projektive windschiefe Punktreihen, indem die

Achsen, aus denen sie durch eine Ebeneninvolution projiziert werden, ein Gewinde bilden, und dual (Caporali und del Pezzo in Caporali, *Mem. di Geom.*, Napoli 1888, S. 275; Fano, *G. R.* S. 37).

11. Durch zwei Paare reziproker Polaren (in hyperbolischer Lage), weil dadurch eine involutorische Regelschar bestimmt ist (vgl. 9), oder spezieller: Durch ein Polarenpaar und einen Strahl, oder noch spezieller:

12. Durch die Achse und einen Strahl; dadurch ist auch k in Gleichung (22) bestimmt.

13. Durch eine nicht involutorische räumliche Korrelation, indem einem Punkte P sowohl als Punkt des einen wie des anderen Systems je eine Ebene, also die Schnittlinie s und das Strahlbüschel (P, s) entspricht (Fano, *G. R.*, S. 37).

14. Indem man eine Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides zuerst um ihre Haupterzeugende h dreht, dann das so erhaltene Rotationsnetz (§ 4) um eine Gerade dreht, die im Scheitel des Paraboloides auf h senkrecht steht (Zindler, *Math. Ver.* **4**, 99 (1894), oder *L. G. I*, S. 196).

15. Durch eine Raumkurve 3. Ordnung, indem die Zuordnung zwischen ihren Punkten und den zugehörigen Schmiegungsebenen einem Nullsystem angehört (Chasles, *C. R.* **45**, 195 (1857); Sturm, *Geom. Verwandtsch. III*, S. 108 (1909)).

e) Wenn neben (16) ein zweiter linearer Komplex

$$\check{\sum} b_\nu p_{\nu+3} = 0$$

gegeben ist, so ist

$$J = \check{\sum} a_\nu b_{\nu+3} \tag{26}$$

eine *simultane Invariante* der beiden Komplexe. Wenn sie verschwindet, sagt man (Klein, *Gött. Nachr.* 1869, S. 260 oder *H. G. I*, S. 181), die Komplexe seien *involutorisch* oder in Involution. Die geometrische Bedeutung dieser Lage ist für den Fall zweier Gewinde die folgende: Dreht man eine Ebene um einen gemeinsamen Strahl s beider Gewinde, so beschreiben die beiden Nullpunkte auf s zwei involutorische Punktreihen (und dual entsprechend). Von zwei involutorischen Gewinden wird jedes durch das Nullsystem des anderen in sich selbst übergeführt.

Wenn die beiden Komplexe die Parameter k und k' haben,

wenn ferner ihre Achsen den Winkel ψ bilden und den kürzesten Abstand d haben, so ist J proportional dem *Moment* M der beiden Komplexe:

$$M = (k + k') \cos \psi - d \sin \psi. \tag{27}$$

Dieses hat nach Klein, *Math. Ann.* **4**, 413 (1871) folgende mechanische Bedeutung: Ordnet man dem einen Komplex eine Dyname D, dem anderen eine Schraubung S zu (vgl. *b*), so ist M proportional der Arbeit der Dyname D bei der Schraubung S (Genaueres bei Zindler, *L. G. I*, S. 159). Sind also die Komplexe involutorisch, so verschwindet M; dann ist ein Körper, dessen Beweglichkeit auf S beschränkt ist, unter dem Einfluß von D im Gleichgewicht.

Mit der Theorie des Nullsystems lassen sich die reziproken Figuren der graphischen Statik in Zusammenhang bringen (Timerding, *Theorie der Kräftepläne*, Leipzig 1910).

Das Nullsystem entdeckten unabhängig voneinander: Giorgini, *Modena Mem.* **20**, 243 (1828); Möbius, *J. f. Math.* **10**, 317 (1833) oder *Ges. W. I*, S. 439 (s. auch *Statik* (1837), *Ges. W. III*, S. 118) und Chasles, *C. R.* **45**, 195 (1857); **51**, 855, 905 (1860); **52**, 77, 189, 487 (1861). Die ersten beiden wurden durch mechanische, der letztere durch kinematische Studien darauf geführt. Die zahlreichen Sätze, die Chasles ohne Beweis mitteilte, wurden von Brisse, *J. de Math.* (2) **15**, 281 (1870); **19**, 221 (1874); (3) **1**, 141 (1875) und Schoenflies, *Geom. der Bewegung*, Leipzig 1886, bewiesen.

Jede lineare Stabgleichung läßt sich durch Änderung des Koordinatensystems auf die Form

$$\alpha_0 + \alpha_3 q_3 + \alpha_6 q_6 = 0 \tag{28}$$

bringen. Wenn alle drei Koeffizienten α von Null verschieden sind, so bedeutet sie die Gesamtheit der Stäbe aller Paare, durch die eine Dyname dargestellt werden kann (Zindler, *L. G. I*, S. 140f., wo auch die besonderen Fälle besprochen sind). Ein Satz von Chasles besagt, daß alle Tetraeder, die durch diese Paare bestimmt sind, gleichen Inhalt haben (Möbius, *Statik* (1837), *Ges. W. III*, S. 102; Timerding, *G. K.*, S. 98).

§ 4. Die Strahlennetze.

Ein Strahlensystem 1. Ordnung und 1. Klasse (§ 2) heißt ein *Strahlennetz* oder *Netz*. Es kann als Schnitt zweier linearen

Komplexe erhalten werden. Jedes Strahlennetz besteht aus allen Trefflinien zweier Geraden (der *Brennlinien*). Je nachdem diese reell windschief sind oder imaginär oder zusammenfallen oder sich schneiden, heißt das Strahlennetz *hyperbolisch, elliptisch, parabolisch* oder *singulär*.

Im letzten Fall besteht es aus einem Strahlenbündel und einem Strahlenfeld, deren Träger inzident sind; die Brennlinien werden innerhalb eines Strahlenbüschels unbestimmt. Der Fall des parabolischen Netzes kann so veranschaulicht werden: Man nehme eine Gerade als Brennlinie an, setze ferner eine Punktreihe P auf ihr und ein Ebenenbüschel ε um sie in projektive Beziehung. Dann besteht das parabolische Netz aus der Gesamtheit der Strahlenbüschel (P, ε). Unter den hyperbolischen Netzen sind die *rechtwinkligen* ausgezeichnet, deren Brennlinien sich rechtwinklig kreuzen, unter den elliptischen die *Rotationsnetze,* die durch Umdrehung einer Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides um seine Haupterzeugende entstehen. Durch eine spezielle affine Deformation (Dehnung) der Rotationsnetze entstehen die allgemeinen elliptischen Netze. An Stelle der Rotationshyperboloide, die bei der eben angegebenen Erzeugung des Rotationsnetzes entstehen, treten jetzt allgemeine Hyperboloide. Die erste Angabe, wie ein elliptisches Netz wirklich aussieht (Modelle kommen hier als nicht allgemein zugänglich nicht in Betracht, vgl. den *Dyckschen Katalog math. Modelle,* S. 280f., München 1892), scheint sich bei Klein, *Vorl. über nichteuklid. Geom. II,* S. 33 (1893) zu finden, eine Abbildung desselben bei Zindler, *L. G. I,* S. 175, ebenda S. 177f. auch Parameterdarstellungen für alle Strahlennetze. Die elliptischen Netze dienen zur Deutung der allgemeinen imaginären Geraden, indem sie das reelle Substrat derselben bilden (Klein, *Math. Ann.* **23**, 545). Die imaginären Brennlinien der Rotationsnetze sind diejenigen Geraden, die den imaginären Kugelkreis treffen.

Die hyperbolischen und die elliptischen Netze hängen von acht, die parabolischen von sieben Parametern ab; von ihnen kommen sechs auf die Lage im Raume. Von dieser abgesehen, hängen also die allgemeinen Netze von zwei Parametern ab, die man so wählen kann, daß der eine die Größe, der andere die Form bestimmt. Dagegen sind diejenigen parabolischen Netze, deren Brennlinien im Endlichen liegen, alle einander ähnlich oder symmetrisch-ähnlich. Ein Strahlennetz ist durch vier Strahlen bestimmt, wenn die Matrix ihrer Koordinaten den Rang vier hat.

Zwei Ebenen, die durch eine Gerade eines nicht singulären Strahlennetzes gehen, werden von ihm in zwei kollinearen Feldern

geschnitten. Umgekehrt erzeugen zwei kollineare Felder dann ein Strahlennetz, wenn sie ihre Schnittlinie *entsprechend* gemein haben. Insbesondere erzeugen also zwei parallele *affine* Felder ein Strahlennetz, und jedes nicht singuläre Netz kann auf mannigfache Art so erzeugt werden. Wenn man die affinen Felder in der Richtung einer gemeinsamen Normalen zusammenschiebt, so daß sie in dieselbe Ebene fallen, so bilden ihre Doppelelemente im Hauptfall ein eigentliches Dreieck, von dem eine Seite ins Unendliche fällt; dem einzigen im Endlichen liegenden (und stets reellen) Eckpunkt des Dreiecks entspricht der *Hauptstrahl* des Netzes, der also auf beiden Feldern senkrecht steht. Für ein hyperbolisches Netz, dessen beide Brennlinien im Endlichen liegen, ist der kürzeste Abstand derselben der Hauptstrahl, für ein Rotationsnetz die gemeinsame Rotationsachse der Umdrehungshyperboloide, aus denen es besteht. Hyperbolische Netze, deren eine Brennlinie im Unendlichen liegt, haben keinen Hauptstrahl.

Fällt man von einem Punkte auf die Strahlen eines Netzes Lote, so ist der geometrische Ort der Fußpunkte nach Borgmeyer (*Diss.* Münster 1893) eine Fläche 3. Ordnung.

Die selbstentsprechenden Strahlen einer gescharten[1]) räumlichen Kollineation (II^1, S. 123) bilden ein Strahlennetz.

Wenn fünf Kräfte im Gleichgewicht sind, so gehören ihre Wirkungslinien demselben Strahlennetz an (Sturm, *Ann. di Mat.* (2) **7**, 217 (1875)); analog: Wenn vier Kräfte im Gleichgewicht sind, haben ihre Träger hyperbolische Lage (Möbius, *Statik* (1837), *Werke III*, S. 141). Die Punkte eines Körpers, der eine Bewegungsfreiheit 2. Grades hat, können sich im allgemeinen auf Flächen bewegen. Die Normalen dieser Flächen, die man in allen Punkten des Körpers gleichzeitig errichtet, bilden ein Strahlennetz (Schönemann, *Berl. Monatsber.* 1855, S. 255 oder *J. f. Math.* **90**, 44 (1881)).

§ 5. Die Systeme linearer Komplexe.

a) Es seien

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \ldots C_n = 0 \quad (n \leqq 6)$$

die Gleichungen von n linearen Komplexen. Diese seien voneinander unabhängig, d. h. die Matrix ihrer Koeffizienten soll den

1) Eine biaxiale Homologie (Kollineation) heißt auch *gescharte* Kollineation.

Rang n haben. Dann ist die Gesamtheit der Komplexe, die aus ihnen *linear abgeleitet* werden können, d. h. bei beliebiger Wahl der Größen λ durch eine Gleichung

$$\sum \lambda_\nu C_\nu = 0 \tag{29}$$

dargestellt werden, ein *„lineares System“* von Komplexen, und zwar heißt ein solches für $n = 2, 3, 4, 5$ der Reihe nach *Komplexbüschel, -netz* (oder -bündel), *-gebüsch, -gewebe;* für $n = 6$ erhält man alle linearen Komplexe, den *Komplexraum.* Das System (29) ist *„n-stufig“* oder $n - 1$*-dimensional.* Die Verhältnisse der λ können als homogene Koordinaten des einzelnen Komplexes innerhalb des Systems aufgefaßt werden. Dieses ist durch je n unabhängige seiner Komplexe ebenso bestimmt wie durch die ursprünglichen.

b) Ein Komplexbüschel $\mathfrak{B}$ enthält im allgemeinen zwei Strahlengebüsche; sie bestimmen dasjenige Strahlennetz, das die allen Komplexen von $\mathfrak{B}$ gemeinsamen Strahlen enthält und *Träger* von $\mathfrak{B}$ heißt. Die Achsen aller Komplexe von $\mathfrak{B}$ bilden eine Regelfläche, die *Achsenfläche* von $\mathfrak{B}$. Trägt man auf jeder Achse den Parameter des betreffenden Komplexes als Stab auf, so erhält man die Achsenfläche als *Stabfläche* (in anderer Form schon bei Plücker, *N. G. I,* S. 98). Die Achsenfläche ist im allgemeinen Falle eine Regelfläche 3. Ordnung (über die besonderen Fälle vgl. Zindler, *L. G. I,* S. 285), bei der die Kuspidallinien reell sind, die doppelte Leitlinie im Endlichen, die einfache im Unendlichen und zur doppelten senkrecht liegt. Diese Fläche heißt *Zylindroid*; ihre Gleichung kann geschrieben werden:

$$z(x^2 + y^2) = 2hxy \tag{30}$$

und entsteht auch durch Elimination der Parameter r und ϑ aus

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = h\sin 2\vartheta. \tag{31}$$

Schneidet man also das Zylindroid mit dem Zylinder $x^2 + y^2 = 4h^2$ und wickelt diesen in eine Ebene ab, so erhält man zwei Wellen einer gewöhnlichen Sinuslinie. Hiernach kann man sich eine anschauliche Vorstellung des Zylindroids bilden; weitere Sätze über dasselbe findet man bei Timerding, *G. K.* Kap. XIII. Es spielt in der Kinematik und in der Mechanik bei der Zusammensetzung von Schraubungen und von Dynamen eine große Rolle.

c) Die gemeinsamen Strahlen aller Komplexe eines Komplex-

netzes $\mathfrak{N}$ bilden im allgemeinen eine Regelschar $\mathfrak{R}$ eines Hyperboloides, die reell oder imaginär sein kann. Die Achsen der in $\mathfrak{N}$ enthaltenen Strahlengebüsche bilden die Leitschar von $\mathfrak{R}$. Die Achsen aller Komplexe von $\mathfrak{N}$ bilden die *Achsenkongruenz* 3. Ordnung und 2. Klasse von $\mathfrak{N}$. Dieselbe ist auch das System der kürzesten Abstände zwischen je zwei Strahlen einer Regelschar (Waelsch, *Wien. Ber.* **95**, 781 (1887); Timerding, *G. K.*, Kap. 14). Wenn jedoch die Regelschar $\mathfrak{R}$ ein schiefes Paraboloid ist, so ist die Achsenkongruenz bloß von der 2. Ordnung und Klasse (Zindler, *L. G. I*, S. 334 und 342); über weitere Ausartungen s. die am Schlusse des Paragraphen genannten Werke.

d) Die Achsen der singulären Komplexe eines Komplexgebüsches $\mathfrak{G}$ bilden ein Strahlennetz. Dessen Brennlinien sind diejenigen Strahlen, die allen Komplexen von $\mathfrak{G}$ gemeinsam sind. Die Achsen der Komplexe von $\mathfrak{G}$ bilden einen *quadratischen* Komplex (Zindler, *L. G. I*, S. 328), dessen singuläre Fläche (§ 7) in ein Zylindroid und die unendlich ferne Ebene zerfällt.

e) Die Komplexe eines Komplexgewebes $\mathfrak{W}$ haben im allgemeinen keinen Strahl gemeinsam. Die Achsen der Strahlengebüsche von $\mathfrak{W}$ bilden einen linearen Komplex; die Achsen aller Komplexe von $\mathfrak{W}$ bilden, wenn man sie wie unter b) als Stäbe auffaßt, einen Stabwald *vierten* Grades (Zindler, *L. G. I*, S. 325).

f) Die Bedingung

$$\sum a_\nu b_{\nu+3} = 0 \tag{32}$$

der Involution zweier linearen Komplexe ist bilinear. Sind also n Komplexe $C_1, \ldots C_n$ zu einem festen C_0 in Involution, so ist es auch jeder, der aus $C_1, \ldots C_n$ linear abgeleitet werden kann. Alle Komplexe, die zu einem involutorisch liegen, bilden ein Komplexgewebe; alle, die zu zweien, also einem Büschel, involutorisch liegen, bilden ein Komplexgebüsch usw. Zwei lineare Systeme von linearen Komplexen von der Eigenschaft, daß jeder Komplex des einen Systems zu jedem des andern involutorisch ist, heißen einander *ergänzend*. Die Stufenzahlen zweier solchen Systeme haben die Summe sechs (Klein, *H. G. I*, S. 187). Die Achsen der Strahlengebüsche eines linearen Systems sind identisch mit den gemeinsamen Strahlen des ergänzenden Systems (Koenigs, *G. R.*, S. 47).

Die linearen Komplexe lassen sich auf die Kegelschnitte einer Ebene abbilden (Segre, *Torino Acc. Atti* **20**, 487 (1885)). Zwei oder mehrere gleichstufige lineare Systeme linearer Komplexe lassen sich projektiv aufeinander beziehen und erzeugen dadurch Linien-

gebilde, nämlich die Gesamtheit der Geraden, die entsprechenden Komplexen gemein sind. Eine Übersicht über die wichtigsten Fälle hat Fano, *G. R.*, S. 53 gegeben.

Über *metrische* Begriffsbildungen im Komplexraum (Distanz, Winkel) vgl. D'Ovidio, *Rom. Acc. L. Atti* (2) **3**, 260 (1876); Segre, *Torino Atti* **19**, 159 (1884); Koenigs, *G. R.*, S. 41. Die Methoden der Ausdehnungslehre hat E. Müller, *Monatsh. f. M.* **2**, 267 (1891) auf dieses Gebiet angewendet.

Die linearen Systeme linearer Komplexe erfahren außer in den unter 3), 5), 7), 8), 9) am Anfang des Kapitels genannten Werken eine systematische Behandlung in R. St. Ball, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge 1900 und E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903; vgl. auch den Artikel von Timerding in der *Enzykl. der math. Wiss. IV*, **1** (1902).

§ 6. Die Methode von Klein.

Die Beziehung zwischen den Linienkoordinaten kann in verschiedenen Formen auftreten, z. B. (4), (9). Wesentlich ist nur, daß die quadratische Form auf der linken Seite dieser Gleichung

$$R = 0 \tag{33}$$

eine von Null verschiedene Determinante hat. Die sechs Koeffizienten, die in der Gleichung eines linearen Komplexes auftreten, können auch als homogene Koordinaten eines „Elementes" des Komplexraumes aufgefaßt werden, das wir statt als Komplex ebensogut als Punkt eines fünfdimensionalen Raumes S_5 benennen und vorstellen dürfen (vgl. die „logischen Bemerkungen" über mehrdimensionale Geometrie bei Zindler, *L. G. I*, S. 313). Den speziellen linearen Komplexen, also den geraden Linien, entsprechen dann solche Punkte, deren Koordinaten der Gleichung (33) genügen, daher auf einer vierdimensionalen Überfläche von S_5 oder einer Quadrik R_4^2 von S_5 liegen, wobei wir durch untere Marken die Dimensionen, durch obere die Ordnungen bezeichnen. Gebilde, die aus Geraden bestehen, liegen ganz auf dieser Quadrik, die auch Fundamentalfläche des S_5 heißt. So kann die Liniengeometrie als Geometrie einer *vierdimensionalen quadratischen Mannigfaltigkeit* (ohne singulären Punkt) *in einem fünfdimensionalen Raum* betrachtet werden. Diese Auffassung wurde von Klein (*Math. Ann.* **5**, 261 (1872)) angegeben und (außer von ihm selbst) namentlich von Segre in zwei Abhandlungen

„Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni“ und „Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche“ in *Torino mem.* (2) **36** (1884) in weitem Umfang durchgeführt. Sie hat den Vorteil, daß die Vorstellungen und Methoden der mehrdimensionalen Geometrie sofort auf diesen Fall übertragen werden können. Z. B. ordnen sich die Schnitt- und Verbindungsgesetze, die für die linearen Systeme von Komplexen gelten, den entsprechenden Sätzen des S_5 unter, die, wie für jede lineare Mannigfaltigkeit, aus den Eigenschaften der Systeme linearer Gleichungen folgen. Einem Komplexbüschel entspricht eine Gerade des S_5, die mit R_4^2 zwei Punkte gemein hat; also enthält das Komplexbüschel zwei Strahlengebüsche (§ 5, b). Einem Komplexnetz entspricht eine M_2^1, ihrem Schnitt mit R_4^2 die in § 5, c) erwähnte Leitschar von $\mathfrak{R}$ usw.

Bei Benützung der angedeuteten Methode werden gewöhnlich Kleinsche Koordinaten verwendet, d. h. der Gleichung der Fundamentalfläche wird die Form

$$(34) \qquad \sum_1 x_\nu^2 = 0$$

gegeben. Die Bedingung der Involution zweier linearen Komplexe lautet dann:

$$(35) \qquad \sum^6 a_\nu b_\nu = 0,$$

wobei ein linearer Komplex mit den Koordinaten a_ν durch eine Gleichung der Form

$$(36) \qquad \sum_1^6 a_\nu x_\nu \quad 0$$

gegeben ist und durch den Punkt (a_ν) auf S_5 abgebildet wird. Die Gleichung (36) kann aber auch als Gleichung der Polarebene von (a_ν) bezüglich R gedeutet werden, und die Strahlen x_ν des linearen Komplexes sind das Schnittgebilde von (36) und (34), sind also eine M_3^2 in S_5. Nennen wir daher, wie im gewöhnlichen Raum, zwei Punkte (a_ν) und (x_ν) bezüglich R konjugiert, wenn jeder auf der Polarebene des anderen liegt, so entsprechen zwei involutorischen Komplexen (a_ν) und (x_ν) zwei konjugierte Punkte im S_5. Ist insbesondere (x_ν) speziell, so sieht man, daß diejenigen Strahlengebüsche zu (a_ν) involutorisch sind, deren Träger zu (a_ν) gehören.

Die linearen Komplexe

$$0, \qquad (\nu = 1, \cdots 6) \tag{37}$$

die „*Fundamentalkomplexe*“, sind zu je zweien involutorisch und können alle reell sein, obgleich die Kleinschen Koordinaten mit den tetraedrischen durch keine reelle Transformation zusammenhängen. Man erhält z. B. ein System reeller Fundamentalkomplexe, wenn man die linken Seiten der Gleichungen (10) Null setzt. Zur Figur von sechs Fundamentalkomplexen und ihren verbindenden linearen Systemen sind die Polartetraeder einer Fläche 2. Ordnung unseres Raumes analog.

Sechs Gewinde, die zu je zweien involutorisch liegen, heißen nach Ball auch *koreziprok*. Das einfachste Beispiel solcher Gewinde, nämlich sechs „*kanonische*“ Gewinde, erhält man, wenn man jede Achse eines rechtwinkligen Systems zur Achse zweier Gewinde mit entgegengesetzt gleichen Parametern macht (Ball, *Theory of Screws*, S. 38 (1900)).

Die sechs Fundamentalkomplexe bestimmen zu zweien 15 Strahlennetze, somit 15 Paare von Brennlinien, die eine Konfiguration bilden. Ferner entsprechen einer Ebene E in den Fundamentalkomplexen sechs Nullpunkte, die auf einer Linie 2. Ordnung liegen. Jedem dieser Nullpunkte entsprechen wieder außer E noch fünf weitere Nullebenen usw. Im ganzen erhält man aber so nur 16 Ebenen und 16 Punkte, die eine Konfiguration derselben Art bilden (Klein, *Math. Ann.* **2**, 212 (1870) und Koenigs, *G. R.*, S. 100), wie die singulären Elemente einer Kummerschen Fläche (Kap. XXXV, § 2).

Wenn ein quadratischer Komplex Q durch

$$F(x_1, \ldots x_6) = 0 \tag{38}$$

gegeben ist, so entspricht ihm in S_5 der Schnitt von (38) mit (34), also eine M_3^4. Die Untersuchung von Q kommt so darauf hinaus, den Schnitt zweier quadratischen Gebilde zu studieren. Analog ist in unserem Raume das Problem, die Schnitte zweier Flächen 2. Ordnung samt allen ihren Ausartungen zu untersuchen (Clebsch und Lindemann, *Vorl. üb. Geom. II*, **1** (1891), Kap. 9 und 10). Z. B.: Wie es hier im allgemeinsten Falle im Flächenbüschel 2. Ordnung vier Kegelflächen gibt, deren Scheitel die Ecken des gemeinsamen Polartetraeders aller Flächen des Büschels sind (Kap. XXVIII, S. 621), so gibt es dort im Büschel

$$F - \lambda R = 0, \tag{39}$$

wenn dessen Determinante für sechs getrennte Werte λ verschwindet, sechs Quadriken mit je einem singulären Punkt, der bei passender Wahl der Koordinaten das Bild eines Fundamentalkomplexes ist, so daß man für F die vereinfachte Form voraussetzen kann:

(40) $$F = \sum a_\nu x_\nu.$$

Zwei algebraische Gleichungen in Punktkoordinaten können, auch wenn beide irreduzibel sind, doch ein zerfallendes Gebilde darstellen. Z. B. kann der Schnitt zweier Flächen 2. Ordnung aus einer gemeinsamen Erzeugenden und einer Kurve 3. Ordnung bestehen; um diese rein darzustellen, muß man eine dritte Fläche 2. Ordnung, d. h. im ganzen drei Gleichungen zu Hilfe nehmen. Analog haben wir in der Liniengeometrie außer der Komplexgleichung (13) immer die Beziehung (33). Beide definieren einen Schnitt M_3^{2n}. Aber dieser kann hier immer durch eine einzige Gleichung, die außer (33) hinzutritt, *rein* dargestellt werden (Klein, *Math. Ann.* **22**, 234 (1883)). Analog kann jede algebraische Kongruenz eines Strahlengewindes als vollständiger Schnitt desselben mit einem anderen algebraischen Komplex erhalten werden (Fano, *G. R.*, S. 59).

§ 7. Allgemeine Theorie der algebraischen Komplexe.

a) Die algebraischen Komplexe n^{ten} Grades hängen von

$$\tfrac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3)-1$$

(die quadratischen von 19) Konstanten ab. Die Gleichung eines solchen sei

(41) $$F(p_1, \dots p_6) = \Phi_1(x_1, \dots x_6) = 0,$$

wobei die p Plückersche und die x Kleinsche Koordinaten sein sollen. Die Symbole F_ν und Φ_ν mögen partielle Ableitungen nach p_ν bzw. x_ν bedeuten. Ein Komplexstrahl heißt *singulär* oder *regulär*, je nachdem für ihn

(42) $$F_1 F_4 + F_2 F_5 + F_3 F_6 = 0$$

ist oder nicht (Plücker, *N. G.*, S. 296). Für Kleinsche Koordinaten heißt das Kennzeichen der singulären Strahlen (Klein, *Math. Ann.* **5**, 286 (1872)):

(43) $$\sum^{6} \Phi_{\nu}$$

b) Wir setzen jetzt $n > 1$ voraus. Ein Punkt, dessen Komplexkegel eine Singularität (einen Doppelstrahl, Rückkehrstrahl, mehrfachen Strahl) hat, heißt ein *singulärer Punkt*; eine Ebene, deren Komplexkurve als Strahlengebilde eine Singularität (eine Doppeltangente, Wendetangente, mehrfache Tangente) hat, heißt eine *singuläre Ebene*. Auf einem regulären Komplexstrahl p liegt kein solcher singulärer Punkt, für dessen Komplexkegel der singuläre Strahl nach p fiele (und dual entsprechend). Mit anderen Worten: Die Komplexkegel aller Punkte von p haben längs p eine einzige bestimmte Berührungsebene.

Bewegt sich ein Punkt P längs eines regulären Komplexstrahles p, so dreht sich die Berührungsebene ε, die der Komplexkegel von P längs p hat, um p. Das Ebenenbüschel ε ist zur Punktreihe P projektiv. Dual: Der Komplexkurve in ε ist auf p ein Berührungspunkt zugeordnet. Diese Zuordnung ist dieselbe wie früher und heißt *Hauptkorrelation* des Strahles p. Ihre analytische Darstellung findet man bei Zindler (*L. G. II,* S. 147).

c) Für einen singulären Komplexstrahl s lassen sich die Werte der F_{ν} als Koordinaten einer Geraden s' deuten. Je nachdem s' von s verschieden ist oder nicht, heißt s ein *gewöhnlicher* oder *mehrfacher (höherer)* singulärer Strahl. Im ersten Fall haben s und s' einen s *zugeordneten* singulären Punkt S gemein und liegen in einer singulären, s *zugeordneten* Ebene σ; S ist der einzige Punkt auf s, dessen Komplexkegel einen solchen singulären Strahl hat, der gerade nach s fällt (und dual). Allen Punkten von s (außer S) ist σ als Berührungsebene ihrer Komplexkegel längs s zugeordnet, und allen Ebenen durch s (außer σ) ist S als Berührungspunkt ihrer Komplexkurven zugeordnet.

Ein höherer singulärer Strahl ist für den Komplexkegel jedes seiner Punkte singulär (und dual). Der gewöhnliche Fall der höheren singulären Strahlen sind die *Doppelstrahlen*; sie sind zugleich Doppelstrahlen der Komplexkegel ihrer allgemeinen Punkte. Ein Komplex hat nur in besonderen Fällen höhere singuläre Strahlen.

Ein Komplex, dessen sämtliche Strahlen singulär sind, heißt *singulär* und besteht entweder aus den Tangenten einer Fläche oder den Trefflininen einer Kurve (Voss, *Gött. Nachr.* 1875, 101; Klein, *Math. Ann.* 5. 287 (1872)). Von diesen Fällen abgesehen bilden die singulären Strahlen eines Komplexes als Schnitt von

(41) und (42) eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse $2n(n-1)$, die „*Singularitätenkongruenz*".

d) Der Ort der singulären Punkte eines Komplexes ist mit dem Umhüllungsgebilde der singulären Ebenen identisch (für quadratische Komplexe bei Plücker, *N. G.* S. 315, allgemein bei Pasch, *Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen,* S. 9 (1870) und genauer *J. f. Math.* **76**, 156 (1873)); jener Ort heißt *Singularitätenfläche* (Klein, *Math. Ann.* **2**, 214 (1870)) oder *singuläre Fläche* (Voß, *Gött. Nachr.* 1873, S. 546); diese Fläche hat die Ordnung und Klasse $2n(n-1)^2$ und ist der eine Mantel der Brennfläche (vgl. das Kap. über differentielle Liniengeometrie) der Singularitätenkongruenz; der andere Mantel heißt *akzessorische Fläche* (Voß, *Math. Ann.* **9**, 89 (1876)). Die beiden Brennpunkte auf s (die Berührungspunkte mit den beiden Mänteln der Brennfläche) sind harmonisch getrennt durch die beiden Berührungspunkte, die s als Doppeltangente der Komplexkurve in σ hat (und dual).

e) Die Strahlen eines Komplexes, die eine Gerade g treffen, lassen sich sowohl nach den ∞^1 Komplexkurven der Ebenen des Büschels g als auch nach den ∞^1 Komplexkegeln der Punkte der Reihe g anordnen. Der Ort jener Komplexkurven (die Eingehüllte jener Kegel) heißt die *Komplexfläche* $\mathfrak{H}$ von g. Diese ist von der Ordnung und Klasse $2n(n-1)$ und hat g als $n(n-1)$-fache Linie (Plücker, *N. G.*, S. 203). Die Ebenen des Büschels g heißen *Meridianebenen* von $\mathfrak{H}$, ihre Komplexkurven *Meridiankurven* von $\mathfrak{H}$. Wenn g unendlich fern ist, heißt $\mathfrak{H}$ eine *Äquatorialfläche,* und die Meridiankurven heißen *Breitenkurven* (Plücker, *N. G.*, S. 161).

f) Schreibt man zur Abkürzung $F(p)$ statt $F(p_1, \ldots, p_6)$ und entwickelt $F(p+\lambda q)$ nach Potenzen von λ, so erhält man

$$F(p) + \lambda \sum F_i q_i + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \sum F_{ik} q_i q_k + \cdots,$$

wobei in die partiellen Ableitungen F_i, $F_{ik} \ldots$ die Koordinaten von p einzusetzen sind. Setzt man hierin den Koeffizienten von λ^m der Null gleich, so erhält man einen Komplex m^{ten} Grades in den laufenden Koordinaten q, einen m^{ten} *Polarkomplex* von p (Voss, *Math. Ann.* **9**, 61 (1876)); andere Autoren nennen ihn einen $(n-m)^{\text{ten}}$ Polarkomplex, vgl. Pasch (*J. f. Math.* **76**, 163 (1873)). Insbesondere ist also ein erster Polarkomplex:

$$\sum F_i q_i = 0. \tag{44}$$

Wegen der Unbestimmtheit der Komplexgleichung (14) gibt es

unendlich viele m^{te} Polarkomplexe von p, die aber alle in den Treffgeraden von p übereinstimmen. Ein linearer Polarkomplex (44) bestimmt um p die Hauptkorrelation des ursprünglichen Komplexes $\mathfrak{C}$ und ist geeignet, die Umgebung von p in $\mathfrak{C}$ analog angenähert darzustellen, wie etwa eine Berührungsebene einer Fläche diese in der Umgebung des Berührungspunktes darstellt. Deshalb heißen die Komplexe (44) auch *Tangentialkomplexe.* Sie bilden ein Komplexbüschel mit einem parabolischen Netz als Träger (Plücker, *N. G.*, S. 295).

g) Man kann die Funktion F in (41) symbolisch als n^{te} Potenz einer linearen Form schreiben:

$$(45)\quad \sum a_{ikl}\ldots p_i p_k p_l \ldots = \left(\sum a_\nu p_\nu\right), \qquad (i, k, l \cdots = 1, \cdots 6)$$

wenn man nach Ausrechnung der Potenz jedes Produkt $a_i a_k a_l \ldots$ durch den entsprechenden Koeffizienten $a_{ikl}\ldots$ ersetzt. Es fragt sich, ob man bei dieser symbolischen Darstellung von F die Koeffizienten a_ν der linearen Form als Koordinaten einer Geraden, d. h. der Beziehung

$$(46)\qquad \sum a_\nu a_{\nu+3} = 0$$

unterworfen auffassen darf. Nun hat eine solche symbolische Gleichung (45) allerdings keine arithmetische Bedeutung, und man kann überhaupt nicht von bestimmten numerischen Werten der a_ν sprechen. Dennoch hat die Frage einen guten Sinn: Aus (46) kann man durch Multiplikation mit einer ganzen homogenen Funktion $(n-2)^{ten}$ Grades der a_ν Relationen n^{ten} Grades und dann nach der Ersatzregel lineare Relationen zwischen den $a_{ikl}\ldots$ ableiten. Es handelt sich also darum, ob durch geeignete Wahl von M in (14) die Gleichung des Komplexes so geschrieben werden kann, daß alle diese Relationen erfüllt sind. Dies ist von Clebsch (*Math. Ann.* **2**, 1 (1870)) durch eindeutige Herstellung seiner *Normalform* bejahend beantwortet worden. Er hat sie zur Ableitung mehrerer Sätze über Komplexe beliebigen Grades benützt (*Math. Ann.* **5**, 435 (1872)), z. B.: Die Punkte, deren Komplexkegel von einer festen Geraden in einem Punktsystem geschnitten werden, für welches eine Invariante k^{ten} Grades verschwindet, bilden eine Fläche der Ordnung kn, die jene Gerade als $\frac{kn}{2}$-fache Gerade enthält. Für $n = 4$ erhält man: Die Punkte, deren Komplexkegel von einer festen Geraden in vier harmonischen Punkten geschnit-

ten werden, bilden eine Fläche 12. Ordnung, die jene Gerade zur sechsfachen Geraden hat.

Die symbolischen Methoden von Aronhold und Clebsch sind (außer von letzterem selbst) von Waelsch (*Wiener Ber.* **98**, II, 1528 (1889) oder *Math. Ann.* **37**, 141 (1890)) und von Weitzenböck (*Komplex-Symbolik*, Samml. Schubert, **57**, Leipzig (1908)) ins Gebiet der Liniengeometrie übertragen worden. Das letztgenannte Werk entwickelt auch die analogen Theorien in Räumen beliebiger Dimension.

h) Auf einer Geraden p eines Komplexes n^{ten} Grades liegen im allgemeinen vier Punkte, für deren Kegel p ein Wendestrahl ist, und durch p gehen vier Ebenen, für deren Kurven p eine Spitzentangente ist. Das Doppelverhältnis jenes Punktwurfes ist gleich dem Doppelverhältnis dieses Ebenenwurfes, s. Voß, Über Komplexe und Kongruenzen, *Math. Ann.* **9**, 63 (1875); in dieser Abhandlung findet man noch viele andere Ergebnisse in algebraisch-abzählender Richtung, z. B.: Die Kongruenz der Komplexgeraden, für die das Doppelverhältnis der vier Wendeebenen äquianharmonisch oder harmonisch ist, hat die Ordnung und Klasse $2n(3n-4)$ bzw. $3n(3n-4)$. In ähnlicher Richtung liegt die Dissertation Mohrmanns (München, 1907), der auch die Theorie der konsingulären Komplexe (§ 8, d) auf Komplexe beliebigen Grades überträgt und die möglichen Typen von Komplexkurven ermittelt.

Den Kalkül der abzählenden Geometrie hat Schubert (*Math. Ann.* **12**, 202 (1877)) auf die Theorie der Komplexe angewendet, z. B.: Den 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung sind die 1280 Strahlenbüschel eines Komplexes 4. Grades analog. Einige besondere kubische Komplexe hat Perazzo untersucht (*Torino Atti*, **36**, 891 (1901), *Torino, Mem.* (2) **59**, 109 (1909)).

Amaldi bestimmt die Komplexe, die eine mindestens dreigliedrige kontinuierliche Gruppe von Kollineationen gestatten (*Rend. Circ. Mat.* **23**, 227 (1907)).[1])

§ 8. Die quadratischen Komplexe, besonders der Gattung 1.

a) Sei $\mathfrak{C}$ ein quadratischer Komplex. Dreht sich eine Ebene ε um eine Gerade g, so beschreibt der Pol von g bezüglich der Kom-

1) Über die Differentialgeometrie der Komplexe s. das Kapitel über differentielle Liniengeometrie.

plexkurve von ε eine Gerade g', die *Polare* von g (Plücker, *N. G. I*, S. 167 und 171); sie ist zu g windschief oder fällt mit g zusammen, je nachdem g nicht zu $\mathfrak{C}$ gehört oder ein regulärer Strahl von $\mathfrak{C}$ ist; für die singulären Strahlen von $\mathfrak{C}$ wird g' unbestimmt. In g' schneiden sich auch die Polarebenen von g bezüglich aller Komplexkegel, deren Scheitel auf g liegen. Die Polare von g' fällt im allgemeinen nicht mit g zusammen. Eine gegebene Gerade gehört zu *neun* anderen als Polare (Stahl, *J. f. Math.* **93**, 215 (1882)). Der Ort der Spitzen der Komplexkegel, bezüglich deren zwei Punkte konjugiert sind, ist eine durch diese Punkte gehende Fläche 2. Grades (Battaglini, *Giorn. di Mat.* **6**, 239 (1868); Sturm, *L. G. III*, S. 2).

Die Charakteristiken (im Sinne der abzählenden Geometrie) des Systems der ∞^3 ebenen Komplexkurven findet man bei Sturm, *L. G. III*, S. 22.

Wenn

$$\sum a_{ik}\, x_i x_k = 0 \tag{47}$$

die Gleichung von $\mathfrak{C}$ in Kleinschen Koordinaten ist, so heiße $\mathfrak{C}$ *von der Gattung 1*, wenn unter den sechs Wurzeln λ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{26} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{62} & \cdots & a_{66}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{48}$$

deren linke Seite die Determinante Δ von (39) ist, keine gleichen vorkommen.[1])

Dann kann die Gleichung (47) durch Koordinatenänderung auf die Form

$$\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0 \tag{49}$$

gebracht werden oder in Plückerschen Koordinaten auf mehrfache Art auf die Form (Jessop, *L. C.*, S. 189 und 97):

1) Diese Komplexe werden häufig „allgemein" genannt, was gewisse Übelstände mit sich bringt; z. B. müßten diejenigen harmonischen Komplexe (§ 10), die von der größtmöglichen Parameterzahl abhängen, dann zugleich (als von der Gattung 1) allgemein und (als von bloß 17 Konstanten abhängig) speziell genannt werden.

$$(50)\qquad \begin{aligned} &m_1(p_1^2+p_4^2)+m_2(p_2^2+p_5^2)+m_3(p_3^2+p_6^2)\\ &\quad+2(n_1p_1p_4+n_2p_2p_5+n_3p_3p_6)=0. \end{aligned}$$

b) Wir setzen jetzt der Einfachheit halber voraus, 𝔈 sei von der Gattung 1, obgleich manches Folgende (z. B. die Definition der singulären Strahlen verschiedener Ordnung und der Absatz über die Durchmesser) für beliebige Komplexe gilt.

Nach § 7 ist die singuläre Fläche 𝔖 von der 4. Ordnung und Klasse, ebenso die Singularitätenkongruenz 𝔎 und die Komplexfläche 𝔋 einer Geraden g; diese ist Doppellinie von 𝔋. Es ist 𝔖 eine Kummersche Fläche (Kap. XXXV, § 2).

Die Schnittpunkte $A_1, \ldots A_4$ einer Geraden g mit 𝔖 und die Berührungsebenen $\beta_1, \ldots \beta_4$ durch g an 𝔖 haben gleiches Doppelverhältnis (Klein, *Math. Ann.* 7, 208 (1874)). Der allgemeine Fall ist der, daß g kein Komplexstrahl ist und die vier Punkte A getrennt sind. Dann zerfällt für jeden von ihnen der Komplexkegel in zwei Ebenen α_i, α_i', und die Komplexkurven der Ebenen β zerfallen in je zwei Strahlbüschel mit den Scheiteln B_i, B_i'. Die acht Punkte B, B' und die acht Ebenen α, α' bilden eine Konfiguration 8_4. Die ersteren sind Knotenpunkte der Komplexfläche 𝔋 von g (Jessop, *L. C.*, S. 91 und 106). Die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte B, B' und die Schnittlinien je zweier entsprechenden Ebenen α, α' liegen ganz auf 𝔋 und sind singuläre Strahlen von 𝔈. Diese acht Geraden schneiden auch die Polare g' von g; 𝔋 ist durch g, g' und drei passende Knotenpunkte bestimmt (Plücker, *N. G.*, S. 215).

Diese Sätze erfahren Abänderungen, wenn g ein Komplexstrahl ist; namentlich fallen dann vier von den Knotenpunkten in die Punkte A_i und dual (Plücker, *N. G.*, Art 229). Weitere Besonderheiten ergeben sich, wenn g die singuläre Fläche 𝔖 berührt, mehrfach berührt usw. (7 Fälle; s. Klein im letzten Abschnitt von Plückers *N. G.*).

c) Ein singulärer Strahl s von 𝔈 erfüllt neben (49) die Gleichung:

$$(51)\qquad \sum k_i^2 x_i^2 = 0.$$

Er berührt die singuläre Fläche 𝔖 in einem Punkt A, der nach § 7, c) dem Strahl s zugeordnet ist. Wenn die beiden anderen Schnittpunkte A_1, A_2, die s mit 𝔖 gemein hat, von A getrennt sind, heißt s ein singulärer Strahl 1. Ordnung. Wenn β die Berührungsebene von 𝔖 in A ist, sind (A_1, β) und (A_2, β) die beiden

Strahlbüschel, in welche die Komplexkurve von β zerfällt; wenn β_3, β_4 die Berührungsebenen sind, die sich außer β durch s an $\mathfrak{S}$ legen lassen, sind (A, β_3), (A, β_4) die beiden Strahlbüschel, in die der Komplexkegel von A zerfällt (Jessop, *L. C.*, S. 91; Segre, *G. R.*, Art. 136).

Wenn das Büschel (A, β) aus Komplexstrahlen besteht, heißt s ein singulärer Strahl 2. Ordnung (Segre, *G. R.*, Art. 137); dann muß von den beiden Punkten A_1, A_2 noch einer nach A rücken, und s ist eine Haupttangente von $\mathfrak{S}$, während seine Koordinaten auch noch die Gleichung

$$(52) \qquad \sum k_i^3$$

erfüllen. Die singulären Geraden 2. Ordnung bilden eine Regelfläche 16. Ordnung und Klasse (Klein, *Math. Ann.* **2**, 223 (1870)).

Wenn alle Strahlen des Büschels (A, β) singuläre Komplexstrahlen sind, heißt s eine singuläre Gerade 3. Ordnung; ihre Koordinaten erfüllen außer (51) und (52) noch die Gleichung:

$$(53) \qquad \sum k_i^4 x_i^2 = 0.$$

Dann rücken entweder alle vier Schnittpunkte A oder alle vier Berührungsebenen β zusammen, und zwar im ersten Fall in einen Knotenpunkt von $\mathfrak{S}$, im zweiten Fall in eine singuläre Ebene von $\mathfrak{S}$ (die $\mathfrak{S}$ längs eines Kegelschnittes berührt). Es gibt 32 singuläre Strahlen 3. Ordnung (Klein, *Math. Ann.* **2**, 224). Wenn die Komplexkurve einer Ebene δ sich auf ein doppeltes Strahlbüschel reduziert, heißt δ eine *Doppelebene* von $\mathfrak{C}$. Dual zerfällt der Komplexkegel eines *Doppelpunktes* in zwei zusammenfallende Ebenen; aber diese Ebene ist doch im allgemeinen keine Doppelebene von $\mathfrak{C}$ (Plücker, *N. G.*, S. 308). Die einzigen Doppelpunkte von $\mathfrak{C}$ sind die 16 Knotenpunkte von $\mathfrak{S}$ (durch sie geht die Komplexfläche einer beliebigen Geraden); die einzigen Doppelebenen von $\mathfrak{C}$ sind die 16 singulären Ebenen von $\mathfrak{S}$.

Eine beliebige Ebene ε schneidet $\mathfrak{S}$ in einer Kurve, welche die Komplexkurve von ε überall berührt, wo sie dieselbe trifft. Die gemeinsamen Tangenten sind die in ε gelegenen singulären Strahlen von $\mathfrak{C}$; und dual (Plücker, *N. G.*, S. 313).

Ein quadratischer Komplex der Gattung 1 ist durch seine singuläre Fläche $\mathfrak{S}$ und einen Strahl vierdeutig bestimmt, jedoch eindeutig, wenn der Strahl singulär ist (Klein, *Math. Ann.* **2**, 218f.).

Es gibt sechs lineare Komplexe, durch deren Nullsystem (als Korrelation) $\mathfrak{C}$ in sich selbst abgebildet wird; sie heißen *Fundamentalkomplexe* (Klein, *Math. Ann.* **2**, 203 (1870)), sind bei (49) durch $x_i = 0$ dargestellt (§ 6), müssen aber nicht alle reell sein.

d) Alle Komplexe

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{k_i + \lambda} = 0, \tag{54}$$

wobei λ ein willkürlicher Parameter ist, haben mit (49) die singuläre Fläche gemein (Klein, *Math. Ann.* **2**, 218 (1870)) und heißen deshalb *konsingulär*. In der Tat ist die Konstantenzahl 18 der Kummerschen Fläche um 1 geringer als die des quadratischen Komplexes. Daß auch (49) der Schar (54) angehört, erkennt man, wenn man (54) in der Form

$$\sum \left(\frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{k_i + \lambda}\right) x_i^2 = \sum \frac{k_i + \mu}{k_i + \lambda} x_i^2 = 0$$

schreibt. Multipliziert man nun mit λ und geht zu $\lambda = \infty$ über, so ergibt sich der ursprüngliche Komplex. Auch die doppelt zu zählenden Fundamentalkomplexe sind in der Schar enthalten. Die Singularitätenkongruenz ist die Grenzlage des Schnittes von $\mathfrak{C}$ mit einem Nachbarkomplex der Schar.

e) Die Polare einer unendlich fernen Geraden, die $\mathfrak{C}$ nicht angehört, heißt ein *Durchmesser* von $\mathfrak{C}$. Wenn die unendlich ferne Ebene einen nicht zerfallenden Kegelschnitt von $\mathfrak{C}$ enthält, so lassen sich die Durchmesser so zu dreien anordnen, daß jeder von diesen demjenigen Parallelebenenbüschel zugeordnet ist, das durch die beiden anderen bestimmt ist. Drei solche *zugeordnete Durchmesser* sind im allgemeinen windschief zueinander, aber dreien konjugierten Durchmessern einer gewissen Fläche 2. Ordnung, der *Richtfläche* parallel (Plücker, *N. G.*, S. 230). Ein Tripel zugeordneter Durchmesser bestimmt ein *Zentralspat* von $\mathfrak{C}$, indem durch jeden Durchmesser die Ebenen gelegt werden, die zu einem der anderen parallel sind. Alle Zentralspate haben denselben Mittelpunkt, der auch *Mittelpunkt* des Komplexes heißt. Den Achsen der Richtfläche entspricht ein Tripel zueinander senkrechter zugeordneter Durchmesser, die *Achsen* des Komplexes. Ferner gibt es ein Tripel, dessen drei Durchmesser sich (im Mittelpunkte) schneiden. Wenn man die Beziehung zwischen der unendlich fernen Ebene und dem Mittelpunkt von $\mathfrak{C}$ projektiv auf eine beliebige Ebene (mit eigentlicher Komplexkurve) überträgt, so gelangt man dazu, einer

Ebene einen bestimmten Punkt, den *Pol*, einem Punkte eine *Polarebene* bezüglich $\mathfrak{C}$ zuzuordnen (Plücker, *N. G.*, Art. 324ff.).

Nach dem Verhalten der Richtfläche zur unendlich fernen Ebene unterscheidet Plücker (*N. G.*, S. 264) *hyperboloidische* und *ellipsoidische Komplexe.*

f) Man kann, wenn die Koeffizienten in (49) alle reell und von Null verschieden sind, bezüglich der möglichen Vorzeichen vier wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden. Darnach gibt es (Reye, *J. f. Math.* **98**, 284 (1885)) vier *Arten* der Gattung 1: die *imaginären*, die überhaupt keine reellen Strahlen haben; die *elliptischen*, die mit unendlich vielen linearen Komplexen keine Strahlen gemein haben; die *parabolischen*, die mit jedem linearen Komplex, aber nicht mit jedem Strahlennetz reelle Strahlen gemein haben; die *hyperbolischen*, die mit jedem Strahlennetz unendlich viele reelle Strahlen gemein haben. In anderer Bedeutung verwendet diese Namen Plücker (*N. G.*, S. 287) zur Einteilung der Komplexe ohne bestimmten endlichen Mittelpunkt, d. h. derjenigen Komplexe, deren unendlich ferne Komplexkurve zerfällt.

g) Man kann zwei Bündel B, B' linearer Komplexe korrelativ aufeinander beziehen. Dann entspricht einem Komplex C von B ein Komplexbüschel von B', somit ein Strahlennetz N als dessen Träger; C und N haben eine Regelschar gemein, und der Ort dieser ∞^2 Regelscharen ist ein quadratischer Komplex (Schur, *Math. Ann.* **15**, 432 (1879)). Andere synthetische Erzeugungsarten der quadratischen Komplexe findet man bei Montesano (*Napoli, Acc. Rend.* **25**, 192 (1886)) und Sturm (*L. G. III,* S. 135, 190). Bezieht man zwei Büschel linearer Komplexe projektiv aufeinander, so erhält man als Ort der ∞^1 Schnitte entsprechender Komplexe nur besondere quadratische Komplexe (§ 9, e).

Die erste Arbeit über quadratische Komplexe stammt von Battaglini (*Napoli, Acc. Atti* **3**, 1 (1866)), betrifft aber nur gewisse besondere Komplexe (§ 10). Die allgemeine Theorie der quadratischen Komplexe beginnt 1868 mit Plückers *N. G.* und Kleins Dissertation (wiederabgedruckt *Math. Ann.* **23**, 539).

§ 9. Die Gattungen der quadratischen Komplexe.

Die Einteilung der quadratischen Komplexe in Gattungen beruht auf den Eigenschaften der Gleichung (48): wenn diese mehrfache Wurzeln hat, kann für eine solche der Rang von Δ entweder bloß auf fünf oder noch weiter herabsinken.

a) Im ersten Fall bezeichnet man jede $\varkappa$-fache Wurzel durch eine Zahl $\varkappa$ und stellt diese Zahlen in eckigen Klammern nebeneinander. Z. B. bedeutet [3 2 1] den Fall, daß in (48) eine dreifache, eine zweifache und eine einfache Wurzel vorhanden ist, und daß auch für die mehrfachen Wurzeln der Rang von $\varDelta$ nicht unter fünf herabsinkt (für die einfachen ist dies ohnehin unmöglich). Zur Gattung 1 (§ 8, a) gehört hiernach das Symbol [1 1 1 1 1 1]. Solcher Fälle gibt es 11, da sich die Zahl 6 auf 11 verschiedene Arten in Summanden zerlegen läßt.

b) Wir bezeichnen mit $\varDelta'$ die Minoren 5. Ordnung von $\varDelta$, mit $\varDelta''$ die Minoren 4. Ordnung. Wenn nun für eine ν-fache $(\nu > 1)$ Wurzel w von (48) der Rang von $\varDelta$ gerade auf 4 herabsinkt, so ist w noch gemeinsame Wurzel aller Gleichungen $\varDelta' = 0$, und zwar sei sie für alle diese mindestens ν'-fach, aber wenigstens für eine von ihnen gerade ν'-fach. Dann ist, wie die Weierstraßsche Theorie der *Elementarteiler* zeigt (Bd. I, 1, S. 112),

$$\nu > \nu' \quad \text{und} \quad \nu - \nu' \geqq \nu'.$$

Es gehen also sozusagen $\nu - \nu'$ Wurzeln beim Übergang von $\varDelta$ zu den $\varDelta'$ verloren und darauf ν' Wurzeln beim Übergang von den $\varDelta'$ zu den $\varDelta''$. An Stelle der Zahl ν nehmen wir jetzt die Gruppe $(\nu - \nu', \nu')$ in das Symbol eines solchen Falles auf. So bedeutet z. B. [(3 2) 1], daß (48) eine fünffache und eine einfache Wurzel hat, und daß die erstere noch für alle Gleichungen $\varDelta' = 0$ doppelt ist, dagegen nicht alle $\varDelta''$ annulliert.

c) Wenn für w der Rang von $\varDelta$ auf drei herabsinkt, habe ν'' für die $\varDelta''$ dieselbe Bedeutung wie früher ν' für die $\varDelta'$, während ν und ν' ihre Bedeutung beibehalten. Dann setzen wir statt ν die Gruppe $(\nu - \nu', \nu' - \nu'', \nu'')$ in das Symbol ein, und es ist

$$\nu - \nu' \geqq \nu' - \nu'' \geqq \nu''.$$

So bedeutet [(2 1 1) (1 1)], daß (48) eine vierfache und eine doppelte Wurzel hat; die erstere ist noch doppelt für alle $\varDelta' = 0$ und einfach für alle $\varDelta'' = 0$, die letztere ist noch einfach für alle $\varDelta' = 0$.

d) Man kann den Fall betrachten, daß der Rang von $\varDelta$ noch weiter herabsinkt, kommt aber nur auf zerfallende Komplexe. Beschränkt man sich also auf die eigentlichen quadratischen Komplexe, so hat man, um alle möglichen Symbole zu erhalten, aus jedem der 11 Fälle a) neue abzuleiten, indem man jede Zahl $\nu > 1$ auf alle möglichen Arten in zwei oder drei Summanden zerlegt

Nummer	Charakteristik	Konstantenzahl	Doppelgerade des Komplexes	Singuläre Fläche
1	[111111]	19	Keine	Kummersche Fläche
2	[21111]	18	1	4. Ordnung und 4. Klasse mit einer Doppelgeraden. Komplexfläche eines Komplexes der Gattung 1 bezüglich einer beliebigen Geraden,
3	[3111]	17	1	einer Komplexgeraden,
4	[411]	16	1	einer singulären Geraden 1. Ordnung,
5	[51]	15	1	einer singulären Geraden 2. Ordnung.
6	[6]	14	1	3 Ordnung 4. Klasse (oder *dual*); Komplexfläche bezüglich einer singulären Geraden 3. Ordnung.
7	[2211]	17	zwei sich schneidende Gerade	4. Ordnung und Klasse mit zwei Doppelgeraden, die sich schneiden. Komplexfläche des Komplexes der Gattung 1 bezüglich einer Tangente der Kummerschen Fläche. Die Geraden sind . . . . beide doppelt,
8	[321]	16		. . . . eine kuspidal,
9	[33]	15		. . . . beide kuspidal.
10	[42]	15		Cayleysche Fläche 3. Ordnung und 4. Klasse und die durch die Doppelgeraden des Komplexes gehende Ebene (oder *dual*: Steinersche Fläche).
11	[222]	16	Drei in einer Ebene liegende Gerade oder *dual*	
12	[(11) 1111]	17	Zwei windschiefe Gerade.	Regelfläche 4. Ordnung mit zwei doppelten Leitlinien, ohne Doppelerzeugende (Typus XI).
13	[(11) 211]	16	Drei Gerade, von denen eine die beiden anderen windschiefen schneidet.	Dieselbe mit einer Doppelerzeugenden (Typus V).

14	[(11) 31]	15	Ebenso.	Dieselbe mit einer Kuspidalerzeugenden (Typus V).
15	[(11) 22]	15	Vier, von denen drei ein Dreieck bilden, die vierte mit einer Ecke desselben ein Dreikant.	Regelfläche 3. Ordnung mit einer doppelten und einer einfachen Leitlinie und eine durch die letztere gehende Ebene.
16	[(11) 4]	14	Ebenso.	Dieselbe, doch ist die Ebene kuspidal.
17	[(21) 111]	16	Zwei windschiefe Gerade.	Regelfläche 4. Ordnung mit zwei zusammenfallenden Leitlinien (Typus XII).
18	[(21) 21]	15	Drei Gerade, von denen eine die beiden anderen windschiefen schneidet.	Regelfläche 4. Ordnung mit einer Doppelerzeugenden (Typus VI).
19	[(21) 3]	14	Ebenso.	Dieselbe mit einer Kuspidalerzeugenden.
20	[(31) 11]	15*	Ebenso.	Regelfläche 4. Ordnung mit einer dreifachen Geraden, die einfache Leitlinie und doppelte Erzeugende ist (Typus X).
21	[(31) 2]	14	Wie bei 15.	Cayleysche Regelfläche 3. Ordnung und eine Ebene.
22	[(41) 1]	14	Wie bei 18.	Wie bei 20; doch ist die dreifache Gerade auch Kuspidalerzeugende (Typus X).
23	[(51)]	13	Wie bei 15.	Wie bei 21; die Ebene ist Kuspidalebene.
24	[(22) 11]	14	Ein Strahlenbüschel.	Kegel 2. Grades und Kegelschnitt, dessen Ebene E durch die Spitze S des Kegels geht.
25	[(32) 1]	13	Ebenso.	Ebenso; E berührt den Kegel und der Kegelschnitt enthält S.

Nummer	Charakteristik	Konstantenzahl	Doppelgerade des Komplexes	Singuläre Fläche
26	[(22) 2]	13	Ein Strahlenbüschel und eine durch seinen Scheitel gehende Gerade oder *dual*.	Wie bei 24; nur zerfällt der Kegel in zwei Ebenen (oder *dual*).
27	[(42)]	12	Ebenso.	Zwei Ebenen und ein ihren Schnitt berührender Kegelschnitt (oder *dual*).
28	[(33)]	11	Ein Strahlenbüschel *B* und zwei Gerade, von denen die eine in der Ebene von *B* liegt, die andere durch seinen Scheitel geht.	Eine dreifache Ebene und eine zweite Ebene.
29	[(11) (11) 11]	15	Vier Gerade, die ein windschiefes Vierseit bilden.	Zwei Flächen 2. Grades, die sich in einem windschiefen Vierseit schneiden.
30	[(11) (11) 2]	14	Wie bei 29 nebst einer Diagonale.	Eine der Flächen wird zu einem Paar Berührungsebenen an die andere.
31	[(21) (11) 1]	14	Zwei Gegenseiten des Vierseits bei 29 fallen zusammen.	Zwei Flächen 2. Grades, die sich längs einer Geraden berühren und zwei andere gemein haben.
32	[(21) (21)]	13	Zwei sich schneidende Gerade.	Zwei Flächen 2. Grades, die sich längs zweier Geraden berühren.
33	[(22) (11)]	12	Wie bei 28.	Drei Ebenen, von denen die eine doppelt ist.
34	[(31) (11)]	13	Drei Gerade.	Eine Fläche 2. Grades und zwei Ebenen, die sich in einer Geraden der Fläche schneiden.
35	[(11) (11) (11)]	13	Die sechs Kanten eines Tetraeders.	Die vier Ebenen eines Tetraeders.

36	[(111) 111]	14	Eine Regelschar einer Fläche 2. Grades.	Eine doppelte Fläche 2. Grades.
37	[(111) 21]	13	Wie bei 36 nebst einer Leitlinie der Schar.	Ebenso.
38	[(111) 3]	12	Ebenso.	Ebenso.
39	[(211) 11]	13	Die Regelschar zerfällt in zwei Strahlenbüschel.	Zwei Doppelebenen.
40	[(211) 2]	12	Wie bei 39 nebst einer weiteren Geraden.	Ebenso.
41	[(311) 1]	12	Wie bei 39.	Ebenso.
42	[(411)]	11	Ebenso.	Ebenso.
43	[(221) 1]	11	Zwei zusammenfallende Strahlbüschel.	Eine vierfache Ebene.
44	[(321)]	10	Ebenso.	Ebenso.
45	[(222)]	8	Ein Strahlenbündel (oder *dual*).	Als Punktgebilde: Der ganze Raum; als Ebenengebilde: Ein Ebenenbündel. Oder *dual*.
46	[(111) (11) 1]	12	Eine Regelschar 2. Ordnung nebst zwei Leitgeraden.	Eine doppelte Fläche 2. Grades.
47	[(111) (21)]	11	Ebenso; doch fallen die Leitgeraden zusammen.	Ebenso.
48	[(211) (11)]	11	Die Regelschar bei 46 zerfällt in zwei Strahlbüschel.	Zwei Doppelebenen.
49	[(111) (111)]	9	Die beiden Systeme von Erzeugenden einer Fläche 2. Grades.	Eine doppelte Fläche 2. Grades.

und die Summanden, die aus derselben Zahl entspringen, in runde Klammern schließt, oder (was auf dasselbe hinauskommt) man hat auf alle möglichen Arten zwei oder drei Summanden der Fälle a) in runde Klammern zu schließen. Die so erhaltenen Symbole nennt man „*Charakteristiken*“ der quadratischen Komplexe. Daß es zu jeder Charakteristik auch wirklich quadratische Komplexe gibt, erkennt man z. B. aus dem Verfahren von Weiler, *Math. Ann.* **7**, 151 (1874). Indem man die Komplexe mit derselben Charakteristik zur selben Gattung zählt, erhält man 49 *Gattungen* quadratischer Komplexe (s. die Tafel). Zählt man die Gattungen doppelt, deren singuläre Fläche in zwei zueinander dualen Formen auftreten kann (6, 10, 11, 26, 27, 45), so erhält man 55 Spezies.

e) Bei allen Gattungen außer 1 hat der Komplex Doppelgerade, die auch Doppelgerade der singulären Fläche sind. Bei den Gattungen, die aus den Fällen b) und c) entspringen, ist die singuläre Fläche eine Regelfläche, wobei auch alle Flächen 2. Ordnung (von Realitätsfragen abgesehen) als Regelflächen zu betrachten sind. Bei den Gattungen c) ist die singuläre Fläche stets eine doppelte Fläche 2. Ordnung, die selbst wieder ausarten kann. Diese Fälle wurden von Segre, *Math. Ann.* **23**, 235 (1884), besonders untersucht. Die Gattungen unter b) und c) sind durch zwei projektive Büschel linearer Komplexe erzeugbar (§ 8, g). Die Gattungen unter a) haben nur eine endliche Zahl von Fundamentalkomplexen, die übrigen unendlich viele. Ein Komplex der Gattungen a) enthält kein Strahlennetz.

f) Die Gleichheit der Charakteristiken ist eine notwendige Bedingung dafür, daß zwei quadratische Komplexe durch eine projektive (oder korrelative) Transformation ineinander übergeführt werden können, aber nur dann auch eine hinreichende, wenn die Zahl γ der voneinander verschiedenen Wurzeln von (48) höchstens 2 beträgt. Sonst müssen außerdem noch $\gamma - 2$ absolute *Invarianten* übereinstimmen, die sich geometrisch als gewisse Doppelverhältnisse deuten lassen (Segre, *G. R.* Art. 141).

g) Auf die Möglichkeit, die Theorie der Elementarteiler hier anzuwenden, hat zuerst Klein in seiner Dissertation (1868), wieder abgedruckt in *Math. Ann.* **23**, 539, hingewiesen. Die Durchführung wurde von Weiler (*Math. Ann.* **7**, 145 (1874)) und nach anderen Methoden (§ 6) von Segre (*G. R.*) gegeben; die letztere Abhandlung berichtigt zugleich einige Fehler der ersteren. Die Hauptergebnisse samt *kanonischen Gleichungen* für jede Gattung findet man auch bei Jessop, *L. C.*, Chap. XI.

h) *Bemerkungen zur Tafel* (S. 1020ff.): Durch Querstriche

ist die Tafel in sieben Teile zerlegt, die den Klassen A) bis G) in der eben genannten Arbeit Segres (S. 137—153) und bei Sturm (*L. G. III*) entsprechen. Die Numerierung der Gattungen ist im Anschluß an die Reihenfolge bei Segre vollzogen.

Bei Anführung der singulären Fläche wurde mitunter der Kürze halber die Auffassung als Punktgebilde bevorzugt. Die Numerierung der Typen bei den Regelflächen 4. Ordnung bezieht sich auf die Einteilung von Cremona (*Bologna Mem* (2) **8**, 235 (1868) oder Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. Raumes, II,* S. 430—442 (1880) oder Sturm, *L. G. I*, S. 61).

Die Komplexe der Gattung 35 sind die *tetraedralen* (§ 11), die der Gattung 30 heißen Hirstsche und werden durch zwei zueinander korrelative Ebenen erzeugt (Hirst, *Coll. math. in mem. Chelini,* 1881, S. 50; Sturm, *L. G. III,* S. 429). Die Komplexe der Gattung 45 bestehen aus den Tangenten eines Kegels 2. Grades oder den Trefflinien einer Kurve 2. Grades, die der Gattung 49 aus den Tangenten einer Fläche 2. Grades ohne singulären Punkt. Zur Gattung 24 gehören auch die Komplexe, deren Strahlen bezüglich einer festen Geraden ein gegebenes Moment haben (Segre, *J. f. Math.* **97**, 95 (1884)).

§ 10. Die harmonischen (namentlich Battaglinischen) Komplexe.

Ein *harmonischer* Komplex ist als die Gesamtheit der Geraden definiert, die zwei Flächen 2. Grades f_1, f_2 in vier Punkten so schneiden, daß die Schnittpunkte der einen Fläche von denen der anderen harmonisch getrennt sind. Je nach Art und Lage von f_1, f_2 erhält man zahlreiche Arten harmonischer Komplexe, die sich auf 23 Gattungen quadratischer Komplexe (§ 9) verteilen (Segre und Loria, *Math. Ann.* **23**, 213 (1884)).

Wenn f_1, f_2 allgemeine Flächen sind und allgemein zueinander liegen, erhält man die von 17 Konstanten abhängigen Battaglinischen Komplexe, die zur Gattung 1 gehören. Durch alle Geraden eines solchen lassen sich an zwei andere Flächen 2. Grades vier harmonische Berührungsebenen legen (Aschieri, *Giorn. di mat.* **8**, 35 (1868)). Ein Battaglinischer Komplex läßt sich auf unendlich viele Arten so erzeugen. Die Kongruenz seiner singulären Geraden ist sein Schnitt mit dem tetraedralen Komplex (§ 11) derjenigen Geraden, deren Polaren bezüglich f_1 und f_2 sich schneiden.

Paart man die Flächen des Büschels $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ so involutorisch, daß f_1 und f_2 die Doppelelemente werden, so sind die gemeinsamen Tangenten jedes Paares die Geraden des Komplexes. Die singulären Ebenen des Komplexes sind die gemeinsamen Berührungsebenen jedes Paares, und die singulären Geraden verbinden die Berührungspunkte (Segre und Loria, *Math. Ann.* **23**, 234 (1884)).

Die singuläre Fläche eines Battaglinischen Komplexes ist nach Klein, *Math. Ann.* **2**, 223 (1870) ein *Tetraedroid* (Kap. XXXV, § 3). Jedem Tetraedroid als singulärer Fläche entsprechen zwei Battaglinische Komplexe. Die Gleichung eines solchen läßt sich in Plückerschen Koordinaten auf die Form

$$\sum a_\nu p_\nu^2 = 0 \tag{55}$$

bringen. Wenn beide Regelscharen einer Fläche 2. Ordnung in einem quadratischen Komplex enthalten sind, so ist dieser harmonisch (Düker, *Diss.* Rostock 1910).

Ein besonderer Fall ist der Painvinsche Komplex, der aus allen Geraden besteht, von denen aus man an ein Ellipsoid Paare zueinander senkrechter Berührungsebenen legen kann (Painvin, *Nouv. Ann.* (2) **11**, 49, 97, 202, 289, 481, 529 (1872) und *J. de Math.* (2) **19**, 57 (1874); Demoulin, *Bull. Soc. M.* **20**, 122 (1892)). Man erhält diesen Komplex auch, wenn man eine der beiden Flächen 2. Grades, die auf die zweite oben angegebene Art den Komplex erzeugen, in den imaginären Kugelkreis ausarten läßt. Seine singuläre Fläche ist eine Fresnelsche Wellenfläche (Kap. XXXV, § 3).

§ 11. Die tetraedralen oder Reyeschen Komplexe; Kollineationskomplexe.

Ein *tetraedraler Komplex* (Gattung 35 in § 9) ist definiert als Gesamtheit der Geraden, welche die vier Ebenen eines Tetraeders T nach einem festen Doppelverhältnis δ schneiden. Aus denselben Geraden werden die vier Ecken von T durch Ebenen des Doppelverhältnisses δ projiziert. Wählt man T als Grundtetraeder des Koordinatensystems, so heißt die Gleichung des Komplexes in Plückerschen Koordinaten:

$$a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0. \tag{56}$$

In Kleinschen Koordinaten kann der Komplex dargestellt werden durch eine Gleichung

$$(57) \qquad a(x_1^2 + x_2^2) + b(x_3^2 + x_4^2) + c(x_5^2 + x_6^2) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen kann wegen der Beziehung zwischen den Koordinaten ein Glied weggeschafft werden. Die Kanten von T sind Doppelgerade des Komplexes. Die singuläre Fläche zerfällt als Punktfläche in die vier Ebenen von T, als Klassenfläche in die vier Ebenenbündel, deren Scheitel die Ecken von T sind. Aus diesen vier Strahlenfeldern und vier Strahlenbündeln besteht auch die Kongruenz der singulären Geraden.

Einen tetraedralen Komplex $\mathfrak{T}$ erhält man auch als die Gesamtheit der Geraden, welche die Paare entsprechender Strahlen zweier allgemein liegender projektiver Strahlenbüschel treffen, oder wenn man eine Ebene E und ein Strahlenbündel B kollinear aufeinander bezieht und alle Geraden zusammenfaßt, die einen Punkt von E mit den Punkten der ihm in B entsprechenden Geraden verbinden (Sturm, *L. G. I,* S. 339). Man kann $\mathfrak{T}$ auch durch alle Sehnen und Tangenten aller Raumkurven 3. Ordnung definieren, die durch die Ecken von T gehen und eine Gerade von $\mathfrak{T}$ zweimal schneiden. Nimmt man statt dieser eine andere Gerade von $\mathfrak{T}$, so ändern sich die Raumkurven 3. Ordnung, aber nicht $\mathfrak{T}$.

Der *Achsenkomplex* einer Mittelpunktsfläche F 2. Ordnung (Kap. XXVI, § 17) ist ein metrisch ausgezeichneter tetraedraler Komplex, indem nämlich eine Tetraederebene ins Unendliche rückt, die drei anderen in die Symmetrieebenen von F; auf seinen Strahlen werden also Strecken konstanten Verhältnisses durch diese drei Ebenen abgeschnitten. Er ändert sich nicht, wenn man an Stelle von F eine konfokale oder eine konzyklische (koaxiale und ähnliche) Fläche 2. Grades setzt. Er ist zugleich das Normalensystem dieser Flächen und die Gesamtheit der Hauptträgheitsachsen eines starren Körpers (Zindler, *Boltzmannfestschr.* S. 34 (1904)); von hier aus wurde er von Binet (*J. Éc. pol.*, **9**, cah. 16 (1318), gelesen 1811, S. 41) entdeckt. Die mit der Theorie dieses Komplexes zusammenhängende Aufgabe, aus einem Punkte auf eine Fläche 2. Grades die Normalen zu fällen (Kap. XXVI, § 17), scheint auf anderem Wege zuerst Chasles (*Corr. math. et phys. publ. par Quetelet* (3) **3**, 49 (1839)) behandelt zu haben.

Der tetraedrale Komplex wurde zuerst von Reye (*Geom. d. Lage, II,* (1. Aufl. 1868)) untersucht, ferner von Lie (*Gött. Nachr.*

1870, S. 53); Loria (*Torino, Atti,* **19**, 849 (1884)); Sturm (*L. G. I*, S. 333); Aschieri (*Giorn. di mat.* **41**, 261 (1903)) u. a. Eine Geschichte des tetraedralen Komplexes findet sich in Lie und Scheffers, *Geom. der Berührungstransf.* Kap. VIII (Leipzig, 1896). Den Achsenkomplex behandeln (außer einigen der eben genannten Arbeiten) Weiler, *Zeitschr. f. Math.* **28**, 188 (1883)); Machovec (*Prag. Ber.* 1886, S. 501); Huntington (*Ann. of Math.* (2) **2**, 8 (1900)); Timerding (*G. K.*, Kap. 17).

Ein anderer metrisch ausgezeichneter tetraedraler Komplex besteht aus den Geraden, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind (Sturm, *L. G. III*, S. 364). Dagegen bilden die Geraden, deren kürzeste Abstände von zwei festen Geraden ein gegebenes Verhältnis haben, im allgemeinen einen Komplex 4. Grades (Schoute, *Ann. Éc. Pol. Delft,* **3**, 52 (1887)); ebenso die Geraden, auf denen zwei rechtwinklige Ebenen eine Strecke konstanter Länge abschneiden (Turrière, *Nouv. Ann.* (4) **11**, 205 (1911)).

Die tetraedralen Komplexe gehören zu den *Kollineationskomplexen,* die als Gesamtheit der Geraden definiert sind, welche entsprechende Punkte zweier kollinearen Räume verbinden. Wenn diese letzteren nämlich bloß vier getrennte Doppelpunkte haben[1]), so ist der zugehörige Kollineationskomplex identisch mit einem tetraedralen Komplex, der zum Tetraeder der Doppelpunkte gehört. Dadurch werden auch die Fälle leichter der Untersuchung zugänglich, wo zwei oder vier Ecken des Tetraeders imaginär sind. Der tetraedrale Komplex ist auch der Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen jener kollinearen Räume und ist die Gesamtheit der Geraden, die ihre entsprechenden schneiden (Reye, *Geom. d. Lage III*, S. 1). Die Kollineationskomplexe verteilen sich, soweit sie nicht zerfallen, auf die Gattungen 28, 33, 35, 44, 48 (Loria, *Giorn. di mat.* **22**, 1 (1884)). Zur Gattung 33 gehört auch der Komplex der Bahntangenten einer Schraubung (Schoenflies, *Geom. der Bewegung,* Leipzig 1886, S. 109).

---

1) Es gibt (außer den identischen) 13 Gattungen räumlicher Kollineationen. Manche Autoren zählen alle entsprechenden Komplexe als „ausgeartete“ tetraedrale Komplexe diesen zu. Es empfiehlt sich aber in solchen Fällen eine deutliche Trennung in der Terminologie, zumal wenn (wie hier) für den umfassenderen Begriff ein geeignetes Wort zur Verfügung steht.

§ 12. Allgemeine Theorie der algebraischen Strahlenkongruenzen.

Man bezeichnet eine algebraische Kongruenz $\mathfrak{K}$ von der Ordnung n, der Klasse m und dem Range r (§ 2) mit (n, m) oder, wenn auch der Rang ersichtlich sein soll, mit (n, m, r). Wenn ein Strahl d für einen beliebigen seiner Punkte zwei (oder mehr) von den n Strahlen vertritt, die durch diesen Punkt gehen, so heißt (Kummer, *Berl. Abh.* 1866, S. 46) d ein *Doppelstrahl* (oder *mehrfacher* Strahl) von $\mathfrak{K}$. Nennt man p das Geschlecht der Regelfläche $\mathfrak{R}$, in der die Kongruenz (n, m, r) von einem allgemein liegenden linearen Komplex geschnitten wird, so gilt (z. B. Fano, *G. R.*, S. 119), wenn die Kongruenz nicht unendlich viele Doppelstrahlen hat:

$$p = (n-1)(m-1) - r. \tag{58}$$

Man nennt p auch das *Geschlecht* der Kongruenz. Die Ordnung von $\mathfrak{R}$ ist $m + n$. Der lineare Komplex kann auch ein Strahlengebüsch sein, so daß dieselben Zahlen für den Ort der Kongruenzstrahlen gelten, die eine feste Gerade schneiden; diese ist nun n-fache Leitlinie von $\mathfrak{R}$. Wenn n oder m gleich 1 ist, oder wenn $\mathfrak{K}$ in einem linearen Komplex liegt, ist $r = 0$. Für jede Kongruenz eines linearen Komplexes ist $m = n$, ebenso für jede, die der vollständige Schnitt zweier Komplexe ist. Haben diese die Grade n_1, n_2, so hat die Schnittkongruenz den Rang (Schumacher, *Math. Ann.* **37**, 109 (1890)):

$$n_1 n_2 (n_1 - 1)(n_2 - 1).$$

Die Schnittpunkte der in einer Ebene E liegenden m Geraden von $\mathfrak{K}$ bilden, wenn sich E um eine Gerade dreht, eine Kurve der Ordnung

$$\tfrac{1}{2} m(m-1) + r,$$

wenn aber E ein Bündel beschreibt, eine Fläche der Ordnung

$$\tfrac{1}{2} n(n-1) + r = k,$$

für die der Scheitel des Bündels ein k-facher Punkt ist, und dual (Sturm, *L. G. II*, S. 2).

Die Brennfläche (s. das Kap. über differentielle Liniengeometrie, § 4) von $\mathfrak{K}$ ist (Schumacher, *Math. Ann.* **37**, 122 (1890)) von der Ordnung

(59) $$\nu = 2m(n-1) - 2r$$

und von der Klasse

(60) $$\mu = 2n(m-1) - 2r,$$

woraus

(61) $$\nu - \mu = 2(n-m).$$

Für den Fall des vollständigen Schnittes zweier Komplexe von den Graden n_1, n_2 erhält man $n = m = n_1 n_2$; also

(62) $$\nu = \mu = 2n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2).$$

In einer Kongruenz (n, m, r) gibt es eine Regelfläche vom Grade

$$4(nm - r) - 2(n + m),$$

die durch die Strahlen mit vereinigten Brennpunkten und Brennebenen gebildet wird (Sturm, *L. G. II,* S. 12[1]).

Singuläre Punkte und *Ebenen* der Kongruenz werden nach Kummer, *Berl. Abh.* 1866, S. 2 die Punkte und Ebenen genannt, denen unendlich viele Gerade von $\mathfrak{K}$ angehören; die von den letzteren gebildeten Kegel und die von ihnen umhüllten Kurven heißen *singuläre Kegel* und *Kurven* von $\mathfrak{K}$. Ist ein solcher Kegel von der h^{ten} Ordnung, so heißt der singuläre Punkt *vom Grade h;* ist eine solche Kurve von der h^{ten} Klasse, so heißt die singuläre Ebene *vom Grade h.* Zwei singuläre Punkte heißen *verbunden,* wenn ihre Verbindungsgerade der Kongruenz angehört; ebenso heißen dual entsprechend zwei singuläre Ebenen. Die singulären Punkte können entweder (was der allgemeinere Fall ist) in endlicher Zahl vorhanden sein oder ganze Kurven, die *singulären Linien,* erfüllen. Darnach unterscheidet man Kongruenzen ohne singuläre Linien und solche mit singulären Linien.

Wenn durch $z = f(w)$ eine Abhängigkeit zwischen den komplexen Veränderlichen w und z gegeben ist, die in zwei parallelen Ebenen in der üblichen Art geometrisch dargestellt werden, wenn man ferner entsprechende Punkte verbindet, so erhält man eine Strahlenkongruenz. Besondere algebraische Strahlenkongruenzen, die bei dieser Auffassung aus einigen einfachen Funktionen f ent-

1) Der dortigen Bemerkung, daß diese beiden Vorkommnisse getrennt auftreten können, widerspricht die Gleichung 12 im Kapitel über differentielle Liniengeometrie. Im Beispiele Sturms ist der betreffende Strahl als singulär zu betrachten: ein solcher kann auch mehr als zwei Brennpunkte und Brennebenen haben.

springen, hat van Uven (Amsterdam, *Ak. Verh.* **10** (1910)) untersucht.

Mit dem systematischen Studium der algebraischen Kongruenzen (insbesondere der 1. und 2. Ordnung) machte Kummer (*Berl. Abh.* 1866, S. 1) den Anfang. Nach den Methoden des § 6 untersuchte sie Fano (*Ann. di mat.* (2) **21**, 141 (1893)). Über die Differentialgeometrie der Kongruenzen s. das Kapitel über differentielle Liniengeometrie.

§ 13. Nullsysteme höherer Ordnung.

Man kann den Begriff des gewöhnlichen Nullsystems (§ 3) dahin verallgemeinern, daß man unter *Nullsystem* jede (ein- oder mehrdeutige) Verwandtschaft zwischen den Punkten P und den Ebenen ε des Raumes versteht, bei der entsprechende Elemente P, ε stets inzident sind. Ein so gebildetes Büschel (P, ε) heißt ein *Strahlbüschel des Nullsystems*. Einem Punkte mögen α Ebenen durch ihn, einer Ebene mögen β Punkte auf ihr entsprechen; ferner möge eine allgemeine Gerade des Raums γ Strahlbüscheln des Nullsystems angehören. Die Zahlen α, β, γ heißen dann *Charakteristiken* des Nullsystems. Dieses heißt, wenn $\gamma > 0$ ist, ein *höheres* Nullsystem oder ein Nullsystem höherer Ordnung. Die ∞^3 Strahlbüschel eines solchen erfüllen den ganzen Strahlenraum (Sturm, *Math. Ann.* **28**, 277 (1887) und *L. G. I*, S. 78).

Durch eine Strahlenkongruenz, deren Ordnung n und Klasse m größer als 1 sind, ist ein höheres Nullsystem definiert, indem jedem Punkte alle Verbindungsebenen der durch ihn gehenden Kongruenzstrahlen zugeordnet werden und dual. Also ist hier

$$\alpha = \tfrac{1}{2} n (n - 1), \quad \beta = \tfrac{1}{2} m (m - 1), \tag{63}$$

und γ ist der Rang der Kongruenz. Der Ort der Nullpunkte der Ebenen eines Büschels ist eine Kurve von der Ordnung $\beta + \gamma$ (vgl. auch § 12), der Ort der Nullpunkte der Ebenen eines Bündels ist eine Fläche von der Ordnung $\alpha + \gamma$, und dual entsprechend.

Das älteste Beispiel eines höheren Nullsystems gab Cremona (*C. R.* **54**, 604 (1862)). Ein anderes Beispiel ist folgendes: Jeder Ebene wird der Mittelpunkt des Kegelschnittes zugeordnet, den sie aus einer festen Fläche 2. Grades ausschneidet

$$(\alpha = \beta = \gamma = 1).$$

Dieses Nullsystem wurde von Timerding untersucht (*Ann. di*

mat. (3) **2**, 239 (1899)); es gehört zu den quadratischen (d. h. den Punkten einer Geraden entsprechen die Berührungsebenen eines Kegels 2. Ordnung und dual), die auch von Ameseder (*J. f. Math.* **97**, 62 (1884)) behandelt wurden. Ferner führt ein zweifach unendliches System von Raumkurven zu einem Nullsystem, wenn man jedem Punkte P die Schmiegungsebenen zuordnet, welche die durch P gehenden Kurven in P haben (Sturm, *L. G. I*, S. 78f., wo noch andere Beispiele zu finden sind).

§ 14. Kongruenzen erster Ordnung.

Die Kongruenzen 1. Ordnung sind vom Geschlecht und Rang Null und haben keine eigentliche Brennfläche als Ort der Brennpunkte, sondern (außer dem Strahlenbündel) immer wenigstens eine und höchstens zwei singuläre Linien (*Leitkurven*). Wenn eine solche die Ordnung γ_h hat und ihre singulären Punkte vom Grade h sind (§ 12), so gilt (Sturm, *L. G. II*, S. 24):

$$(64)\qquad \sum \gamma_h h(h-1) = m(m-1), \qquad \sum \gamma_h h^2 = m(m+1),$$

worin m die Klasse der Kongruenz ist und die Summen sich über alle singulären Linien erstrecken. Hieraus folgt:

$$(65)\qquad \sum \gamma_h h = 2m.$$

Wenn die Kongruenz 1. Ordnung nur *eine* Leitkurve hat und auf ihren Strahlen die Brennpunkte im allgemeinen verschieden sind, so liegt eine Kongruenz der Sehnen einer gewissen Kurve vor. Der einzige Fall dieser Art ist die Kongruenz der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung ($m = 3$). Wenn die Kongruenz zwei Leitkurven hat, muß die eine von ihnen eine Gerade sein, die andere eine Kurve m^{ter} Ordnung, welche die Gerade in $m-1$ Punkten trifft (Kummer, *Berl. Abh.* 1866, S. 14).

Wenn die beiden Brennpunkte auf jedem Strahl zusammenfallen, hat die Kongruenz eine einzige Brennlinie, die nur eine Gerade g sein kann. Ordnet man die Punkte auf g und die Ebenen durch g einander so zu, daß jedem Punkte m Ebenen, jeder Ebene ε aber nur ein Punkt P entspricht, so erhält man die Kongruenz als Gesamtheit der Strahlenbüschel (P, ε).

Auf analoge Weise erhält man Kongruenzen (n, m) mit vereinigten Brennpunkten auf jedem Strahl. Auch die Brennebenen dieser Kongruenzen liegen vereinigt (Sturm, *L. G. II*, S. 29).

§ 15. Kongruenzen zweiter Ordnung ohne singuläre Linien.

In einer Kongruenz $(2, m)$ ohne singuläre Linien können keine singulären Ebenen höheren als 1. Grades (§ 12) und keine singulären Punkte höheren als $m - 1^{\text{ten}}$ Grades vorkommen; die Klasse kann 7 nicht übersteigen, der Rang ist $m - 2$, das Geschlecht 1. Die Brennfläche ist 4. Ordnung, $2m^{\text{ter}}$ Klasse und 12. Ranges. Jeder singuläre Punkt ist Doppelpunkt der Brennfläche; wenn er 1. Grades ist, so ist er Scheitel eines Büschels von Kongruenzstrahlen, dessen Ebene eine singuläre Ebene ist; in dieser gibt es außerdem noch $m - 2$ Kongruenzstrahlen, *Transversalen*, die stets zwei singuläre Punkte verbinden.

Wenn α_h die Zahl der singulären Punkte S_h vom h^{ten} Grade bezeichnet, so gelten die folgenden Gleichungen, die teils von Kummer, teils von Masoni (*Napoli, Acc. Rend.* **22**, 145 (1883)) gefunden wurden:

$$(66) \qquad \begin{aligned} \sum \alpha_h &= 18 - m, & \sum h^2 \alpha_h &= 2m(m+2), \\ \sum h\,\alpha_h &= 4(m+2), & \sum h^3 \alpha_h &= (m+2)^2(m-1). \end{aligned}$$

Eine allgemeine Kongruenz $(2, m)$ ohne singuläre Linien hat $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ Doppelstrahlen (§ 12), und durch jeden singulären Punkt S_h $(h > 2)$ gehen $\frac{1}{2}(h-1)(h-2)$ von ihnen (durch die S_1 und S_2 keine), welche Doppelerzeugende des von S_h ausgehenden Kegels sind; dieser hat also das Geschlecht Null. Außer diesen stets vorhandenen *notwendigen* Doppelstrahlen können in besonderen Fällen noch *mögliche* Doppelstrahlen auftreten, z. B. schon bei der (2, 2) bis zu vier. Diese sind Doppelgerade der Brennfläche, während die notwendigen Doppelstrahlen nicht auf ihr liegen, mit einer Ausnahme, auf die Fano (*Torino Mem.* (2) **50**, 1 (1901), Art. 15, Anm.) aufmerksam machte.

Jede singuläre Ebene enthält sechs auf einem Kegelschnitt liegende singuläre Punkte, und jeder von einem S_2 ausgehende singuläre Kegel enthält neun singuläre Punkte, die auf einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art liegen, welche einen Doppelpunkt in der Kegelspitze hat. Jeder notwendige Doppelstrahl enthält zwei singuläre Punkte; die Summe ihrer Gradzahlen ist $m + 2$. Zwei singuläre Punkte sind stets verbunden (§ 12), wenn ihre Gradzahlen beide größer als zwei sind.

Man unterscheidet zwei Arten von Kongruenzen $(2, m)$ ohne singuläre Linien: solche, die nur singuläre Punkte vom 1., 2., 3.

und $(m-1)^{\text{ten}}$ Grad haben (*erste Art*) und solche, die nur singuläre Punkte vom 1., 2. und $(\frac{1}{2}m+1)^{\text{ten}}$ Grad haben (*zweite Art*). Die Autoren vor Sturm haben die Bezeichnungen 1. und 2. Art auf die beiden (2, 6) umgekehrt verteilt. Die (2, 4) kann man zu beiden Arten rechnen. In der folgenden Tafel bedeutet δ die Zahl der notwendigen Doppelstrahlen und τ die Zahl der tetraedralen Komplexe, in denen eine Kongruenz der betreffenden Gattung enthalten ist. Die Zahl der singulären Ebenen ist stets gleich α_1 und die Zahl der Doppelpunkte der Brennfläche gleich der Summe aller α. Die Kongruenzen der Klassen 2—5 lassen sich durch Cremonasche Verwandtschaften erzeugen (Hirst, *London M. S. Proc.* **14**, 259 (1883)).

	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	$(2,6)_I$	(2,7)	$(2,6)_{II}$
α_1	16	10	6	3	1	—	—
α_2	—	5	6	6	4	—	8
α_3	—	—	2	3	6	10	—
α_4	—	—	—	1	—	—	4
α_5	—	—	—	—	1	—	—
α_6	—	—	—	—	—	1	—
δ	—	—	1	3	6	10	6
τ	40	10	3	1	—	—	1

Die Sätze dieses Paragraphen sind, wo nicht anders bemerkt, großenteils von Kummer (*Berl. Abh.* 1866, S. 1), teils von Sturm gefunden, der (*L. G. II*) die vollständigste Darstellung der Eigenschaften der Kongruenzen 2. Ordnung gegeben hat. Diese beiden Autoren sind stets den Quellen, die wir noch bei den einzelnen Gattungen angeben werden, hinzugefügt zu denken; in diesen Quellen sind manchmal statt der Kongruenzen 2. Ordnung die dual entsprechenden Kongruenzen 2. Klasse untersucht.

Die Kongruenz (2, 2) hat als Brennfläche eine Kummersche Fläche, zu der noch fünf andere *konfokale* (2, 2) gehören; sie ist der vollständige Schnitt eines quadratischen Komplexes (der

als tetraedraler angenommen werden kann) und eines Strahlengewindes, dessen Nullsystem zugleich dasjenige der Kongruenz (§ 13) ist. Aus den 16 singulären Punkten lassen sich 40 Paare verbundener Punkte (jeder mit fünf anderen) und 80 Paare unverbundener Punkte bilden. Die Kongruenz kann erzeugt werden als Gesamtheit der Strahlen, welche entsprechende Strahlen dreier projektiven Büschel treffen, wenn zwei dieser Büschel einen Strahl entsprechend gemein haben, und auch noch bei einer anderen besonderen Lage der drei Büschel (Sturm, *L. G. II*, S. 120). Hinsichtlich der Realität der 16 Büschel einer reellen (2, 2) kann man sechs Fälle unterscheiden (Sturm, *L. G. II*, S. 184), worunter die beiden äußersten, daß keines oder alle reell sind, möglich sind. Vgl. Reye, *J. f. Math.* **86**, 84 (1879); Schur, *Math. Ann.* **15**, 432 (1879); Stahl, *J. f. Math.* **92**, 172 (1882); Hirst, *London M. S. Proc.* **14**, 259 (1883).

Bei (2, 3) enthält jede singuläre Ebene zwei Punkte S_2 und einen S_1; jeder S_2 ist mit jedem anderen S_2 und mit vier S_1, jeder S_1 mit drei S_1 und mit zwei S_2 verbunden. Die Hauptpunkte (§ 2) der zugehörigen tetraedralen Komplexe fallen in drei S_2 und in denjenigen S_1, der mit keinem dieser drei verbunden ist. Vgl. Reye und Hirst, a. d. bei (2, 2) a. O.; Stahl, *J. f. Math.* **91**, 1 (1881); Schumacher, *Diss.* München (1885); Voß, *Math. Ann.* **23**, 381 f. (1884); die letzte Abhandlung führt die Untersuchnng vom allgemeineren Standpunkt der Differentialgeometrie der Punktebenen-Systeme (s. das Kapitel über differentielle Liniengeometrie).

Bei (2, 4) verbindet der notwendige Doppelstrahl die beiden S_3; in jeder singulären Ebene liegen ein S_3, zwei S_2 und zwei S_1. Jeder S_2 ist nur mit einem der übrigen S_2 nicht verbunden; ein S_3 und ein S_2 sind immer verbunden; jeder S_1 ist mit zwei anderen S_1 und einem S_3 verbunden. Die Hauptpunkte der zugehörigen tetraedralen Komplexe sind die beiden S_3 und zwei nicht miteinander verbundene S_2 (Stahl, *J. f. Math.* **97**, 146 (1884)).

Bei (2, 5) verbinden die drei notwendigen Doppelstrahlen den S_4 mit je einem S_3. Der singuläre Kegel des S_4 enthält zwei S_1; die Ebene des dritten S_1 geht durch die beiden anderen S_1. Die Hauptpunkte des zugehörigen tetraedralen Komplexes sind die S_4 und S_3.

Bei $(2, 6)_I$ liegen alle Punkte S_2 und der S_5 in der singulären Ebene. Bei $(2, 6)_{II}$ verbinden die sechs notwendigen Doppelstrahlen die Punkte S_4, die zugleich die Hauptpunkte des zugehörigen tetraedralen Komplexes sind; die sechs Strahlen in einer

Ebene sind derselben Kurve 2. Grades umschrieben. Die Brennflächen der beiden Kongruenzen (2, 6) gehören zwei verschiedenen der vier Arten von Flächen 4. Ordnung mit 12 Doppelpunkten an, welche Rohn (*Math. Ann.* **29**, 81 (1887)) gefunden hat. Die Kongruenzen (2, 5), (2, 4), (2, 3), (2, 2) lassen sich als Sonderfälle von $(2, 6)_{II}$ ansehen.

Bei (2, 7) verbinden die zehn notwendigen Doppelstrahlen den S_6 mit je einem S_3.

Für die Kongruenzen, die zu den (2, 5), $(2, 6)_{I}$, (2, 7) dual sind, hat Caporali (*Napoli Acc. Rend.* 1879, fasc. 11 = *Mem. di Geom. Napoli* 1888, p. 126) eine gemeinsame Erzeugungsweise angegeben. Alle Kongruenzen dieses Paragraphen (oder die dualen) hat Loria auf eine Ebene abgebildet (*Torino, Atti* **19**, 849 (1884) und **21**, 621 (1886)).

§ 16. Kongruenzen zweiter Ordnung mit singulären Linien.

Von diesen Kongruenzen gibt es drei Gattungen:

I. Die Kongruenz besteht aus den Sehnen einer Raumkurve, welche die singuläre Linie ist und nur eine Kurve 4. Ordnung 1. Art sein kann (s. Kap. XXIX, S. 639). Die Kongruenz ist eine (2, 6, 2); ihre Brennfläche zerfällt in die vier Kegel 2. Grades, die durch die Kurve gehen. Die Spitzen dieser Kegel sind isolierte S_2 (§ 15).

II. Die Kongruenz besteht aus den Treffgeraden zweier Kurven C, C'; diese sind die singulären Linien. Hier gibt es zwei Fälle:

A. Die Kurven C, C' sind zwei Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen Punkten. Diese sind S_3 (§ 15); jedoch zerfällt der singuläre Kegel in drei Strahlbüschel. Die anderen Punkte von C, C' sind singulär 2. Grades, ebenso die Ebenen von C, C'; die Berührungsebenen an C, C' in ihren Schnittpunkten sind singulär 1. Grades. Die Brennfläche zerfällt in die beiden Kegel 2. Grades, die durch C, C' gehen; die Spitzen dieser Kegel sind S_2. Die Kongruenz ist eine (2, 4, 2).

B. Eine der singulären Linien C' ist eine Gerade g und die andere C eine Kurve m^{ter} Ordnung, welche g in $m - 2$ Punkten schneidet. Diese Kongruenz ist eine $(2, m, 0)$. Jeder Punkt auf g ist ein S_m und jeder auf C ein S_1. Die Ebenen durch g sind singulär 2. Grades. Die Brennfläche zerfällt in die Berührungsebenen durch g an C; sie ist mithin von der Ordnung $\mu - 2(m - 2)$,

wenn μ die Klasse von C ist. Die Kongruenz hat zu Doppelstrahlen alle Bisekanten von C, welche g treffen; sie bilden eine Regelfläche der Ordnung $2(m-1)-\frac{1}{2}\mu$.

III. Die Kongruenz besteht aus Strahlen, welche eine gewisse singuläre Linie nur einmal treffen. Es können hier folgende Fälle vorkommen:

A. Die singuläre Linie ist eine Gerade. Die Kongruenz hat den Rang Null. Sie kann sein:

1. Die Kongruenz (2, 2) aller Geraden, die eine Fläche 2. Ordnung berühren und eine nicht auf ihr liegende Gerade schneiden.

2. Eine Kongruenz $(2, 2\mu-2)$ der Geraden, die von einem Punkt einer $(\mu-2)$-fachen Geraden g einer Fläche F der μ^{ten} Ordnung ausgehen und diese Fläche in einem Punkt berühren, der im allgemeinen nicht auf g liegt (der einfachste Fall ist der, daß F eine kubische Fläche ist).

3. Eine gewisse Kongruenz $(2, m)$, die aus ∞^1 Strahlbüscheln besteht (vgl. den Schluß von § 14).

B. Die singuläre Linie ist von einer Ordnung $m > 1$ und rational; von jedem ihrer Punkte geht ein Strahlbüschel der Kongruenz aus und überdies ein isolierter Strahl. Die Kongruenz ist eine $(2, m, m-1)$. Die Ebenen der von den Punkten der singulären Kurve ausgehenden Strahlbüschel berühren einen Kegel 2. Grades, dessen Spitze ein singulärer Punkt der Kongruenz ist. Über die verschiedenen Fälle, die hier möglich sind, vgl. Sturm, *L. G. II,* S. 335—349.

C. Die singuläre Linie ist von einer Ordnung $n > 1$; von jedem ihrer Punkte geht ein Kegel 2. Grades von Geraden der Kongruenz aus, die den Rang $n-2$ hat. Es sind folgende Fälle möglich:

1. Der Kegel zerfällt stets in zwei Ebenen; die Kongruenz hat die Klasse $m = 2n$ und besteht aus den Strahlen, die einen Kegel 2. Grades berühren und eine ebene Kurve n^{ter} Ordnung schneiden, die $n-1$ mal durch die Spitze des Kegels geht. Die folgenden Fälle, in denen die singulären Kegel im allgemeinen nicht zerfallen, hat Sturm gefunden:

2. Es sei eine Fläche F 4. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt K und vier konischen Punkten gegeben. Die Geraden, die K schneiden und F außerhalb K berühren, gehören einer Kongruenz (4, 8) an, die jedoch in zwei gleichartige (2, 4) zerfällt.

3. Man schneide ein Tetraeder durch eine Ebene allgemeiner

Lage, lege durch die sechs Schnittpunkte mit den Kanten eine ebene Kurve C 3. Ordnung mit einem Doppelpunkt D. Die Kegel 2. Grades, deren Spitzen auf C liegen, und die durch D und die vier Ecken des Tetraeders gehen, erzeugen eine Kongruenz (2, 6).

4. Auf einer Raumkurve 3. Ordnung nimmt man vier Punkte an und zieht durch einen von ihnen P eine Sehne nach einem fünften Punkte Q. Die Kegel 2. Grades, deren Spitzen auf der Kurve liegen, die durch die vier Punkte gehen und in P die Sehne PQ berühren, bilden eine Kongruenz (2, 6). Die sechs Verbindungsgeraden der vier Punkte sind Doppelstrahlen der Kongruenz, und die vier Punkte sind singulär vom 4. Grad, jedoch so, daß die singulären Kegel in zwei quadratische zerfallen. Die Kongruenz kann auch definiert werden durch diejenigen Tangenten einer Regelfläche 4. Ordnung mit kubischer Doppelkurve (Kap. XXXV, § 9), die von den Punkten der Doppelkurve ausgehen.

Von einigen Kongruenzen dieses Paragraphen hat Montesano nachgewiesen, daß sie in tetraedralen Komplexen enthalten sind (*Torino, Atti* **27**, 1053 (1892); *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **1**, 77 (1892)); viele hat er auf die Ebene abgebildet (*Rend. Circ. Mat.* **7**, 159 (1893)). Die grundlegenden Arbeiten über diesen Gegenstand sind: Kummer, *Berl. Abh*, 1866; Sturm, *Math. Ann.* **36**, 467 (1890) und *L. G. II*; Schumacher, *Math. Ann.* **38**, 298 (1891).

§ 17. Kongruenzen höherer Ordnung.

Die Untersuchung der Kongruenzen höherer als der 2. Ordnung und Klasse begann Irmer (*Über Strahlensysteme 3. Ordnung mit Brennkurven, Diss.* Halle (1870)); Kummer entdeckte (*Berl. Monatsber.* 1878, S. 25) zwei Arten von Kongruenzen (3, 3); diejenigen der einen Art liegen in einem Strahlengewinde und sind sein Schnitt mit einem Komplex 3. Grades. Diese Untersuchungen wurden von Rocella (*Sugli enti geom.* (1882)); Hirst (*London M. S. Proc.* **16**, 232 (1885), **17**, 287 (1886)); Stuyvaert (*Rend. Circ. Mat.* **30**, 239 (1910)) weitergeführt. Die Kongruenzen mit unendlich vielen Strahlenbüscheln hat Baldus (*Math. Ann.* **71**, 275 (1911)) studiert.

Systematisch wurde die Theorie der Kongruenzen 3. Ordnung ohne singuläre Linien von Fano (*Torino, Acc. Mem.* (2) **50**, 1 (1901); *Torino, Acc. Atti* **37**, 501 (1902)) bearbeitet. Einige Ergebnisse sind: Die Klasse m dieser Kongruenzen kann bis 13, das Geschlecht bis 6 aufsteigen. Vom Geschlecht Null ist nur eine

(3, 1), die durch zwei kollineare Ebenen in allgemeiner Lage erzeugt wird. Die singulären Ebenen können nur 1. oder 2. Grades sein. Die Punkte, deren drei Strahlen demselben Büschel angehören, bilden (wenn dies nicht für alle Punkte eintrifft) eine Fläche der Ordnung $r - m + 1$. Es gibt Kongruenzen (3, 3), auf deren sämtlichen Strahlen die beiden Brennpunkte zusammenfallen; sie bestehen aus dem einen System von Haupttangenten einer gewissen Fläche und sind in tetraedralen Komplexen enthalten. Diese Fläche kann nur entweder eine Regelfläche 3. Ordnung (mit getrennten oder zusammenfallenden Leitlinien) sein oder diejenige Fläche 3. Ordnung, die auch 3. Klasse ist und drei biplanare Knotenpunkte hat (Familie XXI Schläflis; vgl. Kap. XXXIV, § 13).

Kapitel XL.

Raumkurven und abwickelbare Flächen.

Von *E. Salkowski* in Hannover.

§ 1. Raumkurven.

1. *Definition.* Drei (analytische) Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ eines Parameters t, die einen gemeinsamen Existenzbereich besitzen, definieren eine (analytische) Raumkurve, wenn man x, y, z als rechtwinklige kartesische Koordinaten im Raume deutet. Durch Elimination des Parameters erhält man (auf unendlich viele Weisen) zwei Gleichungen $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ zwischen den Koordinaten, die Kurve ist dann dargestellt als Schnitt zweier Flächen. Im besonderen stellen die Gleichungen $x = x(z)$, $y = y(z)$ die Kurve als Schnitt zweier Zylinder dar, deren Erzeugende der y- bzw. x-Achse parallel sind.

2. *Bogenelement.* Der Abstand ds zweier benachbarten Punkte der Kurve ist durch die Formel

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) \tag{1}$$

gegeben. Der Akzent bedeutet hier, wie in der Folge stets, die Differentiation nach dem Parameter.

3. *Tangente und Normalebene.* Die Gleichungen der Tangente lauten:

$$\frac{dx}{\xi - x} = \frac{dy}{\eta - y} = \frac{dz}{\zeta - z} \tag{2}$$

oder

$$\xi = x + u\alpha, \quad \eta = y + u\beta, \quad \zeta = z + u\gamma, \tag{2a}$$

wobei u den Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) vom Berührungspunkte bedeutet und

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds} \tag{3}$$

die *Richtungskosinus der Tangente* sind.

Für die zweite (nur selten zweckmäßige) Darstellung der Kurve als Schnitt zweier Flächen heißen die Gleichungen der Tangente:

$$\text{(2b)} \qquad \sum \frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) = 0, \quad \sum \frac{\partial G}{\partial x}(\xi - x) = 0,$$

wobei die Summe hier wie später auf die drei Koordinaten zu beziehen ist.

Die *Normalebene* steht auf der Tangente senkrecht; ihre Gleichung ist daher

$$\text{(3)} \qquad \sum (\xi - x)\, dx = 0$$

oder

$$\text{(3a)} \qquad \sum (\xi - x)\, \alpha = 0$$

oder auch

$$\text{(3b)} \qquad \left| (\xi - x), \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial x} \right| = 0.$$

Von der dreireihigen Determinante in der letzten Gleichung entsteht die zweite und dritte Zeile aus der hingeschriebenen ersten durch zyklische Vertauschung der Koordinaten.

Die erste systematische Behandlung der Raumkurven rührt her von Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure,* Paris 1731. Daran schließt sich Euler, *Introductio in analysin infinitorum,* T. II, Lausanne 1748, Monge, *Application de l'analyse à la géométrie,* Paris 1806, und Dupin, *Développements de géométrie,* Paris 1813, ferner Cauchy, *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie,* Paris, t. I 1826, t. II 1828. Vgl. E. Joachimsthal, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung* usw. 3. Aufl. von Natani, Leipzig 1890. Eine rein geometrische Darstellung versuchten Serret, *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure,* Paris 1860, und W. Schell, *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung,* Leipzig 1859, dritte Auflage von Salkowski, Leipzig und Berlin 1914. Vgl. ferner R. von Lilienthal, *Vorlesungen über Differentialgeometrie,* 1. Bd. *Kurventheorie,* Leipzig u. Berlin 1908, G. Scheffers, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie,* 1. Bd. *Einführung in die Theorie der Kurven,* Leipzig 1901, 2. Aufl. 1914, und die zusammenfassende Darstellung von H. v. Mangoldt, *Math. Enzykl.* III D 1, 2.

4. *Schmiegungsebene und Binormale.* Die Schmiegungsebene hat mit der Kurve drei aufeinanderfolgende Punkte oder zwei Tangenten gemeinsam; ihre Gleichung lautet

(4) $$\xi - x,\ dx,\ d^2x\,| = 0$$

oder

(4a) $$\sum (\xi - x)\,\lambda = 0\,,$$

wobei

(5) $$\lambda = \frac{x'z'' - .}{\sqrt{\Sigma (y'z'' - z'y'')^2}}, \dots$$

ist.[1]) (Vgl. B. de Saint-Venant, *J. Éc. Polyt.* **18**, cah. 30 (1845).)

Die eben eingeführten Größen λ, μ, ν sind die Richtungskosinus des Lotes zur Schmiegungsebene. Dies Lot gehört als Lot zur Tangente der Normalebene an und wird als *Binormale* bezeichnet (B. de Saint-Venant, a. a. O.); seine Gleichungen sind:

(6) $$\xi = x + u\lambda, \dots .$$

5. *Hauptnormale und rektifizierende Ebene.* Die Normale, die der Schmiegungsebene angehört, heißt *Hauptnormale*; ihre Gleichungen sind:

(7) $$\xi = x + ul, \dots,$$

und zwar ist

(8) $$= \frac{\dfrac{d\alpha}{ds}}{\sqrt{\sum \left(\dfrac{d\alpha}{ds}\right)^2}}, \dots .$$

Die Ebene, die im Kurvenpunkte auf der Hauptnormale senkrecht steht, also die Tangente und Binormale enthält, heißt *rektifizierende Ebene*; ihre Gleichung lautet:

(9) $$\sum (\xi - x)\, l = 0\,.$$

6. *Kontingenz- und Schmiegungswinkel; Krümmung und Torsion.* Der Winkel $d\tau$ benachbarter Tangenten einer Raumkurve heißt *Kontingenzwinkel*; er ist:

(10) $$d\tau = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}.$$

Der *Schmiegungswinkel*, d. h. der Winkel $d\sigma$ benachbarter Schmiegungsebenen (Binormalen) ist:

(11) $$d\sigma = \sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2},$$

---

1) Die der Formel angehängten Punkte bedeuten, daß der hingeschriebenen Formel zwei weitere, durch zyklische Vertauschung aus ihr entstehende Formeln zur Seite zu stellen sind.

und der Winkel dk benachbarter Hauptnormalen (Winkel der ganzen Krümmung) ist

(12) $$dk = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2};$$

zwischen diesen Winkeln besteht die Lancretsche Relation (Lancret, *Mém. des Sav. Étr.* **1** (1805)):

(13) $$dk^2 = d\tau^2 + d\sigma^2.$$

Man bezeichnet die Quotienten:

(14) $$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho} \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{r}$$

als *erste* und *zweite Krümmung* der Raumkurve, und

(14a) $$\frac{dk}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{r}}$$

als ihre *ganze Krümmung*. Die zweite Krümmung heißt auch *Torsion* (Windung).

Setzt man für $d\tau$ und $d\sigma$ die Werte ein, so ergeben sich folgende Formeln für die Krümmungen:

(14b) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\sum (x'y'' - x''y')^2}}{ds^3}$$

und

(14c) $$\frac{1}{r} = -\frac{\varrho^2}{ds^6} \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

Die Formel (14b) zeigt, daß ϱ, also auch $d\tau$ zweideutig ist, während (14c) das Vorzeichen von r, also auch von $d\sigma$ eindeutig bestimmt. Für reelle Kurven wählt man das Vorzeichen so, daß $\varrho > 0$ ist, während r sowohl positiv als auch negativ sein kann (Kurven positiver und negativer Torsion).

7. *Krümmungsradius; Krümmungsmittelpunkt; Schmiegungskugel.* Der Kreis, der mit der Kurve drei benachbarte Punkte gemeinsam hat, d. h. sie in der zweiten Ordnung berührt, heißt *Krümmungskreis*; er liegt in der Schmiegungsebene, sein Radius ist ϱ, der reziproke Wert der ersten Krümmung, und sein Mittelpunkt, der *Krümmungsmittelpunkt*, liegt auf der Hauptnormalen. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes s. Nr. 17.

Einen Schmiegungsmittelpunkt gibt es nicht, doch kann man den Schmiegungsradius r, ebenso wie den Radius $\mathfrak{r}$ der ganzen Krümmung in verschiedener Weise geometrisch deuten, vgl. z. B. B. de Saint-Venant, *J. de l'Éc. Pol.* **18**, cah. 30, 54 (1845).

Die Kugel, die mit der Kurve vier benachbarte Punkte gemeinsam hat (sie in der dritten Ordnung berührt), heißt *Schmiegungskugel.* Ihr Radius ist:

$$R = \sqrt{\varrho^2 + h^2}, \tag{15}$$

wobei

$$h = r\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

ist. Die Koordinaten ihres Mittelpunktes s. Nr. 19.

8. *Das Hauptdreikant.* Die Tangente t, Hauptnormale h und Binormale b bilden ein dreifach orthogonales Achsensystem, dessen Ebenen die Schmiegungs-, Normal- und rektifizierende Ebene der Kurve sind. Schreitet man auf der Kurve in bestimmtem Sinne fort, so ist dadurch eine Richtung der Tangente bevorzugt. Als Richtung der Hauptnormale wählt man die Richtung vom Kurvenpunkte zum Krümmungsmittelpunkte, und die Binormale orientiert man so, daß das Achsensystem thb durch eine Bewegung mit dem xyz-System zur Deckung gebracht werden kann. Diese Orientierung kommt darauf hinaus, daß die Determinante der Richtungskosinus:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1 \tag{16}$$

wird. Durch diese Festsetzung wird jeder der neun Richtungskosinus durch vier andere eindeutig dargestellt, z. B.:

$$\lambda = \beta n - \gamma m, \ldots, \tag{17}$$

und dadurch für die Vorzeichen der Quadratwurzeln in (5) und (8) eine Abhängkeit gewonnen.

Da t, b, h senkrecht zueinander stehen, sind ihre Richtungskosinus durch die Gleichungen der orthogonalen Transformation miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, && \alpha^2 + l^2 + \lambda^2 = 1, \\
&l^2 + m^2 + n^2 = 1, && \beta^2 + m^2 + \mu^2 = 1, \\
&\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, && \gamma^2 + n^2 + \nu^2 = 1. \\
&\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, && \alpha\beta + lm + \lambda\mu = 0, \\
&\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, && \beta\gamma + mn + \mu\nu = 0, \\
&l\lambda + m\mu + n\nu = 0, && \gamma\alpha + nl + \nu\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

9. *Die Frenetschen Formeln.* Zwischen den Ableitungen der Richtungskosinus und den Krümmungen bestehen folgende Beziehungen:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \ldots &\qquad& d\alpha = l\,d\tau, \ldots\\
&\frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{r}, \ldots && dl = -\alpha\,d\tau - \lambda\,d\sigma, \ldots\\
&\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r}, \ldots && d\lambda = l\,d\sigma, \ldots .
\end{aligned}
$$

Diese Formeln sind von grundlegender Wichtigkeit; sie sind von Frenet (*Thèse*, Toulouse 1847; *J. d. Math.* **17**, 437 (1852)) und Serret (*J. d. Math.* **16**, 193 (1851)) gefunden worden. Die Gleichungen enthalten ds im Grunde nur scheinbar, sie sind Beziehungen zwischen den Richtungskosinus, $\alpha, \ldots\, l, \ldots, \lambda, \ldots$ und ihren Ableitungen, sie gelten daher nicht nur für die Bewegung des Hauptdreikants einer Raumkurve. Ihre allgemeinere Bedeutung hat W. Fr. Meyer (*Theorie benachbarter Geraden*, Leipzig 1911) gezeigt.

10. *Das sphärische Bild.* Zieht man durch den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius Eins die Parallelen zu den Tangenten, den Hauptnormalen und den Binormalen, so schneiden diese Geraden die Kugel in Punkten, die das sphärische Bild der Tangenten, Haupt- und Binormalen der Kurve erfüllen. Entsprechende Punkte der drei Kurven bilden ein rechtwinkliges Dreikant. Das *Tangentenbild* hat die Koordinaten (α, β, γ) und das Bogenelement $d\tau$. Das Hauptnormalenbild wird erhalten, wenn man an das Tangentenbild die sphärische Tangente konstruiert und auf ihr vom Berührungspunkte um $\frac{1}{2}\pi$ fortschreitet, und das Binormalenbild ist der Pol dieser sphärischen Tangente.

Konstruiert man die größten Kreise, die das Hauptnormalenbild zum Pole haben (die Bilder der rektifizierenden Ebene), so schneiden sowohl Tangenten- als auch Binormalenbild alle diese Kreise rechtwinklig, sie sind also die sphärischen Evolventen ihrer Hüllkurve. *Tangenten- und Binormalenbild haben dieselbe (sphärische) Evolute.*

Kurven, die dasselbe Tangentenbild haben (*parallele Kurven*, vgl. Nr. 36), besitzen auch dasselbe Hauptnormalenbild und Binormalenbild. Kurven, die das Binormalenbild gemeinsam haben, besitzen dasselbe Bild der Tangenten und Hauptnormalen. Für Kurven, die dasselbe Hauptnormalenbild besitzen, bilden entspre-

chende Tangenten und entsprechende Binormalen stets denselben Winkel.

Das sphärische Bild ist für die Theorie der Kurven zuerst von Jacobi (*Zur Theorie der Kurven*, J. f. Math. **14**, 56 (1835), Werke VII, S. 11), dann systematisch von P. Serret (*Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure*, Paris 1860) und Aoust (*Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, Paris 1876) nutzbar gemacht worden.

11. *Einteilung der analytischen Kurven.* Von den bisher eingeführten Bestimmungsgrößen werden für gewisse Ausnahmefälle eine oder mehrere illusorisch. Um einen Überblick über die Gesamtheit der möglichen Fälle zu erhalten, wollen wir die analytischen Kurven folgendermaßen in eine Anzahl natürlicher Klassen verteilen.

A. Reguläre Kurven: $D \equiv \sum (x'y'' - x''y')^2 \not\equiv 0$.

I. Unebene reguläre Kurven:

$$\varDelta \equiv |x' x'' x'''| \not\equiv 0 \qquad \left(\text{d. h. } \frac{1}{r} \not\equiv 0\right).$$

II. Ebene reguläre Kurven (krumme Linien in Euklidischen Ebenen):

$$\varDelta \equiv 0 \qquad \left(\text{d. h. } \frac{1}{r} \equiv 0\right).$$

B. Singuläre Kurven: $D \equiv 0$.

III. Krumme ebene singuläre Linien (krumme Linien in Minimalebenen):

$$\varDelta = 0, \quad ds^2 \not\equiv 0.$$

IV. Unebene singuläre Linien (krumme Minimallinien):

$$\varDelta \not\equiv 0, \quad ds^2 \equiv 0.$$

V. Euklidische Geraden:

$$x'y'' - x''y' \equiv 0, \ldots, \quad ds^2 \not\equiv 0.$$

VI. Minimalgeraden:

$$x'y'' - x''y' \equiv 0, \ldots, \quad ds^2 \equiv 0.$$

Dies Schema ist von E. Study, *Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven, American Math. Soc. Trans.* **10**, 1 (1909), angegeben.

12. *Die Minimalkurven* (vgl. Weierstraß, *Berlin. Monatsber.* 1866, 619) sind durch die Gleichungen dargestellt:

$$
(20)\qquad \begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2}(1 - v^2)f''(v) + vf'(v) - f(v),\\
y &= \frac{i}{2}(1 + v^2)f''(v) - ivf'(v) + if(v),\\
z &= vf''(v) - f'(v),
\end{aligned}
$$

wobei $f(v)$ eine beliebige Funktion des Parameters bedeutet.

13. *Rektifikation von Raumkurven.* Sind die Koordinaten eines Kurvenpunktes als Funktionen eines Parameters t gegeben, so erfordert die Bestimmung der Bogenlänge s die Ausführung einer Quadratur. Durch zweckmäßige Wahl des Parameters gelingt es aber, die Gesamtheit der Raumkurven so darzustellen, daß die Bogenlänge gleichfalls explizit angebbar ist:

$$
(21)\qquad \begin{aligned}
x &= v' + (tw' - w),\\
iy &= v' - (tw' - w),\\
z &= w' - (tv' - v),\\
s &= w' + (tv' - v).
\end{aligned}
$$

In den Formeln bedeuten v und w irgendwelche analytische Funktionen von t; sie ergeben die Minimalkurven, wenn $w'' + tv'' = 0$ ist, die krummen Linien in Minimalebenen (krumme Linien von der Krümmung Null), wenn $w'' + kv'' = 0$ ist.

Das Problem der Rektifikation ist zuerst von J. A. Serret (*J. de Math.* **13**, 353 (1848)) gelöst, dann von Darboux (*J. de Math.* (2) **18**, 236 (1873); *J. de Math.* (4) **3**, 305 (1885)) und P. Stäckel (*Math. Ann.* **43**, 171 (1893) und **45**, 341 (1894)) eingehend behandelt worden. Die Formeln (21) sind von de Montcheuil (*Bull. Soc. Math. de France* **33**, 170 (1905)) angegeben und von E. Salkowski (*Math. Ann.* **67**, 445 (1909)) weiter verfolgt worden. Eine besonders eingehende Untersuchung hat Eisenhart (*Annals of Math.* (2) **13**, 7 (1911)) geliefert.

§ 2. Abwickelbare Flächen.

14. *Die Tangentenfläche einer Raumkurve*[1]) besteht aus unendlich vielen unendlich schmalen ebenen Flächenstreifen, die von je zwei benachbarten Tangenten begrenzt sind. Durch Drehung der Streifen um die begrenzenden Tangenten kann man es er-

1) Unter Raumkurve schlechtweg soll von jetzt ab ausschließlich eine reguläre Raumkurve (Klasse A des Schema in Nr. 11) verstanden werden.

reichen, daß sie alle in ein und dieselbe Ebene hineinfallen, d. h. die Tangentenfläche einer Raumkurve läßt sich in eine Ebene abwickeln. Analytisch ergibt sich diese Tatsache durch die Möglichkeit, das Quadrat des Bogenelements in die Form $dx^2 + dy^2$ zu bringen. (A. Voß, *Math. Enzykl.* III D 6 a. Nr. 21.)

Die Tangentenfläche einer Raumkurve wird längs einer Erzeugenden von der Schmiegungsebene der Kurve berührt. Umgekehrt: *Die Hüllfläche der Schmiegungsebenen einer Raumkurve ist die Tangentenfläche der Kurve.*

Jede reguläre abwickelbare Fläche ist entweder Zylinder oder Kegel oder Tangentenfläche einer regulären Raumkurve.

15. Eine geradlinige Fläche wird durch drei Gleichungen:

$$\xi = x(t) + uf(t), \quad \eta = y(t) + ug(t), \quad \zeta = z(t) + uh(t) \tag{22}$$

dargestellt; sie ist abwickelbar, wenn:

$$|dx, f, f'| = 0. \tag{23}$$

Die Fläche der Hauptnormalen einer Kurve ist nur dann abwickelbar, nämlich eine Ebene, wenn die Kurve selbst eben ist; in demselben Falle und nur in diesem ist die Binormalenfläche abwickelbar, nämlich ein Zylinder.

16. Die Hüllfläche von ∞^1 stetig aufeinanderfolgenden Ebenen ist eine abwickelbare Fläche. Zwei benachbarte Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die ganz auf der Hüllfläche liegt, drei aufeinanderfolgende Ebenen in einem Punkte (der auch unendlich fern sein kann). Ist dieser Punkt nicht für alle Ebenen derselbe (in diesem Falle hätte man es mit einem Kegel oder Zylinder zu tun), so erfüllen seine verschiedenen Lagen eine Kurve, die *Gratlinie* der Fläche, und die geradlinigen Erzeugenden der Fläche sind Tangenten dieser Kurve.

Mit jeder Raumkurve sind drei ausgezeichnete Scharen von ∞^1 Ebenen verbunden, welche die Seitenflächen des Hauptdreikants bilden.

1. Die Hüllfläche der Schmiegungsebenen ist die *Tangentenfläche* der Raumkurve, ihre Gratlinie die Kurve selbst.

2. Die Hüllfläche der Normalebenen heißt die *Polarfläche* der Kurve; ihre Gratlinie ist die Polarkurve und mit der Kurve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln (s. Nr. 19) identisch.

3. Die Hüllfläche der rektifizierenden Ebenen ist die *rekti-*

fizierende Fläche der Kurve; auf ihr ist die Raumkurve eine geodätische Linie (s. Nr. 20).

Die Gleichung:

$$(24)\qquad ax + by + cz = \varphi(t),$$

in der a, b, c drei (analytische) Funktionen des Parameters t sind, zwischen denen die Beziehung:

$$(25)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

besteht, stellt eine Schar von Ebenen dar; diese umhüllen eine abwickelbare Fläche, deren Gratlinie sich aus den Gleichungen:

$$(26)\qquad \begin{aligned} ax + by + cz &= \varphi(t), \\ a'x + b'y + c'z &= \varphi'(t), \\ a''x + b''y + c''z &= \varphi''(t) \end{aligned}$$

ergibt. Dabei bedeuten die Striche an der Funktionsbezeichnung Differentiationen nach t.

Für die Gratlinie sind a, b, c die Richtungskosinus der Binormalen, da die Ebenen der Schar ihre Schmiegungsebenen sind. Die zweite Gleichung (26) stellt die Schar der rektifizierenden Ebenen der Kurve dar, ihr Schmiegungswinkel ist:

$$d\sigma = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}.$$

Die Richtungskosinus der Hauptnormalen werden:

$$l = \frac{a'}{\sigma'}, \ldots,$$

und hieraus erhält man die Richtungskosinus der Tangenten:

$$\alpha = m\nu - n\mu, \ldots$$

oder

$$b'c - c'b$$

Die Formeln knüpfen die Untersuchung der Kurve als Ebenengebilde an die bisher einseitig bevorzugte Darstellung als Punktgebilde.

Die hier benutzte Darstellung gestattet, alle Raumkurven explizit zu bestimmen, von denen das Bild der Tangenten, Binormalen oder Hauptnormalen gegeben ist. (E. Salkowski, *Math. Ann.* **67**, 445 (1909).)

§ 3. Abgeleitete Kurven.

17. Mit einer gegebenen Raumkurve steht eine große Anzahl anderer Kurven in nahen Beziehungen; die wichtigsten und interessantesten seien in den folgenden Nummern zusammengestellt. Dabei ist durchweg die gegebene Raumkurve mit C bezeichnet, und ihre Bestimmungsgrößen sind durch die in § 1 eingeführte Bezeichnungsweise dargestellt. Die jeweils betrachtete abgeleitete Kurve sei C_1 genannt und ihre Bestimmungsgrößen, die in einer auch für spezielle Problemstellungen ausreichenden Vollständigkeit angegeben sind, durchweg mit dem Index 1 gekennzeichnet.

18. *Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte* C_1 liegt auf der Hauptnormalenfläche und auf der Polarfläche von C. Ihre Gleichungen sind:

$$x_1 = x + \varrho l, \ldots,$$

$$ds_1 = R\,d\sigma = d\sigma\sqrt{\varrho^2 + h^2} = \frac{ds}{r}\sqrt{\varrho^2 + r^2\varrho'^2},$$

$$d\tau_1 = \sqrt{(d\sigma - d\mu)^2 + \cos^2\mu\, d\tau^2},$$

$$d\sigma_1 = -(d\varphi + \sin\mu\, d\tau).$$

Dabei bedeutet μ den Winkel, den die Tangente an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte mit der Hauptnormale der gegebenen Kurve bildet; es wird also:

$$\cos\mu = \frac{h}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}}, \quad \sin\mu = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}}.$$

φ ist der Winkel der Binormalen von C_1 und der Tangente von C, also:

$$\cos\varphi = -\frac{d\sigma - d\mu}{d\tau_1}, \quad \sin\varphi = -\frac{d\tau}{d\tau_1}\cos\mu.$$

Ferner wird:

$$\alpha_1 = l\cos\mu + \lambda\sin\mu, \ldots,$$

$$l_1 = \alpha\sin\varphi - (l\sin\mu - \lambda\cos\mu)\cos\varphi, \ldots,$$

$$\lambda_1 = \alpha\cos\varphi + (l\sin\mu - \lambda\cos\mu)\sin\varphi, \ldots.$$

Die Tangente der Krümmungsmittelpunktskurve berührt den Kreis, dessen Durchmesser der Radius der zugehörigen Schmiegungskugel nach dem Kurvenpunkte ist; sie bildet daher mit der Binormalen denselben Winkel wie der Radius der Schmiegungskugel mit der Hauptnormalen. Dreht man die Normalebenen alle in eine Ebene, so reduziert sich die ursprüngliche Kurve auf einen

Punkt P und die Kurve ihrer Schmiegungsmittelpunkte in eine ebene Kurve C; die Krümmungsmittelpunktskurve reduziert sich dann auf eine Fußpunktkurve von C bezüglich des Pols P. (C. G. J. Jacobi, *Zur Theorie der Kurven*, J. f Math. **14**, 56 (1835), Werke VII, S. 11, J. Steiner, *Über einige allgemeine Eigenschaften der Kurven doppelter Krümmung*, Berlin. Monatsber. 1839, S. 76, Werke II, S. 161.)

19. *Die Polarkurve.* Die Hüllfläche der Normalebenen hat die Kurve der Schmiegungskugelmittelpunkte oder Polarkurve zur Gratlinie. Ihre Gleichungen sind (vgl. Jacobi, *J. f. Math.* **14**, 56 (1835), *Werke* VII, S. 11, Lacroix, *Traité élémentaire du calcul diff. et intégr.* 4. éd. p. 236):

$$x_1 = x - h\lambda + \varrho l, \ldots; \quad h = r\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

Ferner wird:

$$ds_1 = \varepsilon(\varrho\, d\sigma + dh) = \varepsilon\left(\frac{\varrho}{r} + r'\varrho' + r\varrho''\right),$$

$$\varrho_1 = \varepsilon'\left(\varrho + \frac{dh}{d\sigma}\right),$$

$$= \varrho\left(\frac{d\varrho}{ds} + \frac{dh}{ds}\right) = \frac{\varrho\, d\sigma + dh}{d\tau}$$

und

$$\alpha_1 = -\varepsilon\lambda, \ldots,$$

$$l_1 = -\varepsilon\varepsilon' l, \ldots,$$

$$\lambda = -\varepsilon'\alpha, \ldots.$$

Die Faktoren $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$ sind so zu wählen, daß ds_1 und ϱ_1 beide positiv werden. Diese Bestimmung wird im Komplexen illusorisch, doch ist eben dort sowohl das Bogenelement wie die Krümmung zweideutig.

Die Tangenten der Polarkurve sind den Binormalen der ursprünglichen Kurve parallel, die Hauptnormalen beider Kurven sind in entsprechenden Punkten parallel.

Die Polarkurve der Polarkurve hat mit der ursprünglichen Raumkurve parallele Hauptdreikante. Sie fällt mit der ursprünglichen zusammen, wenn diese konstante Krümmung besitzt.

20. *Die Gratlinie der rektifizierenden Fläche.* Ihre Gleichungen sind:

$$x_1 = x + u(\alpha \cos \mathsf{H} + \lambda \sin \mathsf{H}), \ldots,$$

wobei der Winkel H der rektifizierenden Geraden und der Tangente durch die Gleichungen:

$$\operatorname{ctg} \mathsf{H} = -\frac{\varrho}{r}; \quad \sin \mathsf{H} = \frac{d\tau}{dk} = \frac{\mathfrak{r}}{\varrho}, \quad \cos \mathsf{H} = \frac{d\sigma}{dh}$$

gegeben ist, und

$$u = \sin \mathsf{H} \cdot \frac{ds}{d\mathsf{H}} = \frac{ds}{\sin \mathsf{H} \cdot d\left(\frac{\varrho}{r}\right)}$$

Ferner wird:

$$ds_1 = \frac{\varepsilon}{\sin \mathsf{H}}\, d\left(\frac{ds}{\left(\frac{\varrho}{r}\right)}\right) = \varepsilon(du + \cos \mathsf{H}\, ds),$$

$$d\tau_1 = \varepsilon' d\mathsf{H},$$

$$\varrho_1 = \varepsilon\varepsilon' \frac{ds_1}{d\mathsf{H}} = \varepsilon\varepsilon' \cdot \frac{u}{\sin^2 \mathsf{H}} \frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{d\frac{\varrho}{r}}\right),$$

$$r_1 = -\varrho \frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{d\frac{\varrho}{r}}\right), \quad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{u\varrho}{\mathfrak{r}^2},$$

endlich:

$$\alpha_1 = \varepsilon(\alpha \cos \mathsf{H} + \lambda \sin \mathsf{H}), \ldots$$

$$l_1 = \varepsilon'(-\alpha \sin \mathsf{H} + \lambda \cos \mathsf{H}), \ldots$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon'\varepsilon l, \ldots$$

Auch hier sind im Reellen ε, ε' derart gleich ± 1 zu setzen, daß ds_1 und ϱ_1 positive Werte haben.

Die rektifizierende Fläche wird ein Zylinder, wenn $\varrho : r =$ konst. wird, ein Kegel, wenn $\varrho : r = ms + n$ ist (vgl. Art. 26—29).

Das Tangentenbild der Gratlinie der rektifizierenden Fläche ist die sphärische Evolute des Tangentenbildes der Kurve.

21. *Filarevolventen.* Denkt man sich über eine Raumkurve C einen Faden gespannt, und wird dieser Faden so abgewickelt, daß er stets gespannt bleibt, so beschreibt er die Tangentenfläche der Raumkurve und jeder seiner Punkte eine *Filarevolvente* C_1 von C. (Monge, *Mém. sur les développées*, Mém. des Sav. Étr. **10**, Paris 1785, vgl. auch *Application de l'analyse à la géométrie*, Paris 1807.)

Es gibt ∞^1 Filarevolventen, die alle auf der Tangentenfläche liegen und die Tangenten senkrecht schneiden.

Die Tangente einer Filarevolvente C_1 ist der Hauptnormale der Kurve C parallel, und die Normalebene von C_1 ist die rektifizierende Ebene von C.

Die *Gleichungen* der Filarevolvente sind:

$$x_1 = x + (a - s)\alpha, \ldots \quad (a \text{ eine beliebige Konstante}),$$

$$ds_1 = \varepsilon \frac{a-s}{\varrho} ds \quad (\varepsilon = \pm 1, \text{ so daß } ds_1 > 0 \text{ ist}),$$

$$d\tau_1 = dk, \quad d\sigma_1 = \varepsilon d\mathrm{H};$$

$$\varrho_1 = \varepsilon(a - s)\frac{\mathfrak{r}}{\varrho} = -\varepsilon(a - s)\sin\mathrm{H},$$

$$r_1 = \frac{a-s}{\varrho}\frac{ds}{d\mathrm{H}};$$

$$\alpha_1 = \varepsilon l, \ldots,$$

$$l_1 = \varepsilon(\alpha\sin\mathrm{H} - \lambda\cos\mathrm{H}), \ldots,$$

$$\lambda_1 = -\alpha\cos\mathrm{H} - \lambda\sin\mathrm{H}, \ldots,$$

Die Polarfläche der Filarevolvente ist die rektifizierende Fläche der Ausgangskurve.

22. *Filarevolute.* Eine Kurve C_1 heißt *Filarevolute* einer gegebenen Kurve C, wenn C eine Filarevolvente von C_1 ist.

Eine Raumkurve besitzt ∞^1 Filarevoluten, die auf ihrer Polarfläche geodätische Linien sind. Die *Formeln* dafür sind:

$$x_1 = x + \varrho(l + \lambda \operatorname{tg}(\sigma + \sigma_0)), \ldots;$$

$$ds_1 = \varepsilon d\left(\frac{\varrho}{\cos(\sigma+\sigma_0)}\right) = \varepsilon d\sigma \frac{\varrho\sin(\sigma+\sigma_0) + h\cos(\sigma+\sigma_0)}{\cos^2(\sigma+\sigma_0)};$$

$$d\tau_1 = \varepsilon' \cos(\sigma+\sigma_0)d\tau, \quad d\sigma_1 = -\varepsilon\sin(\sigma+\sigma_0)d\tau;$$

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{d\tau_1}, \quad r_1 = \frac{ds_1}{d\sigma_1}, \quad \frac{\varrho_1}{r_1} = -\varepsilon\varepsilon' \operatorname{tg}(\sigma+\sigma_0);$$

$$\alpha_1 = \varepsilon[l\cos(\sigma+\sigma_0) + \lambda\sin(\sigma+\sigma_0)], \ldots,$$

$$l_1 = -\varepsilon\varepsilon'\alpha \qquad , \ldots,$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon'[l\sin(\sigma+\sigma_0) - \lambda\cos(\sigma+\sigma_0)], \ldots.$$

23. *Planevolventen.* Wenn eine bewegliche Ebene über die Tangentenfläche einer Raumkurve C hinrollt, so ist sie in jeder Lage Schmiegungsebene von C. Jeder ihrer Punkte beschreibt dabei eine Kurve C_1, die als *Planevolvente* (Lancret, *Paris Mém.* **1**, 420 (1805)) von C bezeichnet wird.

Jede Raumkurve C besitzt ∞^2 Planevolventen C_1; die Schmiegungsebenen von C sind Normalebenen ihrer Planevolventen.

Die *Formeln* dafür sind:

$$x_1 = x - (a \cos \tau - l \sin \tau) \int \cos \tau \, ds - (a \sin \tau + l \cos \tau) \int \sin \tau \, ds, \ldots;$$

$$ds_1 = \varepsilon \, d\sigma \left[\cos \tau \int \sin \tau \, ds - \sin \tau \int \cos \tau \, ds \right],$$

$$d\tau_1 = \varepsilon' d\sigma, \qquad d\sigma_1 = -\varepsilon \, d\tau;$$

[illegible] $\varepsilon\lambda, \ldots, \quad l_1 = \varepsilon\varepsilon'\lambda, \ldots, \quad \lambda_1$ [illegible] $\varepsilon'\alpha,$

24. *Planevolute.* Jede Raumkurve C kann als Planevolvente einer einzigen anderen Raumkurve betrachtet werden, nämlich ihrer Polarkurve. Man bezeichnet daher die Gratlinie der Polarfläche einer Kurve C aus diesem Grunde auch als *Planevolute* von C. Die Beziehungen zwischen der Kurve und ihrer Planevolute siehe Nr. 19.

§ 4. Spezielle Kurvenklassen.

25. *Natürliche Gleichungen.* Eine Gleichung zwischen den Größen s, ϱ, r charakterisiert eine vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaft der Raumkurve und wird daher als *natürliche Gleichung* bezeichnet. *Eine Raumkurve ist, bis auf ihre Lage im Raume, durch zwei natürliche Gleichungen*

$$f(s, \varrho, r) = 0, \quad g(s, \varrho, r) = 0$$

bestimmt.

Sind die natürlichen Gleichungen einer Kurve gegeben, so erfordert die Bestimmung der „endlichen" Gleichungen, d. h. der Gleichungen für die Koordinaten, die Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung und die Ausführung von drei Quadraturen. (Darboux, *Surfaces I,* 19, 1887, G. Scheffers, *Theorie der Kurven,* 2. Aufl. 1914, S. 287.)

Eine Gleichung zwischen den natürlichen Koordinaten bestimmt eine natürliche Kurvenklasse. Die endlichen Gleichungen für die Koordinaten der Kurven einer Klasse sind durch drei Quadraturen zu finden. (S. Lie, *Christiania Videnskabs-Selsk. Forh.* Nr. **10**, p. 1, 1882, Salkowski, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **4**, 64 (1905).)

Alle Kurven der Klasse

$$\varrho = f(s)$$

werden erhalten, indem man die ebene Kurve, die diese natürliche Gleichung besitzt, konstruiert und ihre Ebene so verbiegt, daß die Tangenten geradlinig bleiben. Die endlichen Gleichungen können

durch fünf Quadraturen und Eliminationen folgendermaßen gewonnen werden: Man bestimmt aus:

$$\frac{ds}{d\tau} = f(s)$$

den Winkel:

$$\tau = \int \frac{ds}{f(s)}$$

und durch Umkehrung:

$$ds = \varphi(\tau)\, d\tau .$$

Sind dann α, β, γ drei Funktionen eines Parameters t, die durch die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ verknüpft sind, so wird durch die Gleichung:

$$d\tau = dt \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$$

τ als Funktion von t gefunden und sodann die Koordinaten:

$$x = \int \alpha\, ds, \quad y = \int \beta\, ds, \quad z = \int \gamma\, ds .$$

Alle Kurven der Klasse:

$$r = f(s)$$

werden aus einer von ihnen erhalten, indem man die Binormalenfläche beliebig derart verbiegt, daß die erzeugenden Geraden geradlinig bleiben. Die endlichen Gleichungen ergeben sich folgendermaßen: Nach Annahme dreier willkürlicher Funktionen α, β, γ eines Parameters t, die der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ genügen (d. h. nach willkürlicher Annahme des Tangentenbildes), findet man mit Hilfe der Frenetschen Gleichungen $l, m, \nu, \lambda, \mu, \nu$ $d\tau$, $d\sigma$. Sodann bildet man $\sigma = \int \frac{ds}{(fs)}$, woraus $s = \varphi(\sigma)$ folgt. Die Koordinaten ergeben sich dann durch Integrale derselben Form wie vorher.

Alle Kurven der Klasse:

$$\frac{\varrho}{r} = f(s)$$

besitzen rektifizierende Flächen, deren Gratlinien zu einer und derselben Klasse von Kurven:

$$\varrho_1 = \varphi(s_1)$$

gehören (Pirondini, *J. f. Math.* **109**, 238 (1892)).

Umgekehrt, verbiegt man die Ebene einer ebenen Kurve so, daß ihre Tangenten geradlinig bleiben, zu einer abwickelbaren

Fläche, so verwandeln sich alle Geraden der Ebene, sofern sie nicht gerade bleiben, in Raumkurven, die einer Kurvenklasse:

$$\frac{\varrho}{r} = f(s)$$

angehören.

Statt der Invarianten ϱ und r kann man auch die Winkel:

$$= \int \frac{ds}{\varrho} \quad \text{und} \quad \sigma = \int \frac{ds}{r}$$

als natürliche Koordinaten der Bogenlänge s an die Seite stellen. Dies ist von R. Hoppe, *Prinzipien der analyt. Kurventheorie*, Arch. Math. Phys. (1) **56**, 41 (1873) und Aoust, *Analyse inf. des courbes dans l'espace* (Paris 1876), zur Grundlage der Theorie benutzt worden.

26. *Die Schraubenlinien.* Die Kurven der Klasse:

(k konstant) sind die geodätischen Linien auf Zylinderflächen (oder: ihre rektifizierenden Flächen sind Zylinder); ihre Tangenten bilden mit einer festen Ebene einen konstanten Winkel φ[1]), ihre Schmiegungsebenen mit derselben Ebene denselben Winkel, und zwar ist

$$\operatorname{ctg} \varphi = k.$$

Die Hauptnormalen sind parallel ein und derselben Ebene. Legt man die Z-Achse parallel zu den Erzeugenden der zugehörigen Zylinderfläche, so sind die Schraubenlinien die Integralkurven der Mongeschen Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 - k^2 dz^2 = 0;$$

sie gehen aus den Minimalkurven (Nr. 12):

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 0$$

durch die Transformation

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \frac{i\zeta}{k}$$

hervor.

1) Sie sind daher *die Kurven konstanter Steigung* auf einer Fläche und zuerst von Lancret (a. a. O.) und Leroy, *Géométrie descriptive*, 5. Aufl. Paris 1855, behandelt worden. Betreffs der umfangreichen Literatur über diese Kurvenklasse vgl. Frieda Nugel, *Diss.*, Halle 1912.

Ihre endlichen Gleichungen lauten:

$$x = V' \cos v - V'' \sin v,$$
$$y = V' \sin v + V'' \cos v,$$
$$\frac{1}{k}(V + V''),$$

wobei V eine beliebige Funktion des Parameters v ist. Weiter wird:

$$ds = (V' + V''') \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} dv, \quad d\tau \quad k \quad dv, \quad d\sigma = \frac{dv}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\alpha = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos v, \quad \beta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sin v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}};$$

$$l = \sin v, \qquad m = \cos v, \qquad n = 0,$$

$$\lambda = -\frac{\cos v}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \mu \quad \frac{\sin v}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \nu = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\varrho = (V' + V''') \frac{1+k^2}{k^2}, \quad r = (V' + V''') \frac{1+k^2}{k}.$$

Der Orthogonalschnitt des rektifizierenden Zylinders habe die Bogenlänge s_0 und den Krümmungsradius ϱ_0; dann ist:

$$ds_0 = ds \cos \varphi = (V' + V''') dv,$$
$$\varrho_0 = \varrho \cos^2 \varphi = (V' + V''').$$

Die Polarkurve einer Schraubenlinie ist wieder eine Schraubenlinie; die Filarevolventen sind ebene Kurven, Evolventen nämlich des Orthogonalschnitts des zugehörigen Zylinders. Die Tangentenfläche einer Schraubenlinie schneidet eine feste Ebene unter konstantem Winkel; man bezeichnet sie daher als *Böschungsfläche*.

27. *Die gemeine Schraubenlinie.* Die geodätische Linie des Kreiszylinders heißt die gewöhnliche Schraubenlinie. Sie entsteht, wenn ein Punkt sich gleichförmig auf einem Kreise bewegt, der seinerseits gleichförmig senkrecht zu seiner Ebene fortschreitet. Ihre Krümmung und Torsion ist konstant. Ihre Gleichungen ergeben sich aus den Formeln der vorigen Nummer, indem man $V' + V''' = 1$, also am einfachsten $V' = a$ setzt.

Der Mittelpunkt der Schmiegungskugel fällt für sie mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammen (vgl. Nr. 31), und der Ort dieser Krümmungsmittelpunkte ist eine Schraubenlinie derselben Ganghöhe auf einem Kreiszylinder mit derselben Achse.

Die Hauptnormalen der gemeinen Schraubenlinien schneiden die Zylinderachse rechtwinklig und bilden eine Wendelfläche.

28. *Weitere spezielle Schraubenlinien.* 1. Die *zylindrokonische Schraubenlinie* ist die Kurve, die die Erzeugenden eines geraden Kreiskegels unter konstantem Winkel schneidet. Sie liegt als geodätische Linie auf einem Zylinder, dessen Orthogonalschnitt eine logarithmische Spirale ist. Ihre Krümmungsmittelpunktkurve, ihre Polarkurve und die Striktionslinie ihrer Hauptnormalenfläche sind ebenfalls zylindrokonische Schraubenlinien. Die Gleichungen der zylindrokonischen Schraubenlinie erhält man, indem man in die Formeln der Nr. 26 $V = e^{mv}$ einsetzt; sie lassen sich leicht in die Form transformieren:

$$x = h e^{mv} \cos v, \quad y = h e^{mv} \sin v, \quad z = \frac{h}{k} e^{mv}$$

Der Krümmungs- und Torsionsradius ist eine lineare Funktion der Bogenlänge. Die Kurve ist zuerst von Guido Grandi (Brief an Ceva 1701), dann sehr eingehend von P. Serret (*Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, Paris 1860) behandelt worden. Vgl. auch Schell, *Theorie der Kurven doppelter Krümmung*, 3. Aufl. 1914.

2. *Die sphärischen Schraubenlinien.* Die Kurven konstanter Steigung auf einer Kugel:

$$x = a\left[(1-c)\cos v - (1+c)\cos\left(\frac{1-c}{1+c}v\right)\right],$$

$$y = a\left[(1-c)\sin v - (1+c)\sin\left(\frac{1-c}{1+c}v\right)\right],$$

$$z = 2a\cos\left(\frac{c}{1+c}v\right),$$

deren Gleichungen sich in etwas anderer Form aus Nr. 26 ergeben, wenn man darin $V = A \cos \frac{}{\sqrt{1+k^2}}$ setzt, liegen auf Zylinderflächen mit epizykloidischer Basis als geodätische Linien. Sie entstehen, wenn auf einer Kugel ein größter Kreis auf einem kleinen Kreise abrollt, als Bahn eines festen Punktes auf dem rollenden Kreise, d. h. sie sind die sphärischen Evolventen eines kleinen Kugelkreises.

3. Weiter untersucht wurden: die Kurve konstanter Steigung auf dem Rotationsparaboloid (sie ist kongruent zu ihrer Polarkurve); die Kurven konstanter Steigung auf den Rotationsflächen zweiter Ordnung mit vertikaler Achse (ihre rektifizierenden Flächen

sind Zylinder, deren Normalschnitte Epizykloiden oder Hypozykloiden sind); die Schraubenlinien, deren Hauptnormalen eine feste Gerade schneiden (sie liegen als Kurven konstanter Steigung auf Zylindern zweiten Grades). (E. Barré, *J. de l'Éc. Polyt.* (2) **16** (1912)).

29. *Geodätische Linien auf Kegelflächen.* Die Kurven, deren rektifizierende Fläche ein Kegel ist, sind durch die natürliche Gleichung gegeben:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{k},$$

wobei die Bogenlänge s von dem Punkte an gemessen ist, in dem die Erzeugende des Kegels auf der Kurventangente senkrecht steht. (S. Enneper, Götting. Nachrichten 1866, 134. Zusammenfassende Darstellung von P. Schauff, *Diss.* Münster 1906. Vgl. Cesàro, *Geometria intrinseca*, Neapel 1896, deutsch u. d. T. *Vorlesungen über natürliche Geometrie* von Kowalewski, Leipzig 1901.) Die Gesamtheit der Kurven ist explizit angebbar:

$$k\left(\alpha \frac{d\sigma}{d\tau} - \lambda\right), \ldots,$$

wobei (α, β, γ) die Koordinaten des beliebig zu wählenden sphärischen Bildes der Tangenten bedeuten, aus denen sich $d\tau$ und die Koordinaten $(\lambda \mu \nu)$ des Binormalenbildes durch ausführbare Operationen herleiten lassen; auch $d\sigma$ ist als Bogenelement dieses Binormalenbildes ohne Integration zu finden.

Die Schmiegungsebenen haben von einem festen Punkte, der Kegelspitze, konstanten Abstand, umhüllen also eine Kugel.

Die Filarevolventen der Kegelgeodätischen sind sphärische Kurven. Ist eine Kegelgeodätische algebraisch, so ist sie auch algebraisch rektifizierbar.

Die Geodätische des Rotationskegels ist durch die Gleichungen gegeben:

$$x = p \frac{\cos (n + \frac{1}{2})t}{(2n+1) \sin \frac{t}{2}}, \quad y = p \frac{\sin (n + \frac{1}{2})t}{(2n+1) \sin \frac{t}{2}}, \quad z = 2p \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1) \sin \frac{t}{2}}.$$

Die Bogenlänge wird für sie:

$$s = p \operatorname{ctg} \frac{v}{2}.$$

30. *Die Bertrandschen Kurven.* Damit auf der Fläche der Hauptnormalen einer Raumkurve C eine zweite Kurve C_1 liegt,

die mit ihr die Hauptnormalen gemeinschaftlich hat, muß zwischen den Krümmungen von C eine lineare Gleichung:

$$\frac{A}{\varrho} + \frac{B}{r} = 1$$

bestehen. Die entsprechenden Punkte der beiden Kurven haben den konstanten Abstand A, und ihre Tangenten kreuzen sich unter dem konstanten Winkel φ, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{B}{A}$$

gegeben ist.

Die Formeln für die zu C zugeordnete Bertrandsche Kurve C_1 sind:

$$x_1 = x + Al, \ldots;$$

$$ds_1 = \varepsilon\, d\sigma \sqrt{A^2 + B^2};$$

$$\alpha_1 = \varepsilon \frac{B\alpha - A\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$l_1 = \varepsilon\varepsilon' l, \ldots,$$

$$\lambda_1 = \frac{A\alpha + B\lambda}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$d\tau_1 = \varepsilon' \frac{\left(\frac{B}{\varrho} - \frac{A}{r}\right)}{\sqrt{A^2 + B^2}} ds, \quad d\sigma_1 = \frac{\varepsilon\, ds}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\varrho_1 = \varepsilon\varepsilon' \frac{A^2 + B^2}{\frac{B}{\varrho} - \frac{A}{r}} \frac{1}{r}, \quad r_1 = \frac{A^2 + B^2}{r}.$$

$$r r_1 = A^2 + B^2.$$

Die Bertrandsche Relation für die zweite Kurve lautet:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon' A}{\varrho_1} + \frac{B}{r_1} = 1.$$

Zieht man zu den Binormalen einer Bertrandschen Kurve die Parallelen durch die entsprechenden Punkte der zugeordneten Kurve, so erfüllen diese Geraden eine Biegungsfläche eines Rotationshyperboloids. Umgekehrt: Verbiegt man ein Rotationshyperboloid so, daß die Geraden der einen Regelschar geradlinig bleiben, so geht der Kehlkreis in eine Bertrandsche Kurve über; läßt man das Hyperboloid auf seiner Biegungsfläche abrollen, so be-

schreibt seine Achse eine zweite Biegungsfläche desselben Hyperboloids, und die Striktionslinie dieser Fläche ist die zur ersten zugeordnete Bertrandsche Kurve. (Implicite schon bei Beltrami, dann von Laguerre und Bioche angegeben.) Aus diesem Sachverhalt folgt eine Transformation Bertrandscher Kurven, die von Razzaboni (*Atti del R. Istit. Veneto* **60**, 757 (1901), s. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Bd. **3**, 71, Pisa 1909) untersucht worden ist.

31. *Die Kurven konstanter Krümmung.* Ist in der Bertrandschen Relation $B = 0$, so besitzen beide Kurven die konstante Krümmung $\frac{1}{A}$; jede Kurve ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte und die Polarkurve der anderen; entsprechende Tangenten kreuzen sich rechtwinklig. Ihre Darstellung wird durch die Quadraturen gegeben; algebraisch sind gewisse Kurven konstanter Krümmung auf Rotationsflächen 2. Ordnung, die auf Böschungsflächen geodätisch sind (E. Salkowski, *Math. Ann.* **66**, 534 (1908)). Dies sind die einzigen bisher bekannten eigentlichen Bertrandschen Kurven, die algebraisch sind.

32. *Die Kurven konstanter Torsion.* Für $A = 0$ fallen die beiden Bertrandschen Kurven zusammen; die Kurven konstanter Torsion können daher als Grenzfall der Bertrandschen Kurve betrachtet werden. Sie haben für die Flächentheorie eine besondere Bedeutung: sie sind die Asymptotenlinien der Flächen konstanten Krümmungsmaßes; sie bestimmen ferner die Biegungsflächen des Rotationsparaboloids. Ihre Darstellung durch drei Quadraturen ist leicht, die Aufsuchung der algebraischen unter ihnen von Darboux angeregt und von Koenigs (*Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse* **1** E, 1, 1887), Lyon (*Thèse*, Paris 1890), Fabry (*Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **9**, 177 (1892)), Herberich (*Progr. Luitpoldrealsch.* München 1904), Gräbner (*Diss.* Würzburg 1909) und anderen in Angriff genommen.

33. *Cesàrosche Kurven.* Mit dem Hauptdreikant einer Bertrandschen Kurve sind zwei Scharen von ∞^1 geraden Linien verbunden, die bei jeder einzelnen Lage des Dreikants zwei hyperbolische Paraboloide erfüllen und bei der Bewegung des Dreikants längs der Kurve jede eine abwickelbare Fläche erzeugen. Die Frage nach den Kurven, bei denen es eine endliche Anzahl von geraden Linien gibt, die abwickelbare Flächen erzeugen, führt auf gewisse Kurven der Klasse:

$$\frac{A}{\varrho^2} + \frac{B}{\varrho r} + \frac{C}{r^2} = \frac{P}{\varrho} + \frac{Q}{r},$$

bei denen vier reelle oder imaginäre Geraden der gesuchten Art existieren. (Literaturübersicht bei Joachimi, *Diss.* Münster 1911; die vollständige Diskussion des Problems bei Salkowski, *Münch. Ber.* 1911, S. 523.)

34. *Komplexkurven.* Für einen Linienkomplex:

$$F(dx, dy, dz, ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx) = 0$$

gibt es Kurven, deren Tangenten diesem Komplex angehören; man nennt sie *Komplexkurven.* Beispiele sind schon früher behandelt: die Minimalkurven (Nr. 12) gehören dem quadratischen Komplex der Minimalgeraden:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

an, die Schraubenlinien (Nr. 26) dem quadratischen Komplex:

$$dx^2 + dy^2 - m^2 dz^2 = 0 .$$

Die Theorie der Komplexkurven ist insbesondere von S. Lie gefördert worden. (S. Lie und Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen,* Leipzig 1896. Vgl. auch den Artikel Scheffers, *Besondere transzendente Kurven, Math. Enzykl.* III D 4, Nr. 35.)

Die *Kurven des linearen Komplexes* haben die Gleichungsform:

$$ydx - xdy = kdz,$$

$$x = t\sqrt{f'(t)}, \quad y = \sqrt{f'(t)}, \quad z = \frac{1}{k} f(t),$$

die *Kurven des tetraedralen Komplexes:*

$$(b-c)x\,dy\,dz + (c-a)y\,dz\,dx + (a-b)z\,dx\,dy = 0,$$

$$x = e^{\int \frac{f(t)}{a+t}dt} \quad y = e^{\int \frac{f(t)}{b+t}dt} \quad z = e^{\int \frac{f(t)}{c+t}dt}$$

Das Integralzeichen läßt sich vermeiden, wenn man:

$$f(t) = (a+t)(b+t)(c+t)F'''(t)$$

setzt. Zu diesen Kurven treten alle von der Gleichungsform:

$$x^\alpha = At, \quad y^\beta = Bt, \quad z^\gamma = Ct,$$

wobei α, β, γ drei Konstanten bedeuten, zwischen denen die Beziehung:

$$(b-c)\alpha + (c-a)\beta + (a-b)\gamma = 0$$

besteht.

35. *Weitere Kurvenklassen.* Außer der Liniengeometrie ist auch die Theorie der Flächen eine Quelle für besondere Kurvenklassen, die hier nur ganz kurz aufgezählt sein mögen.

1. Die *Asymptotenlinien der Rotationsflächen* sind Raumkurven, deren Binormale eine feste Gerade schneiden (d. i. einem speziellen linearen Komplex angehören), so daß:

$$\mu x - \lambda y = 0.$$

2. Die *geodätischen Linien auf Rotationsflächen* sind Raumkurven, deren Hauptnormalen eine feste Gerade schneiden. Es wird also für sie:

$$m x - l y = 0.$$

3. Die *Loxodromen* sind Raumkurven, die die Ebenen eines Büschels unter konstantem Winkel schneiden; sie sind durch die Mongesche Gleichung:

$$(x\,dy - y\,dx)^2 - (x^2 + y^2)\sin^2\varepsilon\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0$$

bestimmt; ihre endlichen Gleichungen sind ohne Quadraturen angebbar. (Vgl. G. Scheffers, *Über Loxodromen, Leipz. Ber.* **54**, 363 (1902), E. Salkowski, *Schraubenlinien und Loxodromen, Sitzungsberichte d. Berlin. Math. Ges.* **7**, 83 (1908)).

4. Die *Sonnenuhrkurven* sind Kurven, von denen die Ebenen eines Büschels Bogenstücke abschneiden, die proportional dem Winkel der Ebenen ist:

$$ds = k\,d\varphi.$$

Sie stehen mit den Kurven auf einem Katenoid in einer bemerkenswerten Beziehung. Zu ihnen gehören die Krümmungsmittelpunktskurven der sphärischen Schraubenlinien. (G. Scheffers, *Über Sonnenuhrkurven, Sitzungsber. d. Berlin. Math. Ges.* **8**, 122 (1909), E. Salkowski, *Katenoid und Sonnenuhrkurven*, ebenda Bd. **10**, 23 (1910)).

5. Weitere Raumkurven, die eingehender untersucht wurden, sind die *Clelien* (Guido Grandi, *Flores geometrici,* Florenz 1728):

$$x = a \sin t \cos nt$$

$$y = a \sin t \sin nt$$

$$z = a \cos t;$$

zu ihnen gehört die *Spirale des Pappus* (Pappus, *Sammlung,* 4. Buch) für $n = 4$, die *Vivianische Kurve* (Viviani, Florenz 1692) für $n = 1$, ferner die *sphärischen Kegelschnitte*, s. Heger, *Analytische Geometrie auf der Kugel,* Leipzig 1908, die *sphärischen Zykliden,* s. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algebriques,* Paris 1873, die *sphärischen Epizykloiden* (Hermann, *De epicycloidibus in sup. sphaer. descr.,* Comment. Ac.

Petrop. **1**, 210 (1728), Joh. Bernoulli, *Opera* III, 216 u. 230), die *sphärische Loxodrome* (P. Nuñez, *Tratado da carta de marear*, Lissabon 1537). Ausgedehnte Untersuchungen über sphärische Kurven sind Gudermann zu verdanken, s. *Analytische Sphärik*, Köln 1830; *J. f. Math.* **11**, 394 (1830), *J. f. Math.* **33**, 189 (1846). Eine historische Darstellung der Untersuchungen über besondere Raumkurven gibt F. Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Bd. 2 (Obras sobre Mathematica, vol. V, Coimbra 1909).

§ 5. Zugeordnete Kurven. Weitere Fragestellungen.

36. Lassen sich zwei Raumkurven so zuordnen, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten parallel sind, so nennt man sie *parallel*. Gelegentlich nennt man zwei Raumkurven erst dann parallel, wenn ihre Normalebenen zusammenfallen (vgl. G. Scheffers, *Theorie der Kurven*, Anhang, Taf. VIII). Hier sei die Bezeichnung in allgemeinem Sinne gebraucht. Parallele Raumkurven haben dieselben Tangentenbilder, also auch dieselben Bilder der Hauptnormalen und der Binormalen. Sind (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) parallele Kurven, so ist:

$$\frac{dx}{\varrho} = \frac{dx_1}{\varrho_1}, \ldots, \frac{dx}{r} = \frac{dx_1}{r_1}, \ldots, \frac{ds}{\varrho} = \frac{ds_1}{\varrho_1}; \ \frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r_1}; \ \frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho_1}{r_1}.$$

Die Theorie der Parallelkurven ist in neuerer Zeit vielfach zur Darstellung der endlichen Gleichungen von Kurven verwertet worden. S. J. N. Hatzidakis, *Über invariante Differentialausdrücke*. J. f. Math. **104**, 101 (1889). E. Salkowski, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* **4**, 64 (1905). R. v. Lilienthal, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 2. Bd., S. 97 (1913).

Ist das Tangentenbild T gegeben, so kann man die endlichen Gleichungen der Kurven C einer Familie von Parallelkurven ohne Quadraturen angeben. (E. Salkowski, *Math. Ann.* **67**, 445 (1909).) Als natürliche Gleichung von T bezeichnet man zweckmäßig eine Beziehung $\tau = \varphi(\sigma)$ zwischen Krümmungs- und Torsionswinkel der Kurven C. Für $\tau = k\sigma$ ist T ein Kreis, und die Kurven C sind Schraubenlinien. Für $\tau^2 + \sigma^2 = k^2$ ist T eine sphärische Schraubenlinie, die Kurven C sind geodätische Linien auf Böschungsflächen. Sie sind von Aoust (*Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, Paris 1876, p. 126) als *Zykliden* bezeichnet worden.

Kurven, deren Hauptdreikante in entsprechenden Punkten in anderer Weise gesetzmäßig orientiert sind, weisen bemerkenswerte

Beziehungen in ihren Krümmungseigenschaften auf. Sie sind von Hatzidakis (*Nyt Tidsskr. f. Math.* **13**, 49 (1902)), Sannia (*Rend. Circ. Mat.* **20**, 83 (1905)), E. Salkowski (*Math. Ann.* **66**, 517 (1908)), Razzaboni (*Bologna Mem.* (6) **7**, 109 (1911)) untersucht worden.

37. *Normale und asymptotische Zuordnung.* Als Kurvenpaar bezeichnet man nach Voß (*Münch. Ber.* **39** (1909), 19. Abh.) zwei Kurven, bei denen jeder Punkt der einen Kurve in der Normalebene des zugeordneten Punktes der anderen Kurve gelegen ist. Zwei beliebige Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer geradlinigen Fläche bilden ein Kurvenpaar. Bianchi nennt die Kurven eines Paares normal zugeordnet.

Zwei Kurven heißen asymptotisch zugeordnet, wenn die Punkte der einen Kurve in den Schmiegungsebenen der zugeordneten Punkte der zweiten Kurve liegen. Bemerkenswert ist die asymptotische Zuordnung der Kurven konstanter Torsion, die mit der sogen. Bäcklundschen Transformation zusammenhängt. Vgl. Bianchi, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **25**, 291 (1908).

38. *Die Schmiegungsschraubenlinie.* Es gibt einfach unendlich viele gewöhnliche Schraubenlinien, die eine gegebene Raumkurve in zweiter Ordnung berühren; ihre Achsen schneiden die Hauptnormale senkrecht und erfüllen ein Zylindroid (Plückersches Konoid). Unter diesen Schraubenlinien gibt es eine, die mit der Kurve nicht nur Bogenelement und Krümmung, sondern auch Torsion gemeinsam hat (aber i. a. nicht auch den Mittelpunkt der Schmiegungskugel). Sie heißt die *Schmiegungsschraubenlinie*; ihre Achse fällt mit dem Striktionsstrahl der Hauptnormalenfläche zusammen, ist also zur rektifizierenden Geraden parallel. Eine ausführliche Darstellung des Gegenstandes findet man bei Gräbner (*Arch. Math. Phys.* (3) **20**, 16 (1912)).

Die Schmiegungsschraubenlinie hat mit der Raumkurve zwei benachbarte Lagen des Hauptdreikants gemeinsam, sie kann also die Kurve ersetzen, wenn es sich um eine infinitesimale Bewegung des Hauptdreikants handelt.

Die Achsenfläche der Schmiegungsschraubenlinie ist das Striktionsband der Hauptnormalenfläche; sie ist abwickelbar, wenn diese orthogonale Striktion besitzt, und dies tritt ein, wenn die Kurve eine Mannheimsche Kurve $\mathfrak{r}^2 = \varrho k$ ist.

39. *Die zylindrokonische Schmiegungsschraubenlinie.* Die Schmiegungsschraubenlinie hat nur dann eine Berührung 3. Ordnung mit der gegebenen Raumkurve, wenn diese konstante Krümmung besitzt; dagegen gibt es immer eine eindeutig bestimmte

zylindrokonische Schraubenlinie (s. Art. 28), die mit der Kurve vier benachbarte Punkte gemein hat. Diese zylindrokonische Schraubenlinie spielt also für alle Fragen des Infinitesimalen 3. Ordnung dieselbe Rolle wie der Krümmungskreis für die Berührung 2. oder die Tangente für das Infinitesimale 1. Ordnung.

40. *Die zyklifizierenden Flächen.* Jede Raumkurve C gehört einer abwickelbaren Fläche an, auf der sie eine geodätische Linie ist, der rektifizierenden Fläche; sie gehört auch einer abwickelbaren Fläche F_l an, bei deren Ausbreitung in die Ebene sie sich in einen Kreis von gegebenem Radius l verwandelt (nur muß $l > \varrho$ sein). Sie ist auf dieser Fläche ein geodätischer Kreis von der konstanten geodätischen Krümmung $1 : l$. Die Fläche F_l heißt die *zum Radius l gehörige zyklifizierende Fläche der Kurve.* Sie wird umhüllt von den Ebenen, die durch die Tangenten der Kurven und diejenigen Normalen gelegt sind, von denen die Krümmungsachse die Strecke l abschneidet. Die Schnittpunkte mit der Krümmungsachse heißen die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung der Kurve bzw. der Fläche F_l. Sie erfüllen auf der Polarfläche von C eine Kurve C_1, die mit C ein orthogonales Kurvenpaar bildet, und C und C_1 haben in weitem Umfang reziproke Eigenschaften. S. Molins, *Journ. de Math.* (2) **1**, 265 (1856), auch Schell, *Theorie der Kurven,* 3. Aufl. Kap. 14. Hierauf gründet sich eine geometrische Theorie der geodätischen Krümmung.

41. *Die Evolutoiden.* Konstruiert man durch die Punkte einer Kurve gerade Linien, die mit der Tangente einen konstanten Winkel bilden und eine abwickelbare Fläche erfüllen, so nennt man die Gratlinie dieser Fläche Evolutoide (schiefe Evolute). Jedem Winkel α entsprechen ∞^1 Evolutoiden, die als geodätische Linien auf einer Fläche, der Evolutoidenfläche, liegen. Die Polarfläche entspricht dem besonderen Falle $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (vgl. Nr. 22). S. Lancret, *Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables, Paris Mém. des Sav. Étr.* **2**, 1811.

Kapitel XLI.

Allgemeine Flächentheorie.

Von *E. Salkowski* in Hannover.

§ 1. Allgemeine Theorie der Flächen.

(Die Fläche in der Umgebung eines Punktes.)

1. *Darstellung.* a) Sind x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume, so stellt eine Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

eine krumme Fläche analytisch dar. In der Folge wird F als reguläre (analytische) Funktion vorausgesetzt. In jedem nicht singulären Punkte besitzt die Fläche eine *Normale*, deren Richtungskosinus

$$X = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \ldots \tag{2}$$

sind[1]), wobei die partielle Differentiation nach einer unabhängigen Veränderlichen hier wie in der Folge stets durch den Index angedeutet ist.

Die Tangenten an alle Kurven der Fläche, die durch einen Flächenpunkt (x, y, z) gehen, liegen in einer Ebene, der *Tangentialebene*

$$F_x(\xi - x) + F_y(\eta - y) + F_z(\zeta - z) = 0. \tag{3}$$

Ist gleichzeitig mit $F = 0$ auch $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$, so wird die Normale unbestimmt und die Tangenten liegen nicht in einer Ebene, sondern auf einem Kegel 2^{ten} Grades, der in besonderen

1) Die angehängten Punkte bedeuten, daß der hingeschriebenen Gleichung zwei gleichartige für die übrigen Koordinaten durch zyklische Vertauschung an die Seite zu stellen sind. Die angesetzten Koordinatenindices bedeuten die Differentiation nach der betreffenden Koordinate.

Fällen degenerieren kann. Solche *Knotenpunkte* auf der Fläche werden für die differentialgeometrische Behandlung als *singuläre Punkte* von der Betrachtung ausgeschlossen.

b) Löst man die Gleichung (1) nach einer der Koordinaten, z. B. z auf, so erhält man die unsymmetrische, aber für viele Aufgaben zweckmäßige Darstellung

$$z = f(x, y). \tag{1a}$$

Es ist üblich

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

$$z_{xx} = r, \qquad z_{xy} = s, \qquad z_{yy} = t$$

zu setzen. Dann nehmen die Richtungskosinus der Normalen die Form

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \tag{2a}$$

an, und die Gleichung der Berührungsebene wird:

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z \tag{3a}$$

c) Während die beiden ersten Darstellungen, die von Euler und Meusnier eingeführt und seither insbesondere in den Arbeiten von Monge (*Application de l'analyse à la géométrie*, Paris 1807) und seiner Schule vielfach benutzt wurden, auch heute noch bei vielen Einzelproblemen mit Nutzen angewandt werden, hat sich für die Weiterentwicklung der Theorie eine andere Darstellung als zweckmäßig erwiesen, die an die Parameterdarstellung der Raumkurven anknüpft, und deren systematische Einführung wir C. F. Gauß (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Göttingen 1828; Werke Bd. 4) verdanken. Sind x, y, z drei (analytische) Funktionen zweier Veränderlichen u, v mit gemeinsamem Existenzbereich

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v), \tag{4}$$

so stellen diese drei Gleichungen die Koordinaten eines Punktes einer (analytischen) Fläche dar, wenn nicht alle drei Funktionaldeterminanten

$$x_u y_v - x_v y_u, \quad y_u z_v - y_v z_u, \quad z_u x_v - z_v x_u$$

gleichzeitig identisch verschwinden.

Dabei pflegt stillschweigend vorausgesetzt zu werden, daß die drei Funktionen sich innerhalb des betrachteten Flächenstücks

regulär verhalten, überhaupt „alle die Eigenschaften besitzen, deren Einführung den Gang der jeweiligen Untersuchung als notwendig oder zweckmäßig erscheinen läßt" (Knoblauch, *Grundlagen der Differentialgeometrie*, S. 1). Da diese Eigenschaften nicht immer ausdrücklich formuliert werden, ist der Gültigkeitsbereich sehr vieler Ergebnisse bisher noch nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit festgestellt. (Vgl. E. Study, *Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver.* **17**, 1908, S. 125—142, Rezension von Bianchis Differentialgeometrie *Arch. d. Math. u. Phys.* (3) **18**, 1911, S. 169, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **12**, 1912, S. 53.)

Die Punkte, für die $v =$ konst. oder $u =$ konst. ist, bilden je eine Schar von Kurven auf der Fläche, die durch den Parameter u oder v dargestellt werden. Man bezeichnet sie als die *Parameterkurven* oder *Koordinatenlinien* der Fläche.

Die Darstellung (b) ist ein besonderer Fall der Parameterdarstellung, wenn man diese in der Form

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v)$$

ansetzt. Es gibt unendlich viele krummlinige Koordinatensysteme auf einer Fläche. Ihre Transformation s. Nr. 5.

2. *Linienelement, Flächenelement, Winkel auf der Fläche in krummlinigen Koordinaten.* Bezeichnet man mit ds das *Bogenelement*, d. h. den Abstand zweier benachbarter Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ der Fläche, so wird

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sich in krummlinigen Koordinaten in der Form

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \tag{5}$$

darstellen, wobei

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned} \tag{6}$$

gesetzt ist. Die rechte Seite von (5) nennt man die *erste Fundamentalform* der Fläche, die Größen E, F, G ihre *Fundamentalgrößen erster Ordnung.* Die Geometrie auf der Fläche ist wesentlich an diese quadratische Differentialform (5) geknüpft.

Als *Flächenelement* dO der Fläche bezeichnet man das Viereck, das durch zwei benachbarte Koordinatenlinienpaare u, $u + du$ und v, $v + dv$ begrenzt wird; es wird:

$$dO = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{7}$$

Der *Koordinatenwinkel* w ist gegeben durch

(8) $$\cos w = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin w = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Die Koordinatenlinien schneiden sich *rechtwinklig*, wenn

(9) $$F = 0$$

ist.

Die Tangentenrichtung einer jeden von einem Punkt (u, v) der Fläche ausgehenden Kurve ist durch den Zuwachs du, dv gekennzeichnet, den die krummlinigen Koordinaten längs der Kurve erfahren. Sind (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ zwei Kurvenrichtungen, $ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$ und $\delta s = \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u \delta v + G\delta v^2}$ die Bogenelemente dieser Kurven, so ist der Winkel ε dieser beiden Kurven bestimmt durch:

(10) $$\cos \varepsilon = \frac{E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G du\delta v}{ds\delta s},$$
$$\sin \varepsilon = \sqrt{EG - F^2}\,\frac{du\delta v - dv\delta u}{ds\delta s}$$

(vgl. auch Nr. 4, Formel 10a).

Insbesondere ist für den Winkel ϑ der Richtung (du, dv) mit der Linie $v = $ konst.:

(11) $$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right).$$

3. *Flächennormale, Tangentialebene.* Die Flächennormale ist dadurch gekennzeichnet, daß sie auf allen Kurven der Fläche, also auch auf den Koordinatenlinien senkrecht steht. Aus dieser Bedingung ergibt sich für ihre Richtungskosinus X, Y, Z:

(12) $$X = \frac{1}{T}\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$$

wobei

(13) $$T^2 = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}^2 = EG - F^2$$

ist. Die Gleichung der Berührungsebene ist:

(14) $$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z)$$

oder

(14a) $$\begin{vmatrix} \xi - x & x_u & x_v \\ \eta - y & y_u & y_v \\ \zeta - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Differentialparameter.* Ist eine Kurve auf der Fläche durch eine Beziehung

$$\varphi(u, v) = \text{konst.}$$

zwischen den krummlinigen Koordinaten definiert, so lassen sich die Fortschreitungsrichtungen längs der Kurve durch die Gleichung

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\varphi_v}{\varphi_u}$$

bestimmen. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (10) und (11) ein, so erhält man Ausdrücke, die in der Theorie außerordentlich häufig wiederkehren und die daher vorweggeschickt sein mögen (Beltrami, *Giorn. di Mat.* **2**, 1864, S. 267; **3**, 1865, S. 15. *Opere* I, 1902, S. 107).

1. Der *Differentialparameter erster Ordnung*:

$$(15) \qquad \Delta_1 \varphi = \frac{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}.$$

2. Der *Zwischenparameter* zweier Funktionen φ, ψ:

$$(16) \quad \Delta(\varphi, \psi) = \frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v}}{EG - F^2}$$

und der *Differentialparameter zweiter Ordnung*:

$$(17) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right).$$

Offenbar ist

$$\Delta(\varphi, \varphi) = \Delta_1 \varphi.$$

Dann ist der Winkel der Kurve $\varphi =$ konst. mit der Kurve $\psi =$ konst.:

$$(10\text{a}) \quad \cos\varepsilon = \frac{-\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}\sqrt{\Delta_1 \psi}}, \quad \sin\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \frac{(\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}\sqrt{\Delta_1 \psi}}$$

und die *Orthogonalitätsbedingung*:

$$(10\text{b}) \qquad \Delta(\varphi, \psi) = 0.$$

Alle Differentialparameter einer Funktion φ lassen sich durch Δ_1, Δ, Δ_2 ausdrücken; es sei noch der folgende für die Theorie der Abwickelung [Nr. **41** (121)] grundlegende Ausdruck bemerkt:

$$\Delta_{22}\varphi = \frac{2\Delta_2 \varphi \Delta(\varphi, \Delta_1 \varphi) - \Delta_1(\Delta_1 \varphi)}{4\Delta_1 \varphi}.$$

Weiter sind hervorzuheben die *Differentialparameter der Koordinaten*:

$$(18)\qquad \begin{aligned} \Delta_1 x &= 1 - X^2, \quad \ldots \\ \Delta(x, y) &= \;\; - XY, \quad \ldots \\ \Delta_2 x &= \quad HX, \quad \ldots \\ \Delta_{22} x &= \quad X^2 K, \quad \ldots \end{aligned}$$

Ferner wird, wenn

$$(19)\qquad \varrho = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

und

$$(20)\qquad W = Xx + Yy + Zz$$

eingeführt wird,

$$(21)\qquad \Delta_1 \varrho = 2\varrho - W^2$$

[illegible]

Hierbei bedeutet H die mittlere Krümmung und K das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche (s. Nr. 8).

5. *Transformation der krummlinigen Koordinaten.* Das Koordinatensystem (u, v) ist in weitem Maße willkürlich auf der Fläche; wählt man z. B. an Stelle von (u, v) das Kurvensystem $\varphi =$ konst., $\psi =$ konst. als Koordinatenlinien, so werden sich x, y, z als Funktionen von φ, ψ ausdrücken und das Bogenelement wird jetzt durch die Form

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + 2 F_1 d\varphi d\psi + G_1 d\psi^2$$

dargestellt, wobei die transformierten Fundamentalgrößen die Form

$$(22)\qquad \begin{gathered} E_1 = \frac{\Delta_1 \psi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \Delta(\varphi, \psi)^2}, \qquad F_1 = \frac{-\Delta(\varphi, \psi)}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \Delta(\varphi, \psi)^2} \\ G_1 = \frac{\Delta_1 \varphi}{\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \Delta(\varphi, \psi)^2} \end{gathered}$$

annehmen.

6. *Krümmung einer Flächenkurve. Der Meusniersche Satz. Fundamentalgrößen 2. Ordnung.* Die Krümmung einer beliebigen Kurve C auf der Fläche in einem Punkte P ist identisch mit der Krümmung der ebenen Kurve, in der die Fläche von der Schmiegungsebene von C in P geschnitten wird. Für diese ebenen Schnitte der Fläche gilt der Meusniersche Satz (Paris, *Mém. des Sav. Étr.*, 1785):

Konstruiert man in einem Punkte P einer Fläche die Krümmungskreise aller Kurven, die die Tangente gemeinsam haben, so

liegen ihre Mittelpunkte auf einem Kreise, der die Fläche in P berührt. Ist ϱ_1 der Krümmungsradius einer Kurve, deren Ebene mit der Normale den Winkel φ bildet, ϱ der Krümmungsradius des Normalschnitts, so ist:

$$\varrho_1 = \varrho \cos \varphi. \tag{23}$$

Den Ausdruck $k = \frac{1}{\varrho}$ bezeichnet man als die *Normalkrümmung* der Flächenkurve. Analytisch ergibt sich diese Normalkrümmung durch die *zweite Fundamentalform* der Fläche:

$$k\,ds^2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2, \tag{24}$$

deren Koeffizienten

$$\begin{aligned} L &= -\Sigma x_u X_u &&= \Sigma X x_{uu} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ M &= -\Sigma x_u X_v = -\Sigma x_v X_u &&= \Sigma X x_{uv} = \frac{s}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \\ N &= -\Sigma x_v X_v &&= \Sigma X x_{vv} = \frac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \end{aligned} \tag{25}$$

als *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung* bezeichnet werden.

7. *Hauptkrümmungen. Der Eulersche Satz.* Legt man durch eine Flächennormale sämtliche Ebenen, so entspricht jeder Ebene eine bestimmte Normalkrümmung; den kleinsten und größten Wert bezeichnet man mit k_1 und k_2 und nennt sie die *Hauptkrümmungen*; sie liegen in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, den *Hauptkrümmungsebenen* der Fläche (s. Nr. 16), und sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(EG - F^2)k^2 - (GL - 2FM + EN)k + (LN - M^2) = 0. \tag{26}$$

In einer Ebene, die mit der Ebene von k_1 den Winkel ϑ bildet, ist die Normalkrümmung

$$k = k_1 \cos^2 \vartheta + k_2 \sin^2 \vartheta. \tag{27}$$

(Eulerscher Satz, Berlin, *Hist. de l'Ac. des Sciences 1760* [t. 16], 1767.)

8. *Krümmungsmaß und mittlere Krümmung.* Die Koeffizienten der Gleichung (18) haben eine besondere Bedeutung: man bezeichnet

$$k_1 + k_2 = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{28}$$

als die *mittlere Krümmung* H,

$$(29)\qquad k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$$

als das *Krümmungsmaß* K der Fläche. Das letztere ist dadurch ausgezeichnet, daß es sich durch die Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihre Ableitungen allein ausdrücken läßt (Gauß, *Disquisit. c. sup. curv.*):

$$(30)\qquad \begin{aligned} K = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} & [E(E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2) \\ & + G(E_u G_u - 2F_v E_u + E_v^2) \\ & + F(E_u G_v - E_v G_u + 4F_u F_v - 2F_u G_u - 2F_v E_v) \\ & + 2(EG - F^2)(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu})]. \end{aligned}$$

Man bezeichnet daher (nicht ganz korrekt) K häufig als das *Krümmungsmaß der Form* (4). Eine zweite geometrische Bedeutung der Größe K s. Nr. 12.

Bei Spezialisierung des Koordinatensystems nimmt K wesentlich einfachere Formen an. S. Nr. 14, 17, 18.

Für die erste Flächendarstellung wird

$$(31)\qquad \begin{aligned} H &= -(X_x + Y_y + Z_z), \\ K &= (Y_y Z_z - Y_z Z_y) + (Z_z X_x - Z_x X_z) + (X_x Y_y - X_y Y_x). \end{aligned}$$

$$K = \frac{-1}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^2} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}$$

9. *Die Dupinsche Indikatrix.* Das Vorzeichen des Krümmungsmaßes kennzeichnet den Flächenverlauf in der Umgebung eines Punktes. Wenn man zu der Berührungsebene eines Flächenpunktes eine Parallelebene durch infinitesimale Verschiebung konstruiert, so schneidet diese die Fläche in einem (reellen oder imaginären) Kegelschnitt, der Dupinschen *Indikatrix* (*Développements de géométrie*, Paris 1813); diese ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem das Krümmungsmaß der Fläche an der Stelle positiv oder negativ ist. Man bezeichnet daher ein Flächenstück, für das

$K > 0$ als *elliptisch* gekrümmt,

$K < 0$ als *hyperbolisch* gekrümmt.

Entsprechend heißt eine Fläche in den Punkten, für die

$$K = 0\,,\ \textit{parabolisch}\ \text{gekrümmt.}$$

Indessen ist hier die Dupinsche Indikatrix kein Kegelschnitt, sondern eine Parabel dritter Ordnung, die im betrachteten Punkte eine Spitze aufweist (Scheffers, *Th. d. Fl.* S. 171).

Die Achsen der Indikatrix fallen in die Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche.

10. *Die Christoffelschen Verbindungen.* Es ist geometrisch klar, daß die zweiten Ableitungen x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} der Koordinaten nach den Parametern sich durch die ersten und die Richtungskosinus der Flächennormalen linear darstellen lassen; die Koeffizienten dieser Gleichungen sind von Christoffel (*J. f. Math.* **70**, 1869, *Gesammelte Abh.* **1**, 1910, S. 352) folgendermaßen bezeichnet worden:

$$\begin{aligned}
&(EG - F^2) \left\{ {11 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2}\, G E_u - F F_u + \frac{1}{2}\, F E_v\,,\\
&(EG - F^2) \left\{ {11 \atop 2} \right\} = E F_u - \frac{1}{2}\, E E_v - \frac{1}{2}\, F E_u\,,\\
&(EG - F^2) \left\{ {12 \atop 1} \right\} = \frac{1}{2}\, G E_v - \frac{1}{2}\, F G_u\,,\\
(32)\qquad &(EG - F^2) \left\{ {12 \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}\, E G_u - \frac{1}{2}\, F E_v\,,\\
&(EG - F^2) \left\{ {22 \atop 1} \right\} = G F_v - \frac{1}{2}\, G G_u - \frac{1}{2} F G_v\,,\\
&(EG - F^2) \left\{ {22 \atop 2} \right\} = \frac{1}{2}\, E G_v - F F_v + \frac{1}{2}\, F G_u\,.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Darstellung der zweiten Ableitungen ergibt sich dann aus den Gleichungen (Gauß, *Disquis.*):

$$\begin{aligned}
&- \left\{ {11 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_v = LX, \ldots\\
(33)\qquad &- \left\{ {12 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {12 \atop 2} \right\} x_v = MX, \ldots\\
x_{vv} &- \left\{ {22 \atop 1} \right\} x_u - \left\{ {22 \atop 2} \right\} x_v = NX, \ldots
\end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen bezeichnet man als die *kovarianten zweiten Differentialquotienten* von $x, \ldots$ bezügl. der Grundform (5) (Ricci, *Teoria delle superficie* 1898).

11. *Die Gauß-Mainardischen Gleichungen.* Eine Fläche, von der die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung gegeben sind, ist bis auf ihre Lage im Raume eindeutig gegeben. (Bonnet, *J. de l'Éc. Pol. cah.* **42** [1867].) Ihre Bestimmung erfordert die Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung und drei Quadraturen. Indessen sind E, F, G, L, M, N nicht willkürliche Funktionen von u und v, sondern durch drei Differentialgleichungen miteinander verbunden. Die erste Gleichung ist schon von Gauß gefunden und ergibt sich unmittelbar, wenn man in die Gleichung (29), d. h.

$$(34) \qquad (EG - F^2)\,K = LN -$$

den aus (30) folgenden Wert von K einsetzt. Die beiden übrigen von Mainardi (*Giorn. dell' Ist. Lomb.* **9**, 1857, p. 395) und Codazzi (*Ann. di Mat.* (2) **2**, 1868) gefundenen Gleichungen lauten:

$$(35) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N &= \frac{\partial M}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} M \\ \frac{\partial M}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N &= \frac{\partial N}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} M. \end{aligned}$$

Einen besonders durchsichtigen Beweis für den Bonnetschen Satz gibt Scheffers (*Th. d. Fl.* 2. Aufl. S. 341). Vgl. auch Kill, *Beitr. z. Fundamentalproblem der Flächentheorie*, Diss. Straßburg 1910.

12. *Die sphärische Abbildung einer Fläche nach Gauß.* Zieht man durch den Nullpunkt zu allen Normalen einer Fläche F die Parallelen, so schneiden diese die Einheitskugel in Punkten mit den Koordinaten X, Y, Z (Richtungskosinus der Normalen). Auf diese Weise ist einem jeden Punkte der Fläche (x, y, z) innerhalb eines bestimmten Bereiches ein Punkt (X, Y, Z) eindeutig zugeordnet, und einem einfach zusammenhängenden Flächenstück der Oberfläche F entspricht ein einfach zusammenhängendes Stück auf der Kugeloberfläche. Ist dO ein Flächenelement der gegebenen Fläche, $d\mathfrak{O}$ das entsprechende der Bildkugel, so ist das Verhältnis

$$(36) \qquad \frac{dO}{d\mathfrak{O}} = K$$

gleich dem Gaußschen Krümmungsmaß (s. Nr. 8) der Fläche F. Den Parameterkurven u, v auf F entspricht ein System von Parameterlinien der Einheitskugel. Nennt man $d\mathfrak{s}$ das Bogenelement

der Bildkugel, bezogen auf die Linien u, v, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, ihre Fundamentalgrößen 1. Ordnung, so wird

$$(37)\qquad d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}dudv + \mathfrak{G}dv^2,$$

während die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung gleich den entsprechenden erster Ordnung mit negativen Vorzeichen sind. Zwischen den Fundamentalgrößen der Fläche F und denen ihrer Bildkugel bestehen folgende Beziehungen:

$$(38)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\mathfrak{L} = HL - KE = \frac{GL^2 - 2FLM + EM^2}{EG - F^2}, \\ \mathfrak{F} &= -\mathfrak{M} = HM - KF = \frac{GLM - F(M^2 + LN) + EMN}{EG - F^2} \\ \mathfrak{G} &= -\mathfrak{N} = HN - KG = \frac{GM^2 - 2FMN + EN^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Da entsprechende Tangentialebenen von F und der Bildkugel parallel sind, müssen die Ableitungen von X nach den Parametern sich durch die von x linear und homogen ausdrücken lassen und umgekehrt; die entsprechenden Gleichungen sind (Weingarten, *J. f. Math.* **59**, 1861):

$$(39)\qquad \begin{aligned} (EG - F^2)X_u &= (FM - GL)x_u + (FL - EM)x_v, \ldots \\ (EG - F^2)X_v &= (FN - GM)x_u + (FM - EN)x_v, \ldots \end{aligned}$$

und ihre Umkehrungen:

$$(40)\qquad \begin{aligned} (LN - M^2)x_u &= (FM - EN)X_u + (EM - FL)X_v, \ldots \\ (LN - M^2)x_v &= (GM - FN)X_u + (FM - GL)X_v, \ldots \end{aligned}$$

13. *Die Weingartenschen Formeln für Ebenenkoordinaten.* Statt durch ihre Punkte kann eine Fläche auch durch ihre Berührungsebenen gegeben sein. Denkt man sich ∞^2 Ebenen derart gegeben, daß die Richtungskosinus ihrer Normalen X, Y, Z und ihr Abstand W vom Koordinatenanfang als Funktionen zweier Parameter u, v bekannt sind, so werden diese eine Fläche einhüllen, für die das sphärische Bild der Parameterkurven gegeben ist. Bestimmt man durch die übliche Schlußweise die Punktkoordinaten x, y, z der umhüllten Fläche, so ergibt sich (Weingarten, *Festschr. Techn. Hochsch.*, Berlin 1884):

$$x = WX + \Delta(W, X), \ldots$$

oder ausgeschrieben:

$$(41)\quad x = WX + \frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{F}\left[\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right] + \mathfrak{E}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

§ 2. Besondere Kurven und Kurvensysteme auf einer Fläche.

14. *Orthogonalsysteme.* Die Bedingung dafür, daß zwei Richtungen $du : dv$ und $\delta u : \delta v$ zueinander senkrecht sind, ist das Verschwinden der aus der ersten Fundamentalform hergeleiteten bilinearen Form:

$$(42)\quad E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v = 0.$$

Sind die Parameterkurven orthogonal, so muß $F = 0$ sein; das Krümmungsmaß nimmt dann die einfache Form an:

$$(43)\quad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\}.$$

Die Bestimmung orthogonaler Kurvensysteme erfordert die Auflösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Isothermsysteme s. Nr. 25.

15. *Konjugierte Kurvennetze.* Konstruiert man längs einer Kurve C der Fläche die Berührungsebenen, so schneiden diese sich in den Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche; durch jeden Punkt der Fläche geht eine dieser Erzeugenden und ihre Richtung ist zu der Tangentenrichtung an die Kurve C konjugiert bezüglich der Dupinschen Indikatrix. Konstruiert man zu sämtlichen Kurven einer beliebigen Kurvenschar auf diese Weise die konjugierten Richtungen, so bestimmen diese eine zweite Kurvenschar, die als *konjugiert* zur ersten bezeichnet wird. Die zu der Richtung $du : dv$ konjugierte Richtung $\delta u : \delta v$ wird bestimmt durch die Gleichung

$$(44)\quad L du\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + N dv\delta v = 0.$$

Sind die Parameterkurven konjugiert, so ist $M = 0$. Aus den Gleichungen (33) folgt, daß die kartesischen Koordinaten einer Fläche, die auf konjugierte Parameterkurven bezogen ist, Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(45)\quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

sind. Umgekehrt kann man drei beliebige Partikularlösungen einer solchen Gleichung als kartesische Koordinaten eines konjugierten Kurvennetzes im Raume ansehen. In derselben Weise kann man n Lösungen einer Gleichung (45) als kartesische Koordinaten eines Koordinatennetzes im R_n betrachten. Diese überaus fruchtbare Auffassung ist von C. Guichard (*Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **14**, **15**, **20**, 1897, 1898, 1903) weiterentwickelt worden.

Da das Problem der konjugierten Kurvennetze projektiv ist, werden hier zweckmäßig homogene Koordinaten statt der kartesischen benutzt. Die vier projektiven Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ genügen dann einer Gleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + c\vartheta. \tag{46}$$

Die Laplacesche Transformation einer solchen Gleichung gewinnt dadurch eine sehr einfache geometrische Deutung als Transformation von Kurvennetzen (Darboux, *Théorie des surfaces* II, 1—70, Goursat, *American J. of Math.* **18**, 1896), wobei die integrablen Fälle der Gleichung (46) sich geometrisch als Ausartung eines transformierten Netzes kennzeichnen.

16. *Krümmungslinien.* Auf jeder regulären (reellen) Fläche gibt es ein (reelles) Kurvennetz, das gleichzeitig orthogonal und konjugiert ist. Seine Richtungen entsprechen den Hauptachsen des Dupinschen Kegelschnitts, sie liegen in den Hauptkrümmungsebenen der Fläche. Man bezeichnet diese Kurven als die *Krümmungslinien* der Fläche. Ihre Gleichung ist

$$(EM - FL)du^2 + (EN - GL)du\,dv + (FN - GM)dv^2 = 0, \tag{47}$$

eine Gleichung, die bei der zweiten Flächendarstellung $z = f(x, y)$ die häufig gebrauchte Form

$$\begin{aligned}[(1+p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\,dx\,dy \\ + [pqt - (1+q^2)s]\,dy^2 = 0\end{aligned} \tag{48}$$

annimmt.

Auf der Kugel und der Ebene ist jedes Orthogonalnetz ein System von Krümmungslinien, auf jeder anderen (reellen) Fläche gibt es zwei eindeutig bestimmte getrennte Scharen von Krümmungslinien. Auf abwickelbaren Flächen bilden die Erzeugenden mit ihren Orthogonaltrajektorien das Netz der Krümmungslinien.

Sind die Parameterkurven Krümmungslinien, so ist gleichzeitig

$$F = 0, \qquad M = 0,$$

so daß die Krümmungslinien und ihre sphärischen Bilder parallel zugeordnet sind; in diesem Falle ist

$$(49)\qquad \frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ},$$

und zwar ist dies Verhältnis gleich dem zu dem entsprechenden Normalschnitt gehörigen Hauptkrümmungsradius r_1, bzw. r_2; demnach gelten die Rodriguesschen Formeln (*Corr. s. l'Éc. Pol.* **3**, 1815)

$$(50)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -r_2 \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -r_1 \frac{\partial X}{\partial v}$$

ferner folgende Beziehungen für die Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung:

$$(51)\qquad L = \frac{E}{r_2}, \qquad N = \frac{G}{r_1}.$$

Sind die Parameterkurven (u, v) Krümmungslinien, so besitzt die entsprechende Gleichung (45) außer x, y, z auch noch die Verbindung $x^2 + y^2 + z^2$ als Partikularintegral.

Bei Inversion gehen Krümmungslinien in Krümmungslinien über, dagegen sind sie weder für Biegung und projektive Transformation invariant.

Schneiden sich zwei Flächen in einer Kurve, die für beide Krümmungslinie ist, so ist der Schnittwinkel längs der ganzen Kurve konstant, und umgekehrt: wird eine Fläche von einer zweiten in einer Krümmungslinie unter konstantem Winkel geschnitten, so ist die Kurve auch auf der zweiten Fläche Krümmungslinie. Insbesondere wird eine Fläche, die eine ebene oder sphärische Kurve als Krümmungslinie besitzt, von der zugehörigen Ebene bzw. Kugel unter konstantem Winkel geschnitten (Joachimsthal, *J. f. Math.* **30**, 1846).

Imaginäre Flächen, deren Krümmungslinien zusammenfallen, s. Kap. **42**, Nr. **1**.

17. *Minimalkurven.* Auf jeder Fläche gibt es zwei (imaginäre) Kurvenscharen, für die

$$(52)\qquad ds^2 = 0$$

ist; sie sind durch das Nullsetzen der ersten Fundamentalform gegeben

$$(53)\qquad E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = 0.$$

Ihr Bogenelement, also auch ihre Bogenlänge hat die Länge Null, man bezeichnet sie daher als *Minimalkurven* (Lie). Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Minimalkurven, ihre Tangenten sind die beiden isotropen Geraden der Berührungsebene durch diesen Punkt. Die Minimalkurven der Kugel sind zwei Scharen von isotropen Geraden. Aus der Bedingung (42) folgt die bekannte Eigenschaft isotroper Gebilde: *jede Minimalkurve steht auf sich selbst senkrecht.*

Sind die Koordinatenlinien u, v Minimalkurven, so nimmt das Linienelement der Fläche die bemerkenswert einfache Form an:

(54) $$ds^2 = 2F du dv,$$

d. h. es wird

$$E = G = 0,$$

das Gaußsche Krümmungsmaß ist

(55) $$K = \frac{F_u F_v - F F_u}{F^3} = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}.$$

18. *Asymptotenlinien.* Während man durch Nullsetzung der ersten Fundamentalform nur imaginäre Kurven erhält, sind die Kurven, die durch die Gleichung

(56) $$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$$

oder bei der Flächendarstellung (1a)

(57) $$r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$$

charakterisiert sind, immer dann reell, wenn

(58) $$LN - M^2 < 0$$

ist, d. h. nach Formel (29), wenn das Krümmungsmaß der Fläche negativ ist. Man bezeichnet sie als die *Asymptotenlinien*[1]) der Fläche, da ihre Tangenten in die Richtung der Asymptoten des Dupinschen Indikatrix fallen. Die Gleichung (44) lehrt, daß eine Asymptotenlinie sich selbst konjugiert ist, d. h. geometrisch, daß die Schmiegungsebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt. Diese Eigenschaft ist projektiv, so daß *bei Kollineationen und Korrelationen Asymptotenlinien in Asymptotenlinien übergehen.*

1) Der von Clebsch eingeführte Name „Haupttangentenkurve" sollte zweckmäßig den Krümmungslinien vorbehalten bleiben, da deren Tangenten in die Hauptnormalschnitte der Fläche fallen.

Da die Flächennormale mit der Binormale der Asymptotenkurve zusammenfällt, so muß das Gaußsche Bild der Asymptotenlinie mit ihrem Binormalenbild übereinstimmen, dies bedeutet aber, daß eine Asymptotenlinie und ihr sphärisches Bild stets aufeinander senkrecht stehen.

Sind die Koordinatenlinien Asymptotenlinien, so wird

$$L = N = 0.$$

Setzt man für das Krümmungsmaß

(59) $$K = \frac{1}{r_1 r_2} =$$

so bestehen zwischen den Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche und denen ihres sphärischen Bildes die Gleichungen

(60) $${}^2\mathfrak{E}, \quad F = -\varrho^2\mathfrak{F}, \quad G = \varrho^2 \ldots$$

Die Torsionen der Asymptotenkurven sind in ihrem Schnittpunkt auf der Fläche stets entgegengesetzt gleich, und zwar $\pm 1 : \varrho$. Aus den Codazzischen Gleichungen folgt, daß ein Kurvensystem auf der Kugel nur dann als Gaußsches Bild der Asymptotenkurven einer Fläche aufgefaßt werden kann, wenn für dieses die Beziehung

(61) $$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'$$

besteht, wobei die Christoffelschen Verbindungen sich auf die Fundamentalgrößen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ der Gaußschen Kugel beziehen (Dini, *Ann. di Mat.* (2) 4).

Die Weingartenschen Gleichungen (40) nehmen nach Einführung der Größen

(62) $$\xi = X\sqrt{\varrho}, \ldots$$

die Form an:

(63) $$\frac{\partial x}{\partial u} \quad \begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \eta_u & \zeta_u\end{vmatrix} \qquad \frac{\partial x}{\partial v} \quad \begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \eta_v & \zeta_v\end{vmatrix}$$

(*Lelieuvresche Formeln; Bull. des Sc. Math.* 1888), wobei ξ, η, ζ Partikularlösungen der Gleichung

(64) $$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v} = M\vartheta; \qquad M = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u\,\partial v} - \mathfrak{F}.$$

Umgekehrt ergeben drei Integrale ξ, η, ζ einer Gleichung (64), in der M eine beliebige Funktion bedeutet, mit Hilfe der Lelieuvre-

schen Formeln (63) die Darstellung einer auf Asymptotenlinien bezogenen Fläche, deren Krümmungsmaß

$$K = \frac{-1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

ist.

19. *Tangentialkrümmung einer Flächenkurve.* Der Inhalt des Meusnierschen Satzes (Nr. 6) besagte, daß der Schnittpunkt der Krümmungsachse (Polarachse) einer Flächenkurve $\varphi =$ konst. mit der Normale der Fläche mit dem Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Normalschnitts durch die Kurventangente zusammenfällt. In derselben Weise ist der Schnittpunkt der Polarachse mit der Tangentialebene der Fläche der Krümmungsmittelpunkt der Projektion der Flächenkurve auf die Tangentialebene. Die Krümmung dieser Kurve bezeichnet man als *geodätische Krümmung* g_φ oder *Tangentialkrümmung* der Kurve $\varphi =$ konst. Ist $\varkappa$ die erste Krümmung der Kurve, k_φ ihre Normalkrümmung, so besteht die aus der Kurventheorie wohlbekannte Relation

$$\varkappa^2 = k_\varphi^2 + g_\varphi^2. \tag{65}$$

Der Ausdruck der geodätischen Krümmung der Kurve ist

$$g_\varphi = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} - \Delta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right) \tag{66}$$

oder ausgerechnet (Bonnet, *C. R.* **42**, 1856, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **32**, 1848)

$$g_\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{F\varphi_v - G\varphi_u}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{F\varphi_u - E\varphi_v}{\sqrt{E\varphi_v^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_u^2}} \right\}. \tag{67}$$

Bei einer Biegung der Fläche bleibt die Tangentialkrümmung ungeändert (Minding, *J. f. Math.* **6**, 1830).

Mit Hilfe der geodätischen Krümmungen eines orthogonalen Kurvensystems ergibt sich eine sehr bemerkenswerte Formel für das Krümmungsmaß (Bonnet, a. a. O., Liouville, *J. de Math.* [1] **16**, 1851).

20. *Geodätische Linien.* Die geodätischen Linien sind dadurch charakterisiert, daß bei ihnen die Hauptnormale mit der Flächennormale zusammenfällt, so daß die Krümmungsachse parallel zur Tangentialebene und die geodätische Krümmung

$$g_\varphi = 0$$

wird. Alle kürzesten Linien auf der Fläche sind geodätisch, dagegen trifft das umgekehrte nicht ausnahmslos zu. Die Differentialgleichung der geodätischen Linien hat Gauß in der Form aufgestellt:

$$\sqrt{EG-F^2}\,d\theta = F d \log \sqrt{E} + \tfrac{1}{2}(E_v du - G_u dv) - F_u du, \tag{68}$$

in der θ den Winkel der Geodätischen mit der Linie $u = \text{konst.}$ (vgl. Formel (11)) bedeutet.

Eine zweite Form für die Gleichung der Geodätischen ist folgende:

$$dv\,d^2u - du\,d^2v = \left\{ {11 \atop 2} \right\} du^3 + \left(2\left\{ {12 \atop 2} \right\} - \left\{ {11 \atop 1} \right\}\right) du^2 dv + \left(\left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2\left\{ {12 \atop 1} \right\}\right) du\,dv^2 - \left\{ {22 \atop 1} \right\} dv^3. \tag{69}$$

Die Gleichung der geodätischen Linien ist zuerst von Euler (*Comment. Ac. Petr.* **3**, 1732) und J. Bernoulli (*Opera omnia* IV, 1742) aufgestellt worden.

Eine geodätische Krümmungslinie ist immer eben, denn die Flächennormalen bilden längs einer Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche; da die Kurve geodätisch ist, müssen ihre Hauptnormalen eine abwickelbare Fläche bilden; dies tritt aber nur ein, wenn die Kurve eben ist und ihre Ebene die Fläche senkrecht schneidet.

Für die geodätischen Linien der Rotationsflächen gilt der Clairautsche Satz. S. Kap. **42**, Nr. **2**. Läßt sich das Linienelement einer Fläche auf die Liouvillesche Form bringen

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2), \tag{70}$$

so bestimmen sich die geodätischen Linien durch Quadraturen:

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-a}} \mp \int \frac{\;}{\sqrt{\;}} \qquad b. \tag{71}$$

Zu den Liouvilleschen Flächen gehören u. a. alle Rotationsflächen und Flächen 2. Ordnung. (Für letztere wird die Bestimmung durch hyperelliptische Integrale geleistet, Jacobi, *J. f. Math.* **19**, 1837.) Ihre Gesamtheit ist bisher noch nicht bekannt. Eine allgemeine Methode zur Bestimmung der geodätischen Linien siehe Nr. 22. Die sehr umfangreiche Literatur der geodätischen Linien und ihre Ergebnisse sind von Stäckel, *Leipz. Ber.* 1893

bis Gauß, und Sager, *Diss. Rostock* 1903 seit Gauß zusammengestellt worden.

21. *Geodätische Dreiecke.* Ein Dreieck von geodätischen Linien heißt ein geodätisches Dreieck; für die *Totalkrümmung*

$$\int K\,d\,O,$$

wobei das Integral über sämtliche Flächenelemente $d\,O$ des Dreiecks zu erstrecken ist, eines solchen Dreiecks gilt der Gaußsche Satz: sie ist gleich dem sphärischen Exzeß, d. h. gleich *dem Überschuß seiner Winkelsumme über zwei Rechte* [Verallgemeinerung des Satzes von Girard (1629) für das sphärische Dreieck]. Ein geodätisches Dreieck ist i. a. nicht ohne Änderung der Seiten und Winkel auf der Fläche verschiebbar; nur auf Rotationsflächen und ihren Biegungsflächen gibt es eine i. a. eindeutig bestimmte Bewegung, bei der die Dreiecksecken auf Parallelkreisen fortschreiten, auf Flächen konstanter Krümmung endlich ist ein geodätisches Dreieck wie in der Ebene frei verschiebbar (Christoffel, *Berlin. Abh.* 1868; v. Mangoldt, *J. f. Math.* **94**, 1882; J. Weingarten, *Berlin. Ber.* 1882).

22. *Geodätische Parallelen.* Die Orthogonaltrajektorien einer Schar von ∞^1 geodätischen Linien nennt man geodätische Parallelen. Die Kurvenstücke, die irgend zwei geodätische Parallelen von ihren Orthogonalkurven abschneiden, sind untereinander gleich.

Die Bestimmung dieser Kurven ist an die Lösung der Gleichung

$$\Delta_1 \varphi = 1 \tag{72}$$

gebunden (Beltrami, *Giorn. di Mat.* **2**, 1864). Kennt man eine Lösung derselben, die eine nicht additive Konstante α enthält:

$$\varphi = \varphi(u, v; \alpha), \tag{73}$$

so erhält man die geodätischen Linien der Fläche durch die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = C. \tag{74}$$

Die geodätischen Parallelen sind selbst geodätisch nur auf den abwickelbaren Flächen. Das hier vorliegende Integrationsproblem ist von Koenigs (*Paris Mém. des Sav. Étr.* **31**, 1891), Ricci (*Lezioni sulla teoria delle sup.* Verona 1898), Raffy (*C. R.* **108**, 1889) u. a. gefördert worden.

23. *Geodätische Kreise.* Als geodätische Kreise bezeichnet man in der Literatur zwei wesentlich verschiedene Kurvenklassen:

1. Den Ort aller Punkte, deren geodätischer Abstand von einem festen Punkte auf der Fläche konstant ist (Gauß, Knoblauch, Bianchi). Diese Kurven sind geschlossene Kurven und ihre Orthogonaltrajektorien geodätische Linien.

2. Die Kurven von konstanter geodätischer Krümmung g_φ (Darboux). Konstruiert man längs einer solchen Kurve die berührende abwickelbare Fläche an die gegebene Fläche, so geht bei der Abwickelung der Fläche in die Ebene die Kurve in einen ebenen Kreis vom Radius $\frac{1}{g_\varphi}$ über. *Diese Kurven sind im allgemeinen nicht geschlossen.*

24. *Geodätische Windung.* Zwei benachbarte Normalen einer Flächenkurve C in der Tangentialebene der Fläche bilden einen infinitesimalen Winkel, dessen Quotient durch das Bogenelement der Kurve als geodätische Windung (geod. Torsion) t der Kurve C bezeichnet wird. Sie ist die Windung der geodätischen Linie, die in dem betrachteten Punkte die Kurve C berührt. Die Normalkrümmung, Tangentialkrümmung und geodätische Windung bilden die Invarianten für die Bewegung eines Hauptdreikants längs einer Flächenkurve, die in drei Gleichungen, die den Frenetschen Gleichungen der Kurventheorie nachgebildet sind, ihren analytischen Ausdruck findet (Knoblauch, *Grundlagen,* S. 52—61).

25. *Besondere Koordinatensysteme auf einer Fläche.* Betreffend Krümmungslinien, Asymptotenlinien, Minimalkurven s. Nr. 16—18. Sonstige bedeutsame Koordinatensysteme sind:

1. *Isothermensysteme.* Dies sind Orthogonalsysteme, die sich durch *isometrische Parameter* so darstellen lassen, daß das Linienelement die Form annimmt:

$$(75) \qquad ds^2 = \lambda(du^2 +$$

wobei das Krümmungsmaß

$$(76) \qquad K = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2}\right)$$

wird.

Die Bedingung dafür, daß eine Kurvenschar $\varphi =$ konst. mit ihren Orthogonalkurven ein Isothermensystem bildet, ist

$$(77) \qquad \frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} = F(\varphi).$$

Die Transformation eines Koordinatensystems (u, v) mit den Fundamentalgrößen 1. Ordnung E, F, G auf ein Isothermensystem (φ, ψ) verlangt die Auflösung der Differentialgleichung

$$\Delta_2 \varphi = 0 \tag{78}$$

und die nachfolgende Ausführung der Quadratur

$$\psi = \int \left(- \frac{E\varphi_v - F\varphi_u}{\sqrt{EG - F^2}}\, du + \frac{G\varphi_u - F\varphi_v}{\sqrt{EG - F^2}}\, dv \right. \tag{79}$$

Sodann ist

$$\lambda = \frac{\quad}{\Delta_1 \psi}\,. \tag{80}$$

Ist auf einer Fläche ein Isothermensystem (φ, ψ) bekannt, so erhält man jedes andere Isothermensystem (φ', ψ') auf der Fläche, wenn man

$$\varphi' + i\psi' = F(\varphi \pm i\psi) \tag{81}$$

setzt, wobei F eine willkürliche Funktion bedeutet. Betr. der Theorie der Isothermensysteme vgl. C. F. Gauß (*Werke* IV, S. 193); Beltrami (*Giorn. di Mat.* **2**, 1864; *Math. Ann.* **1**, 1869); Weingarten (*Festschr. zur Feier der Techn. Hochschule Berlin* 1884); F. Klein (*Über Riemanns Theorie der algebr. Funkt.* Leipzig 1882).

2. *Die isotherm-konjugierten Systeme.* Auf den Flächen positiven Krümmungsmaßes ist das System der Asymptotenlinien imaginär, dagegen gibt es auf ihnen unendlich viele Systeme, für die die zweite Grundform

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

eine isotherme Form annimmt, wo also

$$L = N \quad M = 0 \tag{82}$$

ist (Voß, *Math. Ann.* **39**, 1891). Diese Systeme sind, da $M = 0$ ist, konjugiert und werden als isotherm-konjugiert bezeichnet. Setzt man

$$K = \frac{1}{\varrho^2}, \tag{83}$$

so nimmt das Linienelement die Form an:

$$ds^2 = \varrho^2(\mathfrak{G}\,du^2 - 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{E}\,dv^2), \tag{84}$$

und zwischen den Christoffelschen Ausdrücken auf der Kugel besteht die Relation (Bianchi, *Vorles.* S. 136):

(85) $$\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\right].$$

Sind ξ, η, ζ Partikularlösungen einer Gleichung

(86) $$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta,$$

so stellen die Gleichungen

(87) $$x \qquad \begin{matrix}\eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u\end{matrix}$$

eine Fläche auf ein isotherm-konjugiertes System bezogen dar, für die das Krümmungsmaß

(88) $$K = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

ist.

3. *Die geodätischen Polar- und Parallelkoordinaten.* Nimmt man als Koordinatensystem auf der Fläche ∞^1 geodätische Linien und ihre Orthogonaltrajektorien, so bilden diese ein *orthogonal-geodätisches Netz* oder ein Netz von geodätischen Parallelkoordinaten; gehen die Geodätischen alle von einem Punkte aus, so erhält man den besonderen Fall der *geodätischen Polarkoordinaten.* Für das Bogenelement und das Krümmungsmaß gelten in einem solchen System die Formeln:

(89) $$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

und

(90) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

wobei u die Bogenlänge der geodätischen Linien ist. Die Bestimmung eines solchen Systems s. Nr. 20.

Die Winkelhalbierenden eines orthogonal-geodätischen Netzes haben dieselbe Tangentialkrümmung (Rothe, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* 1, 1902).

4. *Geodätische Ellipsen und Hyperbeln.* Eine Kurve, für die die Summe oder die Differenz der geodätischen Abstände von zwei beliebigen Grundkurven konstant ist, bezeichnet man als *geodätische Ellipse* oder *geodätische Hyperbel.* Das System der geodätischen Ellipsen und Hyperbeln bezüglich eines Paares von Grundkurven bildet ein Orthogonalsystem, für das die erste Fundamentalform der Fläche

(91) $$ds^2 = \frac{du^2}{\cos^2\omega} + \frac{dv^2}{\sin^2\omega}$$

wird. Dabei bedeutet 2ω den Winkel, unter dem die geodätischen Parallelen zu den Grundkurven, die durch den betrachteten Punkt gehen, sich schneiden (Weingarten, *J. f. Math.* **62**, 1863).

5. *Gewebe.* Ein Kurvennetz ist ein *Gewebe* (Rothe, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* **1**, 1902) oder *Kurvennetz ohne Umwege* (Scheffers, *Leipz. Ber.* **57**, 1905, *Theorie der Fl.* S. 52; v. Lilienthal, *Jahresber. D. Math. Ver.* **16**, 1907), wenn die Verbindungswege zweier Punkte auf irgendwelchen Kurven des Netzes dieselbe Länge haben. Wenn die Koordinatenlinien ein Gewebe bilden, so ist

(92) $$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$$

Ist das Gewebe orthogonal, so bilden seine Winkelhalbierenden ein orthogonal-geodätisches Netz. Ist der Koordinatenwinkel konstant, so haben die Koordinatenlinien im Schnittpunkte dieselbe Tangentialkrümmung.

Die *Tschebyscheffschen Gewebe* (*Ass. Franç. p. l'avancem. des Sc. Paris* 1878; Voß, *Math. Ann.* **19**, 1881) bestehen aus zwei Scharen äquidistanter Kurven, für ein solches ist

(93) $$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Das Krümmungsmaß wird hier:

(94) $$K = \frac{}{\sin\omega}$$

Ist $K = 1$, so kommt man auf das äquidistante Netz auf der Kugel, das für viele flächentheoretische Probleme von grundlegender Bedeutung ist. (S. Kap. **42**, Nr. 11.) Gewebe mit besonderen Eigenschaften untersucht R. Rothe, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* **5**, **7**; *Math. Ver.* **17**, **18**, **20**, 1906—1911; Reckers, *Diss.* Münster 1910.

§ 3. Abgeleitete Flächen.

26. *Die Evolutenflächen.* Die Krümmungsmittelpunkte der beiden Hauptnormalschnitte einer Fläche F erfüllen die beiden Schalen Φ_1, Φ_2 der *Evolute* (Zentrafläche). Sind r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien, so sind die Koordinaten des ersten Mantels

(95) $$\xi = x + r_1 X, \cdots,$$

des zweiten Mantels

(96) $$\xi = x + r_2 X, \cdots.$$

Auf jedem Mantel liegen die Gratlinien der abwickelbaren Flächen, die von den Normalen der Fläche längs der Krümmungslinien einer Schar gebildet wird, als geodätische Linien; die geodätischen Linien der ersten Schale und die Orthogonaltrajektorien der Geodätischen der zweiten Schale sind Kurven, die durch die Normalen sich punktweis zugeordnet sind.

Umgekehrt kann man eine beliebige Fläche als Zentrafläche annehmen; man erhält die dazugehörige „Evolventenfläche", indem man zu einer beliebigen Schar geodätischer Linien die Tangenten konstruiert und eine Fläche aufsucht, die sämtliche ∞^2 Tangenten dieser Kurven senkrecht schneidet. Es gibt stets ∞^1 derartige Flächen (Parallelflächen, s. Nr. 28).

Artet ein Mantel der Evolute von F in eine Kurve aus, so ist F eine *Kanalfläche,* die durch Umhüllung von ∞^1 Kugeln entsteht.

Die einzige Fläche, deren beide Evolutenmäntel in Kurven ausarten, ist die *Dupinsche Zyklide*; ihre Brennmäntel sind zwei Kegelschnitte in zwei aufeinander senkrechten Ebenen (die Fokalkegelschnitte eines Systems konfokaler Flächen 2. Ordnung).

Betr. der Bestimmungsgrößen der Evoluten, die aus denen der Evolventen durch Differentiationen folgen, vgl. die Zusammenstellung der Formeln bei Bianchi, *Vorl.* S. 243; Darboux, *Th. des surf.* III, 340 (Tableau VII); Knoblauch, *Grundlagen* S. 373—384; Scheffers, *Th. d. Fl.* Tafel XXII S. 566.

27. *Mittelfläche und Mittelenveloppe.* Den Ort der Punkte, die den Abstand der Krümmungsmittelpunkte halbieren, bezeichnet man als Mittelfläche:

$$x_0 = x + \frac{r_1 + r_2}{2} X, \tag{97}$$

Die Ebenen, die in diesen Mittelpunkten auf der Normalen senkrecht stehen, heißen Mittelebenen; sie umhüllen eine Fläche, die als *Mittelenveloppe* bezeichnet wird. Sie ist der gegebenen Fläche durch parallele Normalen zugeordnet, und der Abstand ω ihrer Tangentialebene vom Nullpunkt hängt mit dem der gegebenen Fläche, der mit W bezeichnet wird, durch die Gleichung

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\Delta^2 W$$

zusammen, wobei der Differentialparameter bez. des Linienelements der Gaußschen Kugel zu berechnen ist. Die Flächen, für die die Mittelebenen sich in einem Punkte schneiden, sind von Appell, *Amer. J. of Math.* **10** (1888) untersucht worden.

28. *Parallelflächen.* Trägt man auf allen Normalen einer Fläche gleiche Stücke ab, so liegen die Endpunkte auf einer *Par-*

allelfläche, d. h. in entsprechenden Punkten sind die Berührungsebenen parallel. Alle Parallelflächen haben dieselben Normalen und dieselben Evolutenflächen.

§ 4. Abgeleitete Linien- und Kreiskongruenzen.

29. *Grundformeln.* Mit der Untersuchung der Flächen aufs engste verbunden sind gewisse mit ihr gesetzmäßig verknüpfte doppelt unendliche Mannigfaltigkeiten von geraden Linien, deren Theorie hier, soweit sie für die Theorie der Flächen von Bedeutung ist, darzustellen ist.

Man bezeichnet eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 geraden Linien als eine *Linienkongruenz* (Plücker, *Neue Geometrie d. Raumes*, Leipzig 1868—69) oder als *Strahlensystem* (Kummer, *J. f. Math.* **57**, 1860). Die Theorie der Strahlenkongruenzen ist durch die Betrachtung der Normalensysteme einer Fläche von Monge (*J. de l'Éc. Pol. cah.* **2**) vorbereitet und durch die optischen Untersuchungen von Malus (*Corresp. sur l'Éc. Pol.* **1**, 1806; *J. de l'Éc. Pol. cah.* **14**, 1808), Dupin (*Applications de géométrie*, Paris 1822), Hamilton (*Trans. Ir. Ac.* **15**, 1828; **16**, 1830; **17**, 1837) weiter gefördert. Systematisch aufgebaut wurde die Theorie von Kummer (s. o.). Betr. der weiteren geschichtlichen Entwickelung vgl. den Bericht von K. Zindler (*Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* **15**, 1906). Zur analytischen Darstellung seiner Geraden schneidet man das System durch eine beliebige Fläche (x, y, z), die *Leitfläche*, auf der ein krummliniges Koordinatensystem angenommen wird. Dann geben die Gleichungen

$$\xi = x(u, v) + tX(u, v), \cdots, \tag{98}$$

eine Darstellung der Kongruenz, wobei die Funktionen X, Y, Z, die Richtungskosinus eines Strahls, durch die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

miteinander verbunden sind.[1]) Zieht man durch den Nullpunkt zu einem Strahle der Kongruenz die Parallele, so schneidet diese

1) Diese Darstellung ist für die Zwecke der Flächentheorie, in der die Strahlensysteme stets mit bestimmten ausgezeichneten Flächen verknüpft sind, in den meisten Fällen die zweckmäßigste. Für die reine Liniengeometrie käme natürlich die Darstellung der sechs Plückerschen Linienkordinaten $\mathfrak{X}_{ik}$ als Funktionen zweier Parameter eher in Frage. Die dafür gültigen Grundformeln sind von K. Zindler (*Liniengeometrie* II, 67 ff., Leipzig 1906) und G. Sannia (*Annali di Mat.* [3] **10**, *Torino Atti* 1909) entwickelt worden.

die Gaußsche Bildkugel in einem Punkte mit den Koordinaten X, Y, Z, dem *sphärischen Bild* des Kongruenzstrahls.

Die die Kongruenz charakterisierenden *Kummerschen Fundamentalgrößen*

$$(99)\quad \begin{array}{l} \mathfrak{E} = \Sigma X_u^2, \quad \mathfrak{F} = \Sigma X_u X_v, \quad \mathfrak{G} = \Sigma X_v^2 \\ L = -\Sigma X_u x_u, \; M = -\Sigma X_u x_v, \; \overline{M} = -\Sigma X_v x_u, \; N = -\Sigma X_v x_v \end{array}$$

sind die Koeffizienten der beiden Kummerschen quadratischen Grundformen

$$(100)\quad \begin{array}{l} l\mathfrak{s}^2 = \Sigma dX^2 = \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2 \\ -\Sigma dx dX = L du^2 + (M + \overline{M}) du dv + N dv^2 \end{array}$$

Diese beide Formen bestimmen ein Strahlensystem in ähnlicher Weise wie die beiden Grundformen der Flächentheorie eine Fläche. Während aber jedem System von Grundformen nur eine Fläche entspricht, entsprechen einem Paare von Grundformen (100) unendlich viele Strahlensysteme (G. Sannia, *Torino Atti* 1910; Knoblauch, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* **14**, 1915, p. 14). Für die allgemeine Untersuchung werden die Strahlensysteme, für die

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = 0$$

ist, deren Strahlen alle untereinander parallel sind oder sich auf ∞^1 Zylinder verteilen (zylindrische Kongruenzen), ausgeschlossen.

Der *Abstand* zweier Strahlen (u, v) und $(u + du, v + dv)$ ist:

$$(101)\quad dp \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{E} du + \mathfrak{F} dv, & \mathfrak{F} du + \mathfrak{G} dv \\ L du + M dv, & \overline{M} du + N dv \end{array}$$

Für den Punkt des kürzesten Abstands hat der Parameter t den Wert

$$(102)\quad r = -\frac{\Sigma dx dX}{d\mathfrak{s}^2},$$

d. h.

$$(102\,\text{a})\quad \frac{L du^2 + (M + \overline{M}) du dv + N dv^2}{\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2}.$$

30. *Grenzpunkte.* Für jede Fortschreitungsrichtung $du : dv$ hat r einen bestimmten Wert, seine größten und kleinsten Werte sind Wurzeln der Gleichung

$$(103)\quad \begin{array}{l} (\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2) r^2 - (\mathfrak{G} L - \mathfrak{F}(M + \overline{M}) + \mathfrak{E} N) r \\ \qquad + LN - \left(\frac{M + \overline{M}}{2}\right)^2 = 0. \end{array}$$

Die diesen Werten r_1 und r_2 entsprechenden Punkte sind stets reell, sie werden als *Grenzpunkte* bezeichnet. Die Ebenen durch den Strahl (u, v) senkrecht zu diesen beiden Minimalabständen nennt man *Hauptebenen*; diese stehen stets aufeinander senkrecht. Einem Werte r zwischen r_1 und r_2 entspricht eine bestimmte Richtung des kürzesten Abstands: die Gesamtheit aller dieser Lote bilden ein (ev. degenerierendes) *Zylindroid* (Hamilton). Die Ebene, die durch den Strahl u, v senkrecht zu der dem Werte r entsprechenden Richtung des kürzesten Abstands gelegt wird, bilde mit der ersten Hauptebene den Winkel w, dann besteht für r die Hamiltonsche *Gleichung* (*Transact. Irish Acad.* **16**, 1830)

$$(104) \qquad r = r_1 \cos^2 w + r_2 \sin^2 w.$$

31. *Brennpunkte und Brennflächen.* Auf jedem Strahl gibt es zwei (reelle oder imaginäre) Punkte, für die $dp = 0$ ist, wo der Strahl also von einem benachbarten Strahl geschnitten wird. Diese Punkte werden als *Brennpunkte* bezeichnet. Die entsprechenden Werte von r seien ϱ_1 und ϱ_2, sie sind Wurzeln der Gleichung

$$(105) \quad (\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)\varrho^2-(N\mathfrak{E}-(M+\overline{M})\mathfrak{F}+L\mathfrak{G})\varrho+LN-M\overline{M}=0.$$

Der Ort der Brennpunkte bildet die beiden Mäntel der *Brennfläche*, die auch einzeln in Kurven ausarten können.[1]) Den Brennpunkten entsprechen als der Ort der Schnittpunkte benachbarter Kongruenzstrahlen Kurven, deren Tangentenflächen die *abwickelbaren Flächen der Kongruenz* sind; ihre Gleichungen ergeben sich aus (101):

$$(106) \quad \begin{aligned} &(\overline{M}\mathfrak{E} - L\mathfrak{F})du^2 + [N\mathfrak{E} + (\overline{M} - M)\,\mathfrak{F} - L\mathfrak{G}]du\,dv \\ &\qquad + (N\mathfrak{F} - M\mathfrak{G})\,dv^2 = 0. \end{aligned}$$

1) Die Kongruenzen, deren Brennfläche beide in Kurven entarten, sind gebildet durch die geraden Linien, die beide Kurven schneiden. Artet eine Brennfläche in eine Kurve aus, so ist die Kongruenz aus den Tangenten gebildet, die von den Punkten der Kurve an die zweite Brennfläche gelegt werden können. Eine Vorstellung von einer Kongruenz mit imaginären (allerdings entartenden) Brennflächen kann man sich am einfachsten folgendermaßen machen: man ordne in zwei parallelen Ebenen die Punkte P, P' einander zu, die auf demselben Lote zu den Ebenen liegen ($PP' \perp \mathfrak{E}, \perp \mathfrak{E}'$) und drehe die eine Ebene in sich um einen beliebigen Winkel ($\neq k\pi$). Die Verbindungslinien PP' bilden dann in der neuen Lage eine besondere (rotatorische lineare) Kongruenz.

Der Mittelpunkt der Brennpunkte fällt mit dem Mittelpunkt der Grenzpunkte zusammen. Dieser Punkt heißt der *Mittelpunkt des Strahls*, der Ort der Mittelpunkte die (unter Umständen entartende) *Mittelfläche.* Setzt man den Abstand der Grenzpunkte

$$(107) \qquad 2d = r_2 - r_1,$$

den Abstand der Brennpunkte

$$(108) \qquad 2\delta = \varrho_2 - \varrho_1,$$

so wird

$$(109) \qquad \varphi^2 = d^2 - \delta^2 = \frac{(M - \overline{M})^2}{4(\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)}.$$

Auf jedem Mantel der Brennfläche liegen die Gratlinien C einer Schar von abwickelbaren Flächen, während die zweite Schar von abwickelbaren Flächen dieselbe Brennfläche in der zu C konjugierten Kurvenschar berührt.

Fallen die Brennflächen einer Kongruenz zusammen, so besteht diese aus den Tangenten an die Asymptotenlinien der einen Schar der Brennfläche.

32. *Strahlensysteme, auf Hauptflächen bezogen.* Für die Theorie der Flächen sind zwei in dieser und der nächsten Nummer gekennzeichnete Probleme von grundlegender Bedeutung: Man bestimme die Linienkongruenzen, für die das sphärische Bild

$$(110) \qquad d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + \mathfrak{G}\,dv^2$$

der Hauptflächen gegeben ist. Die Aufgabe führt auf die partielle Differentialgleichung

$$(111) \qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log\mathfrak{E}}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \log\mathfrak{G}}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial^2 \log\mathfrak{E}\mathfrak{G}}{\partial u\,\partial v}\,r \\ = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}\cdot(\Delta^2\varphi + 2\varphi) \end{aligned}$$

zwischen r und φ. Hat man hiervon ein partikuläres Integral gefunden, so ergibt sich die *Mittelfläche* (x, y, z) des Systems durch Quadraturen:

$$(112) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= r\frac{\partial X}{\partial u} - \varphi\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}}\frac{\partial X}{\partial v} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial v}\sqrt{\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}} - \frac{1}{\mathfrak{G}}\frac{\partial (r\mathfrak{G})}{\partial u}\right]X, \ldots, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -r\frac{\partial X}{\partial v} + \varphi\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}}\frac{\partial X}{\partial u} + \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{E}}} + \frac{1}{\mathfrak{E}}\frac{\partial (r\mathfrak{E})}{\partial v}\right]X, \ldots \end{aligned}$$

33. *Strahlensysteme, auf abwickelbare Flächen bezogen.* Das sphärische Bild der abwickelbaren Flächen eines Strahlensystems sei durch das Kurvensystem (u, v) der Bildkugel gegeben, das der Grundform

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2 \tag{113}$$

entspricht. Für den Brennpunktsabstand 2ϱ besteht die Gleichung (Guichard, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **6**, 1889, für den R_n *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **14**, 1898):

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \mathfrak{F} \right] \varrho = 0 \tag{114}$$

die Mittelfläche ergibt sich auch hier durch Quadraturen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} + 2\varrho \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) X - \varrho \frac{\partial X}{\partial u}, \dots \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} + 2\varrho \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) X + \varrho \frac{\partial X}{\partial v}, \dots \end{aligned} \tag{115}$$

34. *Normalensysteme.* Die Normalen einer Fläche bilden eine Kongruenz, die durch die Bedingung

$$\overline{M} = M$$

charakterisiert ist. Wählt man die Ausgangsfläche als Leitfläche, so stimmen die beiden Grundformen der Fläche mit denen des Strahlensystems überein. Bei einer Normalenkongruenz fallen die Brennpunkte und Grenzpunkte zusammen, ihre Brennflächen sind die Zentraflächen der Orthogonalflächen des Strahlensystems; die Gratlinien der abwickelbaren Flächen sind auf den Brennflächen geodätische Linien, und umgekehrt bildet das System der Tangenten an eine Schar geodätischer Linien einer Fläche ein Normalensystem. Die Brennebenen und damit die abwickelbaren Flächen eines Normalensystems stehen zueinander senkrecht (Bertrand, *J. de Math.* (1) **9**, 1844). Durch eine Brechung oder Spiegelung an einer beliebigen Fläche geht ein Normalensystem wieder in ein Normalensystem über (Malus, *Optique, Corr. sur l'Éc. Pol.* **1** (1806), *J. de l'Éc. Pol.* cah. **14**, 1808).

35. *Isotrope Kongruenzen.* Kongruenzen, deren Grenzpunkte zusammenfallen, heißen *isotrope Kongruenzen*, für sie ist:

$$M + \overline{M} : N = \mathfrak{E} : \mathfrak{F} : \tag{116}$$

Ihre Brennpunkte sind stets imaginär; sie liegen auf den Tangentenflächen zweier Minimalkurven (Ribaucour).

Die Mittelhüllfläche einer isotropen Kongruenz ist eine Minimalfläche (s. Kap. **42**, Nr. **4**). Die isotropen Kongruenzen wurden von A. Ribaucour (*Mém. cour. de l'Ac. de Belg.* **44**, 1880) in ihrer Beziehung zu den Minimalflächen untersucht, ihre Mittelfläche von K. Kommerell (*Math. Ann.* **70**, 1911) und Pausch (Diss. München 1912).

36. *W-Kongruenzen.* Entsprechen sich auf den Brennmänteln einer Kongruenz die Asymptotenlinien (C. Guichard, *C. R.* **110**, 1890), so nennt man sie eine *W*-Kongruenz (nach Weingarten, der die Brennflächen der *normalen* *W*-Kongruenzen untersucht hat). Alle Kongruenzen des linearen Komplexes sind *W*-Kongruenzen. Die *W*-Kongruenzen spielen eine besondere Rolle in der Theorie der Flächenbiegung (s. Nr. 41).

W-Kongruenzen, deren Brennflächen geradlinig sind, hat C. Segre (*Torino Atti* 1914) untersucht. Weitere grundlegende Untersuchungen zur Theorie der *W*-Systeme s. Bianchi, *Annali di Mat.* (2) **18**; Demoulin, *C. R.* **118**, 1894; E. Cosserat, E. Waelsch (ebd.); Fubini, Palermo Rend. **43**, 1919.

37. *Pseudosphärische Kongruenzen.* Sind die Brennmäntel einer *W*-Kongruenz pseudosphärisch, so sind die Asymptotenlinien isometrisch aufeinander bezogen, die Krümmungslinien entsprechen einander, und die Entfernung 2δ ist ebenso wie die der Grenzpunkte konstant. Die allgemeineren Kongruenzen, für die

$$d^2 - \delta^2 = \text{konst.}$$

ist, sind von Jonas (*Diss.* Halle 1908) untersucht worden.

38. *Guichardsche Kongruenzen.* Die Kongruenzen, bei denen die Gratlinien der abwickelbaren Flächen Krümmungslinien der Brennflächen sind, hat Guichard, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **7** (1890) bestimmt: es sind diejenigen, die als sphärisches Bild ihrer abwickelbaren Flächen die Bildkurven der Asymptotenlinien einer pseudosphärischen Fläche haben. Vgl. Kap. **42**, Nr. 16, 8.

39. *Die Ribaucourschen Kongruenzen* (*Mém. cour. de l'Ac. de Belgique* **44**, 1882) sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre abwickelbaren Flächen die Mittelfläche in einem konjugierten Kurvennetz schneiden; die sphärischen Bilder der Abwickelbaren stimmen überein mit dem Bild der Asymptotenlinien einer Fläche; diese ist der Mittelfläche durch Orthogonalität der Elemente zugeordnet. Zu den Ribaucourschen Systemen gehören die isotropen und die Guichardschen Kongruenzen. R.sche Kongruenzen entstehen, wenn zu den Normalen einer Fläche *F*, der *erzeugenden*

Fläche, durch die Punkte einer durch orthogonale Elemente zugeordneten Fläche F_1 die Parallelen gezogen werden (vgl. Nr. 41).

40. *Zyklische Strahlensysteme und normale Kreiskongruenzen.* Konstruiert man in jeder Tangentialebene einer Fläche eine Gerade derart, daß die Brennpunkte der dadurch entstehenden Kongruenz auf den Tangenten der Krümmungslinien liegen, so entsteht eine *zyklische Kongruenz*. Ihr Name erklärt sich durch ihre weiter unten darzulegende Beziehung zu den normalen Kreiskongruenzen.

Ein zyklisches System ist durch das sphärische Bild seiner abwickelbaren Flächen gekennzeichnet, d. h. alle Kongruenzen, die dasselbe Bild ihrer abwickelbaren Flächen haben wie ein zyklisches System, sind gleichfalls zyklisch. Damit eine Kongruenz zyklisch ist, muß das Gleichungssystem

$$(117)\quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 2(\cos\sigma - 1)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},\quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 2(\cos\sigma + 1)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}$$

nebst seiner Integrabilitätsbedingung

$$(118)\quad \left(\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right)\cos\sigma = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

erfüllt sein. Ist dies der Fall, so erhält man aus der Guichardschen Gleichung (114) den Brennpunktsabstand und damit die analytische Darstellung der Kongruenz. Die Gleichungen (117) sind stets erfüllt, wenn

$$(119)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

ist; dies tritt für die Ribaucourschen Kongruenzen (s. Nr. 38) ein, deren erzeugende Flächen, auf Asymptotenlinien bezogen, durch das Krümmungsmaß

$$(120)\qquad K = \frac{-1}{(U+V)^2}$$

gekennzeichnet sind.

Konstruiert man alle Kreise, deren Mittelpunkte auf den Strahlen einer zyklischen Kongruenz liegen, deren Ebenen auf diesen Strahlen senkrecht stehen und die durch die entsprechenden Punkte der Ausgangsfläche gehen, so erhält man ein System von ∞^2 Kreisen, die von einer Schar von ∞^1 Flächen senkrecht geschnitten werden. Solche Kreissysteme nennt man *normale Kreiskongruenzen.* Nennt man eine Gerade, die im Mittelpunkte eines Kreises auf seiner Ebene senkrecht steht, die *Achse* des Kreises, so läßt sich dieser Zusammenhang so aussprechen:

Die Achsen einer normalen Kreiskongruenz bilden eine zyklische Kongruenz,

und umgekehrt: zu jeder zyklischen Kongruenz gehört eine normale Kreiskongruenz; diese ist eindeutig bestimmt, wenn sie nicht zu der durch die Gleichungen (119) ausgezeichneten Klasse von Ribaucourschen Kongruenzen gehört, im letzten Falle gehören ∞^1 Kreissysteme zu ihr.

Da man zu jedem normalen Kreissystem ein paralleles konstruieren kann, dessen Kreise durch einen festen Punkt gehen, kann man auf folgendem Wege das sphärische Bild einer allgemeinen zyklischen Kongruenz explizite finden:

Man unterwerfe die Normalenkongruenz einer beliebigen Fläche einer Inversion; dann geht sie in ein normales Kreissystem über, dessen Kreise durch einen festen Raumpunkt gehen; die abwickelbaren Flächen der entsprechenden zyklischen Achsenkongruenz geben dann das sphärische Bild der allgemeinen zyklischen Kongruenz.

Die normalen Kreiskongruenzen stehen in naher Beziehung zur Theorie der Biegung, die sich in dem Satze ausdrücken läßt:

Wenn man die Berührungsebenen einer Fläche mit einem isotropen Kegel

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$$

schneidet, so gehen diese Schnittkreise bei einer beliebigen Biegung der Fläche, bei der die Tangentialebenen mitgeführt werden, in eine normale Kreiskongruenz über, und umgekehrt:

Wenn man die Hüllfläche der Ebenen einer normalen Kreiskongruenz unter Mitführung der Tangentialebenen passend verbiegt, so geht die Kreiskongruenz in eine Schar von ∞^2 Kreisen eines isotropen Kegels über (Darboux, *Th. des surf.* III, 354).

Allerdings gehören zu reellen Kreiskongruenzen immer imaginäre Biegungsflächen und umgekehrt.

Die Theorie der normalen Kreiskongruenzen wurde von Ribaucour (*C. R.* **67**, **70**, **76**, *J. de Math.* (4) **7**, 1891) geschaffen und insbesondere von Darboux weiter ausgebaut. Ihre Darstellung s. Darboux II, 314, III, 352, IV, 137, Bianchi, *Vorlesungen* S. 345—361 und *Lezioni* II, 130—252.

§ 5. Abbildung von Flächen.

41. *Biegung.* Wird ein Flächenstück ohne Verzerrung und Zerreißen verbogen, so ändern sich die Abstände benachbarter

Punkte nicht, d. h. bei einer Biegung muß die entsprechende Fundamentalform einer Fläche

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

invariant bleiben. Alle Eigenschaften und Größen somit, die nur von E, F, G abhängig sind, müssen bei der Biegung erhalten bleiben. Solche Größen nennt man daher *Biegungsinvarianten.* Dieser Ausdruck ist nicht ganz korrekt; er würde nur berechtigt sein, wenn auch wirklich zwei Flächen mit demselben ds^2 durch eine stetige Biegung ineinander übergeführt werden können. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Es wäre daher zweckmäßiger, das Wort Biegung hier zu vermeiden und zwei derartige Flächen *isometrische Flächen* (Voß, *Enzyklopädie der math. Wiss.* III D 6a, S. 363) zu nennen.

Die wichtigste Biegungsinvariante ist das Gaußsche *Krümmungsmaß K.* Ferner ist die *Tangentialkrümmung* invariant, also gehen, was auch geometrisch evident ist, geodätische Linien in geodätische Linien über.

Die Entscheidung, ob zwei Flächen mit gegebenen Linienelementen

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2,$$

$$ds_1^2 = E_1 du_1^2 + 2 F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2$$

isometrisch sind (Minding, *J. f. Math.* **19**, 1839), kommt darauf hinaus, festzustellen, ob die erste Gleichung durch eine geeignete Transformation

$$u_1 = \varphi(u, v) \quad v_1 = \psi(u, v)$$

in die zweite übergeführt werden kann. Die Aufgabe erfordert nur ausführbare Operationen (Bianchi, *Vorles.* S. 182).

Die Bestimmung aller zu einer Fläche isometrischen Flächen (Gauß, *Werke* VIII, 447, Bour, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **39**, 1864) erfordert die Lösung einer Differentialgleichung von Monge-Ampèrescher Form:

$$\Delta_{22} x = (1 - \Delta_1(x)) K, \tag{121}$$

deren Charakteristiken die Asymptotenlinien der Fläche sind. Jeder Lösung x der Gleichung, für die $\Delta_1(x) < 1$ ist, entspricht eine reelle Fläche des gegebenen Linienelements.

Eine stetige Biegung einer Fläche mit einer starren Kurve ist nur dann möglich, wenn diese Asymptotenlinie ist.

Es gibt unendlich viele Biegungen, bei denen eine gegebene Flächenkurve in eine Krümmungslinie verbogen wird.

Eine überall konvexe geschlossene Fläche (Ovaloid) kann nicht verbogen werden (vgl. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Leipzig 1916, S. 162; Weyl, *Berl. Ak. Ber.* 1917). Vollständige Klassen abwickelbarer Flächen sind bisher wenig bekannt, die bemerkenswertesten sind die Biegungsflächen der Evolute des Katenoids und die Biegungsflächen des Rotationsparaboloids (Weingarten, *J. f. Math.* **57**, 1861; Darboux, *Th. d. surf.* III, 332; Bianchi, *Vorl.* 335; Thybaut, *J. de l'Éc. Pol.* (3) **14**, 1898). Weitere Klassen bei Darboux und Bianchi a.a.O., sowie Weingarten, *Götting. Nachr.* 1878, C. R. **112**, 1891, *Acta Math.* **20**, 1896; Darboux, *Th. des surf.* IV, 308; Bianchi, *Lezioni* II, 171—254. An das Biegungsproblem knüpft sich eine Fülle von Sonderfragen, die in einer reichen und interessanten Literatur behandelt worden sind. Vgl. Bonnet, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **42**, 1867, Biegung mit Erhaltung der Krümmungslinien; Bianchi, *Annali di Mat.* (2) **18**, 1890, *Lezioni* II, 83, stetige Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems; Minding, *J. f. Math.* **18**, 1838; Beltrami, *Annali di Mat.* (1) **7**, 1865, Biegung von geradlinigen Flächen. Die Biegung der Flächen konstanter Krümmung und der Flächen zweiter Ordnung s. Kap. XLII, Nr. 12.

42. *Infinitesimale Deformation.* Ordnet man einem Punkte (x, y, z) einer Fläche F einen Punkt

$$x' = x + \varepsilon x_1, \ldots$$

derart zu, daß bis auf Glieder 2. Ordnung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

ist, so besteht zwischen den Flächen (x, y, z) und (x', y', z') eine *infinitesimale Isometrie.* Notwendig dazu ist, daß die Beziehung

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0 \tag{122}$$

besteht. Betrachtet man $(x_1 y_1 z_1)$ als die Koordinaten einer Fläche F_1, so sind F, F_1 sich durch orthogonale Linienelemente zugeordnet (Moutard, *Bull. Soc. Phil.* 1869). Das Problem der infinitesimalen Isometrie ist also gleichwertig mit der Bestimmung von Flächenpaaren, die sich durch orthogonale Linienelemente zugeordnet sind; es führt auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Weingartensche Verschiebungsfunktion φ (*J. f. Math.* **100**, 1887), diese stellt die in der Normalenrichtung

genommene Drehungskomponente dar, die das Flächenelement bei der Biegung erfährt (Volterra, *Acc. dei Lincei Rendic.*, 1884).

Die Gleichung der Verschiebungsfunktion kann, auf Asymptotenkurven bezogen, auf die Form

$$(64) \qquad \vartheta_{uv} \qquad M\vartheta$$

gebracht werden; sind dann ξ, η, ζ drei Lösungen der Gleichung, die in die Lelieuvreschen Formeln (63) eingehen, und ist ϑ eine beliebige vierte Lösung, so wird die allgemeinste Fläche (x_1, y_1, z_1) durch die Quadraturen

$$(123) \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \begin{matrix} \xi & \vartheta \\ \xi_u & \vartheta_u \end{matrix} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} \qquad \begin{matrix} \xi & \vartheta \end{matrix}$$

gegeben, d. h. dem System der Asymptotenlinien auf F enspricht auf F_1 ein konjugiertes System mit gleichen Invarianten. Zieht man durch jeden Punkt von F die Gerade, die parallel zur Richtung $x_1 : y_1 : z_1$ ist, so bilden diese Geraden eine W-Kongruenz. Mit jeder Fläche F ist endlich eine Fläche F_0 verbunden, die auf F durch parallele Normalen so bezogen ist, daß den Asymptotenlinien der einen Fläche ein konjugiertes System auf der anderen entspricht. Zwei solche Flächen heißen *assoziiert* (Bianchi, *Vorles.* S. 299). Führt man die Konstruktionen, die von F ausgehend die Flächen F_0, F_1 und F_2, die zweite Brennfläche der W-Kongruenz, liefern, für die gefundenen Flächen wiederum aus, und fährt damit unbeschränkt fort, so kommt man damit auf ein in sich geschlossenes *System von zwölf Flächen*, das durch W-Kongruenzen und Ribaucoursche Kongruenzen in bemerkenswerter Weise verbunden, sich immer wieder reproduziert (Darboux, *Th. des surf.* IV, 48—72; Eisenhart, *Amer. J. of Math.* **32**, 1910).

Von der sehr reichhaltigen Literatur über Flächenbiegung seien noch die Arbeiten von Petersen (1868); Stäckel, *Math. Ann.* **49**, 1896; Guichard, *J. de Math.* (5) **2**, 1896; Eisenhart, *Amer. J.* **24**, 1902; Bianchi, *Rom. Acc. dei Lincei Rendic.* (5) $\mathbf{12}_2$, $\mathbf{13}_1$ (1903/4); Blaschke, *Jahresber. D. Math. Ver.* **22**, 1913; Weyl, *Sitz.-Ber. Berlin. Akad.* 1917 genannt. Die infinitesimalen Isometrien höherer Ordnung wurden von Voß, *Münch. Ber.* **34**, 1904; Lagally, *Math. Ann.* **76**, 1914, und Liebmann, *Münch. Ber.* 1920 untersucht.

43. *Konforme Abbildung.* Eine Abbildung zweier Flächen aufeinander ist *winkeltreu* (konform), wenn entsprechende Linienelemente, d. h. ihre Fundamentalgrößen 1. Ordnung E, F, G und E_1, F_1, G_1 proportional sind.

Zwei Flächen sind daher dann konform aufeinander abgebildet, wenn die Minimalkurven der beiden Flächen sich entsprechen. Zwei Flächen, die auf eine dritte konform abgebildet sind, entsprechen auch einander konform. Das allgemeine Problem der konformen Abbildung ist also gelöst, wenn man die Abbildung der Fläche, von der die erste Fundamentalform

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \lambda^2 d\alpha d\beta$$

gegeben ist, auf die Ebene

$$ds_1^2 = du_1^2 + dv_1^2$$

kennt. Zunächst hat man also die Minimalkurven (α, β) der gegebenen Fläche als Parameterkurven einzuführen, was die Bestimmung je eines integrierenden Faktors φ, ψ der Differentialausdrücke

$$\begin{aligned} d\alpha &= \varphi \cdot \left(\sqrt{E}\, du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\, dv\right) \\ d\beta &= \psi \cdot \left(\sqrt{E}\, du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\, dv\right) \end{aligned} \tag{124}$$

erfordert. Setzt man nun

$$d\alpha = du_1 + i dv_1,$$
$$d\beta = du_1 - i dv_1,$$

so ist dadurch eine spezielle konforme Abbildung auf die Ebene erhalten. Die allgemeinste konforme Abbildung ergibt sich jetzt, indem man die Ebene $(u_1 v_1)$ der allgemeinsten konformen Abbildung in sich unterwirft, und dies geschieht durch die Einführung eines Koordinatensystems $(u_2 v_2)$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_2 + i v_2 &= F(u_1 + i v_1), \\ u_2 - i v_2 &= F_1(u_1 - i v_1), \end{aligned} \tag{125}$$

in denen F, F_1 beliebige analytische Funktionen darstellen. Spezielle winkeltreue Abbildungen s. Scheffers, *Theorie der Flächen* S. 81—104. Dort auch historische und Literaturangaben.

44. *Flächentreue Abbildungen.* Das Problem der flächentreuen Abbildung (Lambert, *Beytr. zum Gebr. d. Math.*, Berlin 1772) einer Fläche $F(u, v)$ auf eine Fläche $F(u_1 v_1)$ erfordert, daß

$$(126)\qquad \frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1{}^2}}$$

ist. Auch diese Aufgabe kommt letzten Endes darauf hinaus, die Abbildung der Fläche $F(u, v)$

$$x = x(u, v), \ldots$$

auf die Ebene (ξ, η) auszuführen und sodann die Ebene (ξ, η) beliebig in sich flächentreu zu transformieren. Die erste Aufgabe erfordert die Bestimmung zweier Funktionen (ξ, η), die die Gleichung

$$(127)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2}$$

erfüllen, die zweite Aufgabe, die schon von Gauß (*Werke* VIII, 373) gelöst wurde, wird durch die Scheffersschen Gleichungen (*Math. Ztschr.* 2, 1918)

$$(128)\qquad \begin{aligned} &\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}, \quad \eta \quad \mu - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \\ &\lambda - \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}, \quad \eta' = \mu + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \end{aligned}$$

in der φ eine beliebige Funktion der Parameter λ, μ ist, gegeben. Beispiele: G. Scheffers, *Th. d. Flächen* S. 52—67.

45. *Die geodätische Abbildung.* Zwei Flächen heißen geodätisch aufeinander abgebildet, wenn jeder Geodätischen der einen Fläche eine Geodätische der andern entspricht. Nur Flächen, deren Linienelemente auf die Liouvillesche Form

$$(129)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= (U - V)(du^2 + dv^2), \\ ds^2 &= \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right) \end{aligned}$$

gebracht werden können, gestatten eine geodätische Abbildung aufeinander (Beltrami, *Annali di Mat.* (1) 7, 1865; Dini, *Annali di Mat.* (1) 8, 1866). Die einzigen Flächen, die auf die Ebene geodätisch abbildbar sind, sind die Flächen konstanter Krümmung. Verallgemeinerungen des Problems behandelten Fr. Busse, *Berlin. Ak. Ber.* 1896; Lie-Scheffers, *Geometrie*

der Berührungstransformation I, Leipzig 1896; R. Rothe, *Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges.* **3**, 1904.

46. *Die sphärische Abbildung.* Das Problem der sphärischen Abbildung besteht in der Bestimmung derjenigen Flächen, die das Gaußsche Bild der *Krümmungslinien* gemeinsam haben. Es steht in sehr naher Beziehung zu der Theorie der Kugelkongruenzen und der Kreiskongruenzen (Ribaucour, *C. R.* **68**, **70**, **113**; Darboux, *Th. des surf.* IV, 169—107). Die Aufgabe ist analytisch gleichwertig dem Problem der infinitesimalen Deformation einer Fläche; dieser Zusammenhang wird geometrisch vermittelt durch die Liesche Minimalprojektion, die die Geraden des Raumes in Kugeln überführt. (Betr. dieser vgl. H. Beck, *Münch. Ak. Ber.* 1917.)

Kapitel XLII.

Besondere Flächenklassen und Flächensysteme.

Von *E. Salkowski* in Hannover.

§ 1. Besondere Flächenklassen.

1. *Geradlinige Flächen* (Regelflächen). Drei Gleichungen

$$x = f_1(v) + u\varphi_1(v)\ldots. \tag{130}$$

bestimmen eine Fläche, die ∞^1 Geraden, die *Erzeugenden* $v=$konst. enthält. Als *Leitkurve* $u = 0$ kann eine beliebige Kurve auf der Fläche gewählt werden, die sämtliche Erzeugende schneidet.

Ist

$$\varphi_1{}^2(v) + \varphi_2{}^2(v) + \varphi_3{}^2(v) = 0, \tag{131}$$

so sind die Erzeugenden *Minimalgeraden*. Die ihnen entsprechenden (imaginären) Flächen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie nur eine Schar von Krümmungslinien besitzen. Die einzige Fläche mit zwei Scharen isotroper Geraden ist die Kugel, ihre Gleichung, auf die Erzeugenden als Parameterkurven bezogen, lautet:

$$x = \frac{u+v}{1+uv}, \quad y = i\,\frac{u-v}{1+uv}, \quad z = \frac{1-uv}{1+uv}, \tag{132}$$

ihre erste Fundamentalform:

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2}. \tag{133}$$

Die Biegungsflächen der Kugel, bei denen eine Schar isotroper Geraden geradlinig bleibt, sind die einzigen geradlinigen Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes. (Monge, *Application de l'analyse à la géométrie* § 19, V; Serret, *J. de Math.* (1) **13**, 1848; Stäckel, *Leipz. Ber.* 1896, 1902; Weickmann, *Diss.* München 1902; Berwald, *Münch. Ak. Ber.* 1913; Beck, *Jahresber. D. Math. Ver.* **22**, 1913.)

Betreffs dieser Flächen wie überhaupt der imaginären Gebilde ist die Darstellung von Scheffers, *Theorie der Flächen* zu vergleichen.

Sind die Erzeugenden nicht isotrop, so kann ihre Streckenlänge als Parameter u gewählt werden, dann sind φ_1, φ_2, φ_3 ihre Richtungskosinus, zwischen denen die Gleichung

$$\varphi_1^2(v) + \varphi_2^2(v) + \varphi_3^2(v) = 1 \tag{134}$$

besteht. Als Parameter v werde die Bogenlänge der Leitkurve genommen, so daß

$$f_1'(v)^2 + f_2'(v)^2 + f_3'(v)^2 = 1$$

wird. Bedeutet dann $d\alpha$ den Winkel benachbarter Erzeugender, so wird

$$d\alpha^2 = dv^2(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2), \tag{135}$$

und ihr kürzester Abstand:

$$dp = \frac{dv^2}{d\alpha} \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \end{vmatrix} \tag{136}$$

der Parameterwert $v = t$ für die Stelle des kürzesten Abstandes, den *Mittelpunkt* der Erzeugenden, wird:

$$t = -\frac{f_1'\varphi_1' + f_2'\varphi_2' + f_3'\varphi_3'}{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2}. \tag{137}$$

Das Verhältnis

$$\frac{dp}{d\alpha} = k$$

nennt man den *Verteilungsparameter* der Fläche. Ist $dp = 0$, so ist die Regelfläche abwickelbar. (S. diesen Bd. S. 1048, (23).)

Der Ort der Mittelpunkte heißt die *Striktionslinie*, sie ist eindeutig bestimmt, wenn die Fläche nicht zylindrisch ist; die geraden Linien, die zwei benachbarte Erzeugende in den Punkten der Striktionslinie senkrecht schneiden, bilden eine zweite Linienfläche, das *Striktionsband*, die entweder ein Zylinder ist (wenn die Erzeugenden der Ausgangsfläche zu einer Ebene parallel sind) oder die Ausgangsfläche als Striktionsband besitzen (Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903, S. 304).

Wenn auf einer Linienfläche eine Kurve existiert, die zwei der drei folgenden Eigenschaften hat:

1. Striktionslinie,

2. geodätische Linie zu sein,

3. die Erzeugenden unter konstantem Winkel zu schneiden, so besitzt sie auch die dritte (Bonnet, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **32**, 1848).

Der Winkel der Leitkurve gegen die Erzeugende sei ϑ, dann ist

$$\cos\vartheta = \varphi_1 f_1' + \varphi_2 f_2' + \varphi_3 f_3'$$

Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden ergeben sich durch die Quadratur

$$u + \int \cos\vartheta \, dv = \text{konst.}$$

Das Stück der Erzeugenden zwischen zwei Orthogonaltrajektorien ist konstant.

Geradlinige Flächen, die eine Richtebene besitzen und deren Erzeugende eine zu dieser senkrechte Gerade schneiden, heißen *gerade Konoidflächen.* Ihrer Darstellung kann man die Form geben:

$$x = -u\psi'(v), \quad y = uv, \quad z = v\psi'(v) - 2\psi(v).$$

Die erste Fundamentalform einer Linienfläche ist:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\vartheta \, du\, dv + (Au^2 + 2Bu + 1)\, dv^2, \tag{137}$$

wobei A und B folgende Funktionen von v allein sind:

$$\begin{aligned} A &= \varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2, \\ B &= \varphi_1' f_1' + \varphi_2' f_2' + \varphi_3' f_3'. \end{aligned} \tag{138}$$

Die Fundamentalgrößen 2. Ordnung sind:

$$\begin{aligned} L = 0; \quad M &= \frac{}{\sqrt{Au^2 + 2Bu + \sin^2\vartheta}} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix} \\ N &= \frac{}{\sqrt{Au^2 + 2Bu + \sin^2\vartheta}} \begin{matrix} f_1'' + u\varphi_1'', \ldots \\ \varphi_1 \quad , \ldots \\ f_1' + u\varphi_1', \ldots \end{matrix} \end{aligned} \tag{139}$$

Die Asymptotenlinien der ersten Schar sind die Erzeugenden, die der zweiten Schar ergeben sich aus einer Riccatischen Gleichung:

$$2M du + N dv = 0.$$

Jede Regelfläche läßt sich stetig so verbiegen, daß ihre Erzeugenden geradlinig bleiben.

Rotationshyperboloid und Katenoid (s. Nr. 5) sind die einzigen Drehflächen, die in geradlinige Flächen verbogen werden können. Die Striktionslinie wird eine Bertrandsche Kurve (s. d. Bd. S. 1059) oder eine Kurve konstanter Torsion.

Betr. die Theorie der Regelflächen vgl. die reichhaltige Monographie von X. Antomari, *Thèse*, Paris 1894, die geometrische Behandlung von Schell-Salkowski, *Th. der Kurven*, 3. Aufl. 1914, Kap. VIII, sowie die Originalarbeiten von Minding, *J. f. Math.* **18**, 1838, Bonnet, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **32**, 1848, Bour, cah. **39**, 1862, Beltrami, *Ann. di Mat.* (1) **7**, 1866, Dini, ebd., die insbesondere das Biegungsproblem behandeln. Die Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene Fläche auf eine Regelfläche abwickelbar ist, haben Picone, *Ann. di Mat.* (3) **22**, 1914) und Knoblauch, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* **14**, 1915, angegeben.

2. *Rotations- und Schraubenflächen.* Die Gleichungen

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = bv + f(u) \tag{140}$$

stellen eine Schraubenfläche von der Ganghöhe $h = 2\pi b$ dar. Die Kurven $u =$ konst. sind koaxiale konzentrische Schraubenlinien, $v =$ konst. die ebenen Achsenschnitte (Profilkurven) der Fläche.

Ist $b = 0$, so stellen die Gleichungen die allgemeinste *Rotations*fläche (Drehfläche) dar, die durch Drehung der Kurve

$$z = f(u)$$

um die z-Achse entsteht. Die Parameterkurven $u =$ konst. sind die *Parallelkreise*, $v =$ konst. die *Meridiane* der Fläche.

Die erste Fundamentalform der Schraubenflächen wird

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)du^2 + 2bf'(u)du\,dv + (u^2 + b^2)dv^2, \tag{141}$$

diese läßt sich, ebenso wie die der Rotationsflächen

$$ds_1{}^2 = (1 + f'(u)^2)\,du^2 + u^2 dv^2 \tag{142}$$

auf die Form

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varphi^2(\varrho)\,dv^2 \tag{143}$$

bringen, d. h. eine Schraubenfläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar, die Parallelkreise der letzteren entsprechen den Schraubenlinien der ersteren (Bour, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **39**, 1862, Stäckel, *Math. Ann.* **49**, 1896). Das Koordinatensystem (ϱ, v) nimmt isometrische Form an, wenn man durch die Gleichung $d\varrho_1 = \varphi(\varrho)^{-1} d\varrho$ den Parameter ϱ_1 einführt.

Jede Rotationsfläche vom Bogenelement (143), deren Meridiankurve $r = \varphi(\varrho)$ ist, kann auf unendlich viele Rotationsflächen mit den Meridiankurven

$$(144)\qquad k\varphi(\varrho),\qquad z = \int \sqrt{1 - k^2\varphi'(\varrho)^2}\, d\varrho$$

verbogen werden (Minding, *J. f. Math.* **18**, 1838).

Für die geodätischen Linien der Rotationsflächen gilt der Clairautsche Satz (*Mém. de l'Ac.*, Paris 1735): Für den Winkel α, den eine geodätische Linie mit dem Parallelkreis vom Radius r bildet, besteht längs der ganzen Kurve die Beziehung

$$(145)\qquad r\cos\alpha = \text{konst.}$$

Die Bedingung dafür, daß eine durch ihre Fundamentalgrößen gegebene Fläche Rotationsfläche ist, hat J. Knoblauch (*Sitzungsber. Berlin. Math. Ges.* **14**, 1915) angegeben.

3. *Schiebungsflächen* (Translationsflächen). Wenn eine Kurve

$$(146)\qquad x = f_1(u)\quad y = f_2(u)\quad z = f_3(u)$$

sich längs einer zweiten Kurve

$$(147)\qquad x = \varphi_1(v)\quad y = \varphi_2(v)\quad z = \varphi_3(v)$$

verschiebt, so entsteht eine *Schiebungsfläche*

$$(148)\qquad x = f_1(u) + \varphi_1(v), \ldots$$

Die unter sich kongruenten Kurven $u =$ konst. und $v =$ konst. bilden ein konjugiertes Kurvennetz auf der Fläche, die Tangenten längs einer der Scharen eine Kongruenz, die sich in ∞^1 Zylinder zerlegen läßt. Vgl. die Monographie von Wendler, *Beitr. zur Theorie der Translationsflächen*, Progr. Theresiengymn. München 1900, mit ausführlichen Literaturangaben.

Die Wendelfläche

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = bv$$

kann auf unendlich viele Arten als Schiebungsfläche erzeugt werden; alle Flächen, die auf mehrfache Weise durch Schiebung entstehen, hat Lie, *Arch. f. Mat. og Naturv.* **7**, 1882 bestimmt. Vgl. Nr. 5.

4. *Minimalflächen.* Minimalflächen sind Flächen, deren mittlere Krümmung verschwindet. Ihre Differentialgleichung ist

$$(149)\qquad H = 0;$$

unter allen benachbarten Flächen, die durch eine gegebene Kurve begrenzt sind, hat die Minimalfläche den kleinsten Flächeninhalt.

Die sphärische Abbildung transformiert eine Minimalfläche konform (Bonnet, *J. de Math.* (2) **5**, 1860). Ihre Asymptotenlinien bilden ein isothermes Orthogonalsystem; ebenso sind ihre Krümmungslinien isometrisch. Jede Minimalfläche ist als Schiebungfläche isotroper Kurven darstellbar; sind also U_1, U_2, U_3 drei Funktionen von u, V_1, V_2, V_3 drei Funktionen von v, die den Gleichungen

$$(150)\qquad \begin{aligned} U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 &= 0,\\ V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 &= 0 \end{aligned}$$

genügen, so wird eine Minimalfläche dargestellt durch

$$(151)\qquad x = U_1 + V_1, \ldots$$

(Monge, veröffentlicht von Lacroix, *Traité du calc. diff.* Paris 1814. Diese Form der Gleichungen hat S. Lie seinen Untersuchungen über Minimalflächen zugrunde gelegt, *Math. Ann.* **14**, 1878). Jede *reelle* Minimalfläche ist darstellbar durch die Weierstraßschen Formeln (*Berlin. Ber.* 1866):

$$(152)\qquad \begin{aligned} &= \Re \int (1 - \tau^2) F(\tau)\, d\tau,\\ &= \Re \int i(1 + \tau^2) F(\tau)\, d\tau,\\ &= \Re \int 2\tau F(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

in denen $F(\tau)$ eine beliebige analytische Funktion von τ darstellt. Ist $\overline{F}(\bar{\tau})$ die konjugierte Funktion des zu τ konjugiertkomplexen Arguments $\bar{\tau}$, so ist

$$(153)\qquad ds^2 = (\tau\bar{\tau} + 1)^2 \overline{F}(\tau)\, F(\bar{\tau})\, d\tau\, d\bar{\tau}.$$

Die Formeln (152) lassen sich ohne Integralzeichen schreiben, wenn man $F(\tau) = f'''(\tau)$ setzt, sie werden dann:

$$(154)\qquad \begin{aligned} x &= \Re\,[(1 - \tau^2) f''(\tau) + 2\tau f'(\tau) - 2f(\tau)],\\ y &= \Re\,[i(1 + \tau^2) f''(\tau) - 2i\tau f'(\tau) + 2if(\tau)],\\ z &= \Re\,[2\tau f''(\tau) - 2f'(\tau)]. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich alle algebraischen Minimalflächen, wenn f eine beliebige algebraische Funktion ist.

Minimaldoppelflächen sind solche Flächen, bei denen man durch stetige Bewegung von einer auf die andere Seite kommen kann. Sie sind der Ort der Mittelpunkte der Bisekanten einer Minimalkurve; ihre beiden Scharen von Minimalkurven sind nicht

zu trennen, sondern bilden eine die Fläche doppelt überdeckende Schar von kongruenten parallel gestellten Kurven (Lie, *Math. Ann.* **14**, 1879). Die Realitätsbedingungen für diese Flächen hat v. Lilienthal, *Jahresb. D. Math. Ver.* **17**, 1908, angegeben.

5. *Spezielle Minimalflächen.* Unter den zahlreichen, genauer untersuchten Minimalflächen sind hervorzuheben:

Das *Katenoid*, das durch Rotation der Kettenlinie um ihre Leitlinie entsteht:

$$x^2 + y^2 = k^2 \operatorname{Cof}^2 \cdot \tag{155}$$

es ist die einzige reelle Minimalrotationsfläche (Meusnier, *Mém. Sav. Étr.* **10**, Paris 1785; Catalan, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **37**, 1858).

Die *Wendelfläche* (Meusnier, a. a. O.), die einzige reelle geradlinige Minimalfläche:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{k}, \tag{156}$$

Die Scherksche *Minimalfläche* (*J. f. Math.* **13**, 1835)

$$\cos y = \cos x e^z \tag{157}$$

wird auf unendlich viele Weisen als Schiebungsfläche erzeugt (Lie, *Arch. for Mat. og Naturv.* **4**, 1880, Stäckel, *Amer. Math. S. Trans.* **7**, 1906).

Die Hennebergsche *Minimalfläche* (*Diss.* Zürich 1875) ist eine algebraische Minimaldoppelfläche; sie wird durch die Gleichungen (152) für $F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$ dargestellt.

Die Ennepersche *Minimalfläche* (*Zs. f. Math. u. Phys.* **9**, 1864) entsteht für $F(\tau) = 3$, ihre Krümmungslinien sind sämtlich ebene Kurven 3. Ordnung, ihre Asymptotenlinien kubische Raumkurven.

Die Schwarzsche *Minimalfläche* (1867; *Ges. Abh.* I, 6), bei der

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14u^4 + u^8}} \cdot \tag{158}$$

Weitere besondere Flächen s. Bianchi, *Vorl.* 377—381, sowie in der monographischen Darstellung der Theorie bei Darboux, *Th. des surf.* I, 267—506.

6. *Transformationen von Minimalflächen.* Zu einer Minimalfläche (151) gibt es unendlich viele isometrische Minimalflächen, die durch die Gleichungen

$$e^{i\alpha} U_1 + e^{-i\alpha} V_1, \ldots \tag{159}$$

erschöpft sind. Läßt man die Konstante α alle möglichen Werte annehmen, so erhält man die Schar der zur gegebenen *assoziierten Minimalflächen* (Schwarz, *J. f. Math.* **80**, 1875; *Ges. Abh.* I, 175), zu ihnen gehört für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ die von O. Bonnet (*C. R.* **37**, 1853) gefundene *adjungierte Fläche.*

Eine Schar von Minimalflächen, die auf eine gegebene derart konform abgebildet sind, daß Krümmungslinien in Krümmungslinien übergehen, hat Goursat (*Acta Math.* **11**, 1888, Kreft, *Diss.* Münster 1908) angegeben. Sie entstehen durch eine imaginäre Rotation der erzeugenden Minimalkurven um eine reelle Achse. Die aus der Fläche (152) durch Goursatsche *Transformation* erzeugten Flächen werden durch die Gleichungen

$$
(160) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \Re\int(1-\tau^2)F(k\tau)k^2 d\tau,\\
y_1 &= \Re\int(i(1+\tau^2))F(k\tau)k^2 d\tau,\\
z_1 &= \Re\int 2\tau F(k\tau)k^2 d\tau
\end{aligned}
$$

dargestellt, in denen k eine reelle positive Konstante bedeutet.

7. *Spezielle Aufgaben.* Eine Minimalfläche ist eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß sie durch eine gegebene Kurve gehe und längs dieser gegebene Normalen besitzt, also auch durch eine ihrer Geodätischen oder Asymptotenlinien.

Jede auf einer Minimalfläche liegende Gerade ist eine Symmetrieachse, eine Ebene, die die Minimalfläche senkrecht schneidet, ist Symmetrieebene der Fläche.

Die Aufgabe, durch eine gegebene geschlossene Begrenzung ein singularitätenfreie Minimalfläche zu legen, ist das Plateausche Problem. Für das aus vier Kanten eines regelmäßigen Tetraeders gebildete gleichseitige windschiefe Viereck löst die Schwarzsche Minimalfläche (158) die Aufgabe.

Eine Fläche ist in eine Minimalfläche verbiegbar, wenn sie die Gleichung erfüllt (Ricci, Raffy, *Paris Soc. Math. Bull.* **20**, 1892):

$$
(161) \qquad \Delta^2 \log(-K) = 4K
$$

Die Theorie der Minimalflächen steht in engsten Beziehungen zur Theorie der Funktionen komplexen Arguments; sie hat infolgedessen seit dem ersten Auftreten des Problems bei Euler und Lagrange eine besondere Ausbildung erfahren, die hier nur andeutungsweise skizziert werden konnte. Näheres ist in der Literatur nachzulesen, insbesondere bei E. Beltrami, *Bologna Mem.*

(2) 7, 1868; *Opere* II; H. A. Schwarz, *Ges. math. Abh.* (der 1. Band ist ganz der Theorie der Minimalflächen gewidmet), Ribaucour, *Mém. cour. de l'Ac. de Belg.* **44**, 1880; Weingarten, *Gött. Nachr.* 1887; Darboux, *Th. des surf.* I.

8. *Flächen konstanten Krümmungsmaßes.* (Vgl. die ausführliche Darstellung der Theorie in Darboux, *Th. des surf.* III, 375—500 und Bianchi, *Vorles.* S. 424—518.)

Alle Flächen derselben konstanten Krümmung $\pm \frac{1}{R^2}$ sind aufeinander abwickelbar und beliebig in sich verschiebbar (Minding, *J. f. Math.* **19**, 1839; Beltrami, *G. di Mat.* **6**, 1868); ihre Krümmungs- und Asymptotenlinien lassen sich durch Quadraturen bestimmen (Lie, *Arch. for Math. og Naturv.* **4**, 1880), ihre geodätischen Linien lassen sich durch lineare Gleichungen

$$au + bv + c = 0$$

darstellen (Beltrami, *Ann. di Mat.* (1) **7**, 1865); d. h. sie lassen sich so auf einer Ebene abbilden, daß den geraden Linien die Geodätischen entsprechen. Hieraus folgerte Beltrami (*G. di Mat.* **6**, 1868), die Tatsache, daß die Geometrie auf den Flächen der konstanten Krümmung $-\frac{1}{R^2}$, 0, $+\frac{1}{R^2}$ mit der *hyperbolischen* oder *Lobatschewskischen*, der *Euklidischen* und der *elliptischen* oder *Riemannschen Geometrie* übereinstimmt. Die Erkenntnis, daß die nicht-euklidischen Geometrien auf den Flächen konstanter nicht verschwindender Krümmung realisiert sind, ist von historischer Bedeutung, sie hob die damals noch vielfach vorhandenen Zweifel über die Richtigkeit der Grundlagen. Erst später wurde die Ableitung der drei Geometrien aus Untergruppen der projektiven Gruppe gegeben (F. Klein, *Math. Ann.* **4**, **6**, 1871—1874; *Gesamm. math. Abh.* I, 1921).

Das Linienelement der Flächen konstanter Krümmung läßt sich auf folgende Form bringen:

(162) $K = 0 \quad ds^2 = du^2 + dv^2$ (Linienelement der Ebene),

(163) $K > 0 \quad ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{R}\, dv^2$ (Linienelement der Kugel),

(164) $K < 0 \quad ds^2 = du^2 + \mathfrak{Cos}^2 \frac{u}{R}\, dv^2$ (Linienelem.d.Pseudosphäre).

Alle Flächen der Krümmung Null sind demnach auf die Ebene abwickelbar, alle Flächen von konstanter positiver Krümmung auf eine Kugel, die Flächen konstanter negativer Krüm-

mung auf eine imaginäre Kugel oder auf eine reelle Rotationsfläche, die als Pseudosphäre (s. u.) bezeichnet wird.

9. *Rotationsflächen konstanter Krümmung.*

A) *Sphärische Flächen* ($K > 0$). Wählt man auf einer sphärischen Fläche von der Krümmung $K = 1$ ein beliebiges orthogonal-geodätisches Koordinatensystem, so läßt sich das Linienelement der Fläche stets auf die Form (163) bringen; die unendlich vielen *Rotationsflächen*, auf die die Fläche abwickelbar ist (vgl. Nr. **45**), zerfallen in drei Typen, die durch ihre Meridiankurven gekennzeichnet sind:

a) elliptischer Typus

$$x = c \cos \varphi, \quad z = E(c, \varphi), \tag{165}$$

b) parabolischer Typus

$$x = \cos \varphi, \quad z = \sin \varphi, \tag{166}$$

c) hyperbolischer Typus

$$x = \frac{1}{c} \Delta \varphi, \quad z = \frac{1}{c} E(c, \varphi) - \frac{1 - c^2}{c} F(c, \varphi). \tag{167}$$

Dabei bedeutet nach Legendre:

$$\Delta \varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi},$$

$$E(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta \varphi \, d\varphi,$$

$$F(c, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}.$$

Der Meridian des parabolischen Typus ist ein Kreis.

B) *Pseudosphärische Flächen* ($K < 0$). Auf einer pseudosphärischen Fläche, für die $K = -1$ genommen sei, gibt es drei Arten von orthogonal-geodätischen Systemen.

a) alle auf einer geodätischen Linie senkrechten Geodätischen und deren Orthogonalkurven;

b) alle auf einem Grenzkreise (Horocyclus), d. h. einem geodätischen Kreise von der geodätischen Krümmung 1 senkrechten Geodätischen und ihre Orthogonaltrajektorien;

c) alle von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien und ihre Orthogonaltrajektorien. Die Orthogonaltrajektorien sind konzentrische geodätische Kreise, im ersten Falle ist ihr Mittel-

punkt imaginär, im zweiten unendlich fern und nur im dritten Falle ein eigentlicher Punkt auf der Fläche.

Diesen drei Fällen entsprechen drei verschiedene Formen des Linienelements, die für jede pseudosphärische Fläche gelten:

$$ds^2 = du^2 + \mathfrak{Sin}^2 u\, dv^2 \quad \text{(elliptischer Typus)},$$
$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2 \quad \text{(parabolischer Typus)},$$
$$ds^2 = du^2 + \mathfrak{Cof}^2 u\, dv^2 \quad \text{(hyperbolischer Typus)}.$$

Die Rotationsflächen, deren Meridiankurven $v =$ konst. und deren Parallelkreise $u =$ konst. sind, werden dargestellt durch

1. $x = c \cos\varphi,\ z = F(c, \varphi) - E(c, \varphi)$ (ellipt. Typus),

2. $x = \cos\varphi, \quad z = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\varphi$ (parabol. Typus),

3. $x = \frac{1}{c} \Delta\varphi,\ z = \frac{1}{c} F(c, \varphi) - \frac{1}{c} E(c, \varphi)$ (hyperbol. Typus).

Dem Typus 2 entspricht die Traktrix; die zugehörige Rotationsfläche wird als *Pseudosphäre* bezeichnet (Beltrami, *Ann. di Mat.* **6**, 1864).

Verschiebt man eine Rotationsfläche der konstanten Krümmung $+1$ längs ihrer Achse, so bilden die Orthogonalflächen ein System kongruenter Flächen konstanter negativer Krümmung, und zwar entspricht dem elliptischen (hyperbolischen) Typus der einen Art der elliptische (hyperbolische) Typus der anderen, die Kugelschar wird von Pseudosphären geschnitten (Beltrami a. a. O.; Scheffers, *Th. d. Kurven*, mit übersichtlicher Figur).

10. *Weitere bekannte Flächen konstanter Krümmung.* Da die Bestimmung der Flächen konstanter Krümmung auf eine im allgemeinen nicht lösbare Differentialgleichung führt (s. Nr. **11**), so sind nur einzelne Typen dieser Flächenklasse der Untersuchung zugänglich. Bemerkenswert sind:

1. Die *Enneperschen Flächen* (*Gött. Nachr.* 1868; Bianchi, *Ann. di. Mat.* (2) **13**, 1885; Kuen, *Münch. Ber.* **14**, 1884), die Flächen konstanter Krümmung mit ebenen Krümmungslinien; sie sind Sonderfälle der Joachimsthalschen Flächen (Nr. **17**, 4).

2. Die *Schraubenflächen* konstanter Krümmung (Minding, *J. f. Math.* **19**, 1839; Dini, *Ann. di Mat.* (1) **7**, 1865; Bianchi, Diss. Pisa 1879). Ein besonderer Fall ist die Schraubenfläche der Traktrix, die Dinische *Schraubenfläche* (vgl. Bianchi, *Vorl.* S. 476).

3. Die Flächen konstanter Krümmung mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien (Enneper, *Gött. Nachr.* 1868; Dobriner, *Acta Math.* **9**, 1886).

11. *Die Differentialgleichung der pseudosphärischen Flächen.* Da die Asymptotenlinien einer Fläche von der Krümmung -1 konstante Torsion ± 1 haben, so muß die sphärische Abbildung ihres Netzes ein äquidistantes Kurvensystem auf der Kugel bilden. Ist 2ω der Winkel der Asymptotenlinien

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 \tag{168}$$

die erste Grundform der Fläche, so wird die sphärische Abbildung durch

$$d\mathfrak{s}^2 = d\alpha^2 - 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 \tag{169}$$

gegeben, wobei nach (30) für ω die Gleichung

$$\frac{\partial^2 (2\omega)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin 2\omega \tag{170}$$

besteht. Bezieht man dieselbe Fläche auf Krümmungslinien (u, v), so wird $u = \alpha + \beta$, $v = \alpha - \beta$ und:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2,\\ d\mathfrak{s}^2 &= \sin^2\omega\, du^2 + \cos^2\omega\, dv^2. \end{aligned} \tag{171}$$

Die grundsätzliche Schwierigkeit des Problems der pseudosphärischen Flächen liegt in der Bestimmung äquidistanter sphärischer Netze. Ist ein solches bekannt, so findet man die entsprechende Fläche konstanter Krümmung durch Quadraturen.

Die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind

$$r_1 = -R \operatorname{tg} \omega, \quad r_2 = R \operatorname{ctg} \omega. \tag{172}$$

Mit der Gleichung (170) gleichwertig ist die auf Krümmungslinien bezogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{173}$$

12. *Transformationen der pseudosphärischen Flächen.* Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (173) scheint zurzeit aussichtslos zu sein; man muß sich daher mit der Aufsuchung partikulärer Integrale (s. Nr. **10**) und Transformationen bekannter Lösungen begnügen. Die erste Transformation wurde von Ribaucour (*C. R.* **70** (1870) 330) angegeben: *Konstruiert man in den Tangentialebenen einer Fläche der konstanten Krümmung — 1 um die Berührungspunkte die Kreise mit dem Ra-*

dius 1, so sind die Orthogonalflächen dieser Kreise Flächen derselben konstanten Krümmung.

Jede einzelne dieser Orthogonalflächen geht aus der Ausgangsfläche durch die *Komplementärtransformation* (Bianchi, *Pisa Ann.* **2** (1879), 285) hervor:

Der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung einer Schar paralleler Grenzkreise (s. Nr. **9**) *einer pseudosphärischen Fläche ist eine auf die Ausgangsfläche abwickelbare Fläche.* Die Flächen sind die beiden Brennflächen eines Normalensystems, bei dem der Brennpunktabstand konstant ist (Pseudosphärische Normalensysteme Kap. **41**, Nr. **36**).

Diese Transformation ist von Bäcklund (*Lund Univ. Årsskr.* **19**, 1883, *Math. Ann.* **9**, **19**, 1882) folgendermaßen verallgemeinert worden: *Konstruiert man in den Berührungsebenen einer pseudosphärischen Fläche der Krümmung — 1 Kreise von konstantem Radius* $\cos\sigma$, *so sind alle Flächen, die diese Kreise unter dem Winkel* σ *schneiden, Flächen derselben konstanten Krümmung — 1. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Ausgangsfläche und einer der Isogonalflächen bilden ein Strahlensystem, das beide Flächen als Brennmäntel besitzt* (*pseudosphärische Kongruenzen* s. Kap. 41, Nr. 36), *auf diesen entsprechen sich die Krümmungslinien und die Asymptotenlinien, letztere sind isometrisch aufeinander bezogen.*

Diese Bäcklundsche Transformation wird durch die Formeln dargestellt:

$$(174)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\omega_1}{\partial u}+\frac{\partial\omega}{\partial v} &= \frac{\cos\omega\sin\omega_1+\sin\sigma\sin\omega\cos\omega_1}{\cos\sigma},\\ \frac{\partial\omega_1}{\partial v}+\frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\frac{\sin\omega\cos\omega_1+\sin\sigma\cos\omega\sin\omega_1}{\cos\sigma}, \end{aligned}$$

die ein unbeschränkt integrables System bilden. Für die transformierte Fläche wird dann

$$(175)\qquad ds_1^{\,2}=\cos^2\omega_1\,du^2+\sin^2\omega_1\,dv^2,$$

wobei ω_1 ebenfalls eine Lösung der Gleichung (173) ist. Die Formeln der Komplementärtransformation werden erhalten, wenn man $\sigma=0$ setzt.

Die Bäcklundsche Transformation ist die allgemeinste bisher bekannte Transformation der pseudosphärischen Flächen, sie läßt sich indessen mittels einer von Lie (*Arch. f. Math. og Naturv.* **4** (1879) 510) angegebenen Transformation aus der Komplementärtransformation herleiten (Darboux, *Th. d. surf.* III, 438).

Ihre Erweiterung auf allgemeine Flächen 2. Ordnung bildet die Grundlage der Bianchischen Biegungstheorie dieser Flächen, auf die hier nur hingewiesen werden kann. Eine zusammenfassende Darstellung dieser schönen und wichtigen Theorie gibt der dritte Band der *Lezioni* von Bianchi, verkürzt *Vorlesungen* S. 516—624.

Für Bäcklundsche Transformationen gilt der *Vertauschbarkeitssatz* (Bianchi, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5) **1**, 1892). Sind F_1 und F_2 aus einer Fläche F durch zwei Bäcklundsche Transformationen mit den Konstanten σ_1 und σ_2 entstanden, so gibt es eine vierte pseudosphärische Fläche F', die gleichzeitig aus F_1 und F_2 durch Bäcklundsche Transformationen, aber mit den vertauschten Konstanten σ_2 und σ_1 hervorgeht.

Auf Grund dieses Satzes kann man die Bäcklundschen Transformierten einer aus F abgeleiteten Fläche F_1 durch algebraische Operationen und Differentiationen bestimmen. Auch die Bestimmung der geodätischen Linien der abgeleiteten Fläche erfordert keine neue Integrationen.

Wendet man auf die Fläche F zwei konjugiert komplexe Bäcklundsche Transformationen an, so ergeben sich imaginäre Flächen, doch ist die vierte Fläche des Vertauschbarkeitssatzes wieder reell.

Der Vertauschbarkeitssatz ordnet die Punkte P, P_1, P_2, P' der vier Flächen F, F_1, F_2, F' einander derart eindeutig zu, daß ihre Verbindungslinien die Seiten eines windschiefen Vierecks bilden, dessen Flächen mit den Tangentialebenen an die vier Flächen zusammenfallen. Sind die B-Transformationen insbesondere so gewählt, daß die Seiten des Vierecks gleich groß sind, so schneiden sich die Normalen an die Flächen F, F' bzw. F_1, F_2 in zwei Punkten P_0, P_0', deren Ortsflächen F_0, F_0' Biegungsflächen eines und desselben imaginären Rotationsellipsoids sind.

Unter den Flächen, die dieselbe sphärische Abbildung der Krümmungslinien besitzen wie die pseudosphärischen Flächen (Eisenhart, *Amer. J.* **27**, 1905, *Ann. di Mat.* (3) **12**, 1905) ist ein von Bianchi (*Annali di Mat.* (2) **24**, 1896) untersuchter Spezialfall bemerkenswert.

13. *Differentialgleichung und Transformationen sphärischer Flächen. Biegung des Rotationsellipsoids.* Vom analytischen Standpunkte aus ist die Theorie der Flächen konstanter Krümmung vom Vorzeichen der Krümmung unabhängig. Alle Ergebnisse der vorigen Nummern gelten daher auch für sphärische Flächen und sind erst dann umzugestalten, wenn es sich um die Berücksichtigung der Realitätsverhältnisse handelt.

Die Bestimmung der Flächen von der konstanten Krümmung $+1$ erfordert die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$(176) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega = 0;$$

jeder Lösung entsprechen zwei Flächen, deren erste Grundformen

$$(177) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= \mathfrak{Sin}^2\omega\, du^2 + \mathfrak{Cof}^2\omega\, dv^2, \\ ds_1^2 &= \mathfrak{Cof}^2\omega\, du^2 + \mathfrak{Sin}^2\omega\, dv^2 \end{aligned}$$

sind, und zwar kennzeichnet das sphärische Bild der ersten Fläche das Linienelement der zweiten und umgekehrt. Die Hauptkrümmungsradien sind

$$(178) \qquad r_1 \quad \mathfrak{Cotg}\,\omega, \qquad \mathfrak{Tg}\,\omega$$

für die erste und

$$(179) \qquad r_1 = \mathfrak{Tg}\,\omega, \qquad r_2 = \mathfrak{Cotg}\,\omega$$

für die zweite Fläche (Hatzidakissche Transformation, *J. f. Math.* **88**, 1879; Eisenhart, *Amer. Math. Soc. Trans.* **6**, 1905; E. Richter, Diss. München 1913).

Die Bäcklundsche Transformation der sphärischen Flächen führt auf imaginäre Flächen, indessen gestattet der Vertauschbarkeitssatz, durch Komposition zweier passend gewählter Bäcklundscher Transformationen auf reelle Flächen zu kommen.

Führt man auch hier die in Nr. 12 angegebene Konstruktion der Flächen F_0, F_0' aus, so erhält man mit jeder Transformation der Flächen konstanter Krümmung zwei reelle Biegungsflächen eines reellen Rotationsellipsoids verknüpft. (Guichard, *C. R.* **128**, 1899; Bianchi, *Ann. di Mat.* (3) **3**, 1899, **5**, 1901; Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **16**, 1899.)

14. *Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung.* Die Parallelflächen einer Fläche konstanter Krümmung $\frac{1}{R^2}$ im Abstand $\pm R$ sind, wenn sie nicht degenerieren (Study, *Amer. J.* **32**, 1910) zwei Flächen der konstanten mittleren Krümmung $\pm \frac{1}{R}$, deren erste Grundform

$$(180) \qquad ds^2 = R^2 e^{\pm 2\omega}(du^2 + dv^2)$$

ist (Bonnet, *Nouv. Ann.* (1) **12**, 1853). Das Problem der Flächen $H =$ konst. ist daher analytisch gleichwertig dem Problem der Flächen $K =$ konst.

Rollt ein Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Dreh-

hyperboloid oder Drehparaboloid auf einer seiner Biegungsflächen, so beschreibt jeder Brennpunkt eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung, und zwar ist für das Paraboloid $H = 0$ (Guichard, *C. R.* **128**, 1899).

Von besonderen Flächen der Klasse sind die *Rotationsflächen* näher untersucht; sie entstehen gemäß der obigen Konstruktion aus den sphärischen Rotationsflächen und haben als Meridiankurve Delaunaysche Kurven, d. h. die Rollkurven, die der Brennpunkt einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel beschreibt, wenn der Kegelschnitt auf einer Geraden abrollt; im Falle der Parabel ist die Meridiankurve eine Kettenlinie (*J. de Math.* (1) **6**, 1841).

15. *Weingartensche Flächen* (W-Flächen). Flächen, deren Hauptkrümmungen r_1, r_2 durch eine Gleichung

$$\varphi(r_1, r_2) = 0 \tag{181}$$

verbunden sind, heißen *W-Flächen*. Zu dieser Klasse gehören die meisten der bisher betrachteten Flächenfamilien. Die Quelle ihrer charakteristischen Eigenschaften liegt in dem grundlegenden Satze von Weingarten (*J. f. Math.* **59**, 1861): *Jeder Evolutenmantel ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar*, und zwar sind die ersten Grundformen der beiden Evolutenflächen

$$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} du^2, \quad ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}} w v, \tag{182}$$

wobei u, v die Parameter der Krümmungslinien der W-Fläche bedeuten.

Bei der Abwickelung gehen die geodätischen Linien, in denen die Evolute von der Kongruenz der Normalen berührt wird, in die Meridiane der Rotationsfläche über.

Umgekehrt: Jede nichtgeradlinige Biegungsfläche einer Rotationsfläche ist Evolutenmantel einer Schar von parallelen W-Flächen. Der zugehörige zweite Mantel der Evolute wird *Ergänzungsfläche* genannt.

Auf den beiden Mänteln der Evolute entsprechen sich die Asymptotenlinien, die Normalenkongruenz der W-Fläche ist eine W-Kongruenz.

Die Krümmungslinien der W-Fläche werden durch Quadraturen bestimmt (Lie, *Arch. for Math. og Naturv.* **4**, 1879).

Das sphärische Bild der Krümmungslinien einer W-Fläche läßt sich stets so darstellen, daß seine erste Grundform

$$d\mathfrak{s}^2 = \frac{du^2}{\alpha^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'(\alpha)^2} \tag{183}$$

wird, wobei α eine Funktion von u und v ist und die Hauptkrümmungsradien der Fläche

$$r_2 = \vartheta(\alpha), \quad r_1 = \vartheta(\alpha) - \alpha\vartheta'(\alpha) \tag{184}$$

sind (Weingarten, *J. f. Math.* **62**, 1863).

Die erste Grundform der Fläche selbst läßt sich, auf Krümmungslinien bezogen, in der Form

$$ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'^2(\beta)} \tag{185}$$

darstellen, wobei β eine Funktion von u und v ist. Die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind (Bianchi, *Vorles.* 257):

$$\frac{1}{\vartheta(\beta)}, \quad \frac{1}{r} = \vartheta(\beta) - \beta\vartheta'(\beta). \tag{186}$$

Zwischen den Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 einer W-Fläche und den Krümmungsmaßen K_1, K_2 ihrer Zentrafläche besteht die Halphensche Gleichung (*Bull. Soc. Math. Fr.* **4** (1876) S. 94)

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4}. \tag{187}$$

16. *Besondere W-Flächen.* Setzt man in (183) $\vartheta'(\alpha) = 1$, so ergeben sich die *Röhrenflächen* (Hüllflächen von Kugeln mit konstantem Radius), für $\vartheta'(\alpha) = \alpha$ die Minimalflächen; ihre Evolutenflächen sind Biegungsflächen der Evolute des Katenoids. Die Evolutenflächen der pseudosphärischen Flächen sind auf das Katenoid abwickelbar, die Ergänzungsflächen der pseudosphärischen Flächen auf die Rotationsfläche der verkürzten, gewöhnlichen oder verlängerten Traktrix.

Bezieht man die Kugel auf konfokale geodätische Ellipsen und Hyperbeln, so wird ihre erste Grundform:

$$d\mathfrak{s}^2 = \frac{du^2}{\sin^2\omega} + \frac{dv^2}{\cos^2\omega}, \tag{188}$$

diese entspricht der Gleichung (183), wenn

$$\alpha = \sin\omega, \quad \vartheta'(\alpha) = \cos\omega$$

gesetzt wird; die Gleichung der zugehörigen W-Flächen ist somit

$$2(r_2 - r_1) = \sin 2(r_2 + r_1), \tag{189}$$

und beide Zentraflächen sind auf das Rotationsparaboloid abwickelbar (Weingarten, *J. f. Math.* **62**, 1862; Darboux, *Th. des surf.* III, 322, 425).

Die reellen *geradlinigen W-Flächen* sind Schraubenflächen (Beltrami, *Ann. di Mat.* 7, 1865). Die Flächen, für die $r_2 - r_1 =$ konst. ist, sind von Lipschitz, *Acta Math.* **10**, 1887, und v. Lilienthal, *Acta Math.* **11**, 1888 behandelt worden.

17. *Einige weitere besondere Flächenklassen.* 1. *Die Kanalflächen* (Monge, *Applicat. de l'Anal.*) sind die Hüllflächen von ∞^1 Kugeln; eine ihrer Evoluten reduziert sich auf eine Kurve.

2. Die *Gesimsflächen* (surfaces moulures, Monge, *Applicat. de l'Analyse* S. 322) werden von einer festen Kurve in der Tangentialebene eines Zylinders beschrieben, wenn diese auf dem Zylinder abrollt. Die feste Kurve beschreibt die eine Schar, die einzelnen Punkte der Kurve die zweite Schar der Krümmungslinien. Die Flächengleichungen sind (Bour, *J. de l'Éc. Pol.*, cah. 39, 1862):

$$(190)\qquad \begin{gathered} x = a\,U\cos\frac{v}{a} + \int V\sin\frac{v}{a}\,dv,\quad y = a\,U\sin\frac{v}{a} - \int V\cos\frac{v}{a}\,dv,\\ z = \int\sqrt{1 - a^2 U'^2}\,du. \end{gathered}$$

Läßt man a variieren, so ergibt sich eine Schar isometrischer Gesimsflächen (s. Nr. 2, (144)).

3. *Die Flächen mit lauter ebenen Krümmungslinien*, von denen die Gesimsflächen einen Sonderfall bilden, sind von Bonnet (*J. de l'Éc. Pol.* **20**, 1853); Dini (*Mem. Soc. It. d. Sc.* (3) $\mathbf{1}_2$, 1868) und Darboux (*Th. des surf.* I, 127, IV, 180) untersucht worden.

4. *Die Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien* wurden ebenfalls von Darboux (*Th. des surf.* IV, 200) bestimmt. Schneiden sich die Ebenen in einer Geraden (*Joachimsthalsche Flächen, J. f. Math.* **23**, 1842, **54**, 1854), so ist die zweite Schar der Krümmungslinien sphärisch, und zwar liegen die Mittelpunkte der Kugeln auf der Schnittgeraden.

Betr. des allgemeinen Problems der Flächen mit sphärischen Krümmungslinien sei auf die zusammenfassende Darstellung bei Darboux (*Th. des surf.* IV, 239—266) verwiesen.

5. *Spiralflächen* (Peterson, *Über Kurven und Flächen*, Leipzig 1868; Stäckel, *Leipz. Ber.* 1898) sind Flächen, die bei einer Spiraltransformation des Raumes (Drehung um eine Achse, verbunden mit einer Ähnlichkeitsformation von einem Punkte der Achse aus) invariant bleiben. Ihre Krümmungslinien, Minimalkurven und Asymptotenlinien werden durch Quadraturen, ihre geodätischen Linien durch eine Riccatische Differentialgleichung bestimmt. Ihre Gleichungen sind:

(191) $x = r_0 e^{ht} \cos(\omega + rt)$, $x = r_0 e^{ht} \sin(\omega + rt)$, z [illegible] z_0[illegible]

wobei r_0, z_0, ω willkürliche Funktionen eines Parameters ϑ, h und r konstant sind (Lie, *Math. Ann.* **5**; Lie-Scheffers, *Vorl. über Differentialgl. mit bek. inf. Transf.*, Leipzig 1891; *Geometrie der Berühr.-Transf.* I, 162, 1896; Darboux, *Th. des surf.* I, 108.)

6. *Isothermflächen* heißen Flächen, deren Krümmungslinien ein isometrisches Netz bilden (Nr. **25**, 1). Sie bilden eine sehr umfangreiche, durch eine Differentialgleichung 4. Ordnung (Weingarten, *Berlin. Ber.* 1883; Knoblauch, *J. f. Math.* **103**, 1888; Frobenius, *J. f. Math.* **110**, 1892; R. Rothe, Diss. Berlin 1897; Calapso, *Palermo Rend.* **17**, 1903) bestimmte Flächenklasse, der die meisten genauer bekannten Flächen (Flächen 2. Ordnung, Zykliden, Rotationsflächen, Flächen konst. mittlerer Krümmung $H \gtreqless 0$,) an[illegible]ren und die die Gruppe der Inversionen zuläßt. Zwei Flächen, die bei paralleler Zuordnung konform aufeinander bezogen sind, sind abgesehen von Ausnahmefällen isotherm (Christoffel, *J. f. Math.* **57**, 1867; Bour, *J. de l'Éc. Pol.* **39**, 1862). Betreffs der neuesten Literatur sei auf die Arbeiten von R. Rothe, *C. R.* **142**, 1906, *Math. Ann.* **72**, 1912 und Raffy, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **22**, **23** (1905—1906) verwiesen.

Mit der Theorie der Isothermflächen verknüpft sind die Guichardschen N-Flächen (*C. R* **130**, 1900); mit jeder derselben ist eine gleichartige Fläche N' gekoppelt, die dieselbe sphärische Abbildung hat, und deren Hauptkrümmungsradien r_1', r_2' mit denen der Fläche N durch die Gleichung

$$r_1 r_2' + r_2 r_1' = \text{konst.} \tag{192}$$

verknüpft sind (Calapso, *Ann. di Mat.* (3) **11**, 1905; Jonas, *Sitz.-Ber. Berlin. Math. Ges.* **17**, 1918).

7. *Die Petersonschen P-Flächen* (Peterson, *Über Kurven und Flächen*, Leipzig 1868; Voß, *Math. Ann.* **39**, 1891; Segre, *Torino Atti* **43**, 1908) stellen in gewisser Hinsicht die projektive Verallgemeinerung der Schiebungsflächen dar; sind $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ die homogenen Koordinaten eines Flächenpunktes, so lauten ihre Gleichungen

$$x_i = U_i + V_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

auf ihnen gibt es ein System von konjugierten Kurven, deren Laplacesche 1. und — 1. Transformierte in Kurven ausarten. Auf den besonderen Fall, daß das konjugierte System aus Krümmungslinien besteht, hat P. Stäckel (*Heidelb. Ak. Ber.* 1915) hingewiesen.

8. *Die Voßschen und Guichardschen Flächen.* Die Flächen, auf denen ein konjugiertes System von geodätischen Linien existiert, sind von A. Voß (*Münch. Ber.* 1888) untersucht worden; das sphärische Bild dieses Systems ist ein äquidistantes Kurvennetz auf der Kugel: ihre Bestimmung ist daher analytisch mit dem Problem der pseudosphärischen Flächen (Nr. 54 (170)) gleichwertig. Sie sind Zentraflächen der Guichardschen Fläche, d. h. der Brennfläche der Guichardschen Strahlensysteme (vgl. Nr. **37** des vorigen Kapitels).

9. *Die Appelschen Flächen* s. Nr. 27 im vorigen Kapitel.

§ 2. Flächensysteme.

18. *Flächenscharen.* Eine Gleichung

$$F(x, y, z) = \varrho, \tag{193}$$

in der ϱ ein Parameter ist, stellt eine Schar von ∞^1 Flächen dar. Ihre Orthogonaltrajektorien bilden eine Kongruenz von ∞^2 Kurven, die durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \tag{194}$$

gekennzeichnet sind. Umgekehrt besitzt eine Kurvenkongruenz, deren Differentialgleichung

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{195}$$

lautet, dann und nur dann eine Schar von Orthogonalflächen, wenn die Beziehung

$$X(Y_z - Z_y) + Y(Z_x - X_z) + Z(X_y - Y_x) = 0 \tag{196}$$

besteht.

Das Problem der Kongruenzen *ebener* Kurven, die eine Schar von Orthogonalflächen besitzen (Ribaucour, *J. de Math.* (4) **7**, 1891, Cosserat, *Toulouse Mém.* (10) **1**, 1901, Carrus, Paris *C. R.* **140**, 1905) führt auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Die Scharen von *abwickelbaren* Flächen mit ebenen Orthogonaltrajektorien sucht Mosch, *Math. Ann.* **63**, 1907.

19. *Dreifache Flächensysteme. Krummlinige Koordinaten.* Drei Gleichungen

$$F_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad F_2(x, y, z) = \varrho_2, \quad F_3(x, y, z) = \varrho_3 \tag{197}$$

bestimmen drei Flächenscharen, von denen innerhalb eines gewissen Bereiches durch jeden Raumpunkt je eine Fläche jeder der

Scharen hindurchgeht. Durch die Angabe der entsprechenden Parameterwerte $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ist der Punkt (x, y, z) vollständig bestimmt, und man kann daher $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ als die *krummlinigen Koordinaten* eines Raumpunktes auffassen. Das Linienelement des Raumes wird hier durch

$$(198)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= H_1{}^2 d\varrho_1{}^2 + H_2{}^2 d\varrho_2{}^2 + H_3{}^2 d\varrho_3{}^2 \\ &\quad + 2h_{23} d\varrho_2 d\varrho_3 + 2h_{31} d\varrho_3 d\varrho_1 + 2h_{12} d\varrho_1 d\varrho_2 \end{aligned}$$

dargestellt, wobei

$$(199)\qquad \begin{aligned} H_i^2 &= \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2 \\ h_{ik} &= \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_i} \frac{\partial x}{\partial x_k} \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

gesetzt ist. Zwischen diesen Fundamentalgrößen besteht eine große Anzahl von Beziehungen, die den Gauß-Mainardischen Gleichungen der Flächentheorie entsprechen. Vgl. die eingehenden Untersuchungen von Aoust, *Annali di Mat.* (1) **6**, (2) **2**, **3**, **5** (1865—1873), Brioschi, *Annali di Mat.* (2) **1**, 1868, Codazzi, *Annali di science mat. e fis.* **8** (1857), *Annali di Mat.* (2) **1**, **2**, **4**, **5** (1868—1873).

Von besonderer Bedeutung sind die dreifach *orthogonalen* Systeme, die auf rechtwinklige krummlinige Koordinaten im Raume führen. S. Nr. 21.

20. *Dreifach konjugierte Systeme.* Schneiden sich die Flächen eines Systems $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ gegenseitig in konjugierten Kurvenscharen, so bezeichnet man das Flächensystem (195) als ein *dreifach konjugiertes System* (Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **7**, 1878; *Théorie des surf.* IV, *Syst. orth.* S. 361). Es sind die einzigen nicht homothetischen krummlinigen Koordinatensysteme im Raume, die eine *Paralleltransformation* zulassen, d. h. die sich punktweise derart zuordnen lassen, daß in entsprechenden Punkten die Berührungsebenen an entsprechenden Flächen parallel sind (*Combescuresche Transformation, Ann. de l'Éc. Norm.* (1) **4**, 1867).

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes sind mit seinen krummlinigen Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ in einem konjugierten System durch die Gleichungen

$$(200)\qquad \frac{\partial u}{\partial \varrho_i} = H_i U_i$$

verbunden, in denen H_i den Differentialparameter der Kurve ϱ_i und U_i ihre Richtungskosinus X_i, Y_i, Z_i bedeuten. Diese Größen hängen durch die Gleichungen

$$\frac{\partial U_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} U_k \qquad (i, k = 1, 2, 3 \tag{201}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_i} = \beta_{ki} H_k \qquad i \neq k \tag{202}$$

miteinander zusammen, deren Koeffizienten β_{ik} den sechs Bedingungen:

$$\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_i} = \beta_{il}\beta_{lk} \tag{203}$$

zu genügen haben.

Alle parallel zugeordneten Systeme haben dieselben β_{ik} und U_i; man hat also zur Bestimmung aller Parallelsysteme eines gegebenen nur die Größen H_i aus den Gleichungen (202) zu finden und die Quadraturen

$$dx_1 = H_1 X_1 d\varrho_1 + H_2 X_2 d\varrho_2 + H_3 X_3 d\varrho_3 \tag{204}$$

zu lösen. Weitere Transformationen, die aus einem gegebenen neue dreifach konjugierte Systeme herzuleiten gestatten, sind:

Die Komplementärtransformation (Darboux, *Syst. orth.* 368, Tzitzéica, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **16**, 1899); hier stehen entsprechende Koordinatenlinien und -flächen aufeinander senkrecht;

Die Laplacesche Transformation; sie entspricht der Laplaceschen Transformation der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und entsteht geometrisch folgendermaßen: konstruiert man auf der Fläche $\varrho_l =$ konst. die Tangenten an die Kurven $\varrho_k =$ konst., so bilden diese eine Linienkongruenz, deren zweite Brennfläche

$$x_1 = x - \frac{H_k}{\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}} \frac{\partial x}{\partial \varrho_i}, \ldots$$

ist. Auf dieser bilden wie auf der Ausgangsfläche die Parameterkurven ϱ_i, ϱ_k ein konjugiertes System. Führt man diese Konstruktion für alle Flächen $\varrho_l =$ konst. aus, so erhält man eine neue Flächenschar $\varrho_l =$ konst., und die Parameterkurven ϱ_i, ϱ_k auf diesen Flächen bilden zwei Scharen von Flächen, die mit der ersten ein konjugiertes System bilden. Beispiele für konjugierte Flächensysteme gibt Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **7**, 1878; Tzitzéica, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **16**, 1899; Bianchi, *Annali di Mat.* (3) **23**, 1914; Carrus, Paris *C. R.* **147**, **148** (1908—09); *J. de l'Éc. Pol.* **13**, 1909).

21. *Dreifach orthogonale Flächensysteme.* Den wichtigsten Fall der krummlinigen Koordinaten bilden die Flächensysteme.

die sich senkrecht durchsetzen. Sie sind durch das Verschwinden der Größen h_{ik} gekennzeichnet, d. h. durch die Gleichungen

$$(205)\quad \frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial y}{\partial \varrho_i}\frac{\partial y}{\partial \varrho_k} + \frac{\partial z}{\partial \varrho_i}\frac{\partial z}{\partial \varrho_k} \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{pmatrix}.$$

Den Ausgangspunkt ihrer Theorie bilden die Untersuchungen Dupins (*Développements de géométrie,* Paris 1813), die in dem Satze gipfeln:

Die Parameterflächen eines dreifach orthogonalen Systems schneiden sich gegenseitig in Krümmungslinien, oder in der von Darboux (*Ann. de l'Éc. Norm.* (1) **3**, 1866) gegebenen weiteren Fassung:

Werden zwei orthogonale Flächenscharen von einer dritten Flächenschar senkrecht geschnitten, so schneidet jede Fläche der ersten Schar jede Fläche der zweiten in Krümmungslinien.

Alle Orthogonalsysteme gehören demnach zu den dreifach konjugierten Systemen; sie können daher durch Auflösung der Gleichungen (200)—(203) der vorigen Nummer gefunden werden, wenn die β_{ik} noch den Orthogonalitätsbedingungen

$$(206)\qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_k} + \beta_{li}\beta_{lk} \quad 0$$

genügen. Die H_i und β_{ik} haben eine einfache kinematische Bedeutung; sie sind die drei Schiebungs- und die sechs nicht verschwindenden Drehungskomponenten der von drei Parametern abhängigen Bewegung, die ein rechtwinkliges Dreikant in alle Lagen des von den Normalen an die Parameterflächen gebildeten Dreikants überführt (Beltrami, *Rend. Ist. Lomb.* (2) **5**, 1872; Darboux, *Systèmes orthogonaux*, p. 188).

Die Darbouxschen Gleichungen (203) und (206) sind inhaltlich gleichwertig mit den sechs Laméschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zwischen den Differentialparametern H_i bestehen (Lamé, *Coordonnées curvilignes*, Paris 1859); in ihrer Lösung liegt die Hauptschwierigkeit des Problems.

Anstatt durch die Lamé-Darbouxschen Gleichungen die sechs nicht verschwindenden Drehungskomponenten zu bestimmen, kann man auch die Bedingungen dafür aufstellen, daß bei dieser Bewegung des Normalendreikants immer die übrigen drei Drehungskomponenten verschwinden müssen. Man erhält so für das Problem drei Differentialgleichungen, die sich auf eine Gleichung dritter Ordnung

$$(207)\qquad \frac{\partial^3 \mu}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2 \partial \varrho_3} + \operatorname{tg} \mu \frac{\partial \mu}{\partial \varrho_2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho_3 \partial \varrho_1} - \operatorname{ctg} \mu \frac{\partial \mu}{\partial \varrho_1} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = 0$$

reduzieren lassen (Bonnet, *C. R.* **54**, 1862; Darboux, *Systèmes orthogonaux*, p. 406). Nach der Auflösung der Gleichung (207) ergibt sich das sphärische Bild $X_i Y_i Z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ durch die Lösung eines Systems von drei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Während auf einer Fläche eine beliebige Kurvenschar und ihre Orthogonaltrajektorien ein rechtwinkliges Koordinatensystem bilden kann, *ist es nicht möglich, eine beliebige Flächenschar durch zwei Scharen von Orthogonalflächen zu einem dreifach orthogonalen System zu ergänzen.* Die Bestimmung einer *Laméschen Flächenschar*, d. h. einer Schar von Flächen, die einem dreifach orthogonalen System angehören kann, führt ebenfalls auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung (Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (1) **3**, 1866; *C. R.* **76**, 1873; Cayley, *C. R.* **75**, 1872).

Bei der Allgemeinheit der Aufgabe ist es aussichtslos, die allgemeine Lösung zu suchen; es kann sich daher nur darum handeln, Partikularlösungen aufzufinden und aus diesen durch geeignete Transformationen neue Lösungen zu bestimmen. Es ist offenbar, daß *jede konforme Punkttransformation des Raumes dreifach orthogonale Systeme in ebensolche verwandelt.* Indessen sind diese Transformationen in ihrer Wirkung beschränkt, da sie durch die *Inversionen*

$$(208)\qquad x_1 = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z_1 = \frac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

erschöpft sind. (Liouville, *J. de Math.* (1) **12**, 1847; Note VI zur 5. Aufl. von Monges Application de l'anal. à la géom.) Diese bilden die Gruppe der Kugelgeometrie, und es ergibt sich daraus:

Die Bestimmung der dreifach orthogonalen Flächensysteme im Raume ist ein Problem der Kugelgeometrie.

Von diesem Standpunkte aus erscheint die Behandlung der Aufgabe durch Liesche Fünfkugelkoordinaten als naturgemäß (Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **7**, 1878; Guichard, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **20**, 1903; Demoulin, *C. R.* **140**, **141**, 1905, **148**, **150**, **151**, 1909—10).

Weiter tragend ist die für allgemeine konjugierte Systeme anwendbare Combescuresche *Paralleltransformation* (Nr. 20); sie erfordert die Bestimmung von H_1 als Partikularlösung eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \frac{\beta_{23}\beta_{31}}{\beta_{21}} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} + \frac{\beta_{32}\beta_{21}}{\beta_{31}} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}$$

(209)

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_k} = \frac{1}{\beta_{k1}} \frac{\partial \beta_{k1}}{\partial \varrho_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_k} + \beta_{k1}\beta_{1k} H_1 \qquad (k = 2, 3),$$

während H_2 und H_3 sich daraus durch einfache Differentiationen ergeben:

(210)
$$H_2 = \frac{1}{\beta_{21}} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}, \qquad H_3 = \frac{1}{\beta_{31}} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_1}.$$

Die Ausdrücke der Koordinaten ergeben sich dann durch die Quadraturen (204).

Eine andere Anordnung des Verfahrens ist von Darboux (*Th. des surf.* IV, p. 288) angegeben worden.

22. *Besondere dreifach orthogonale Systeme.* Die einfachsten dreifach orthogonalen Systeme sind die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, die Polar- und Zylinderkoordinaten sowie die aus ihnen durch Inversion hervorgehenden Flächensysteme.

Jede Schar von ∞^1 Ebenen oder Kugeln gehört zu unendlich vielen Orthogonalsystemen; die Ergänzungsscharen werden erhalten, indem man auf einer Ebene oder Kugel der Schar ein orthogonales Kurvensystem konstruiert und die Flächen bestimmt, die von den Orthogonaltrajektorien der Ebenen- oder Kugelschar längs der Kurven des gewählten Netzes gebildet sind (Enneper, *Math. Ann.* **7**, 1873; Ribaucour, *C. R.* **75**, 1872; Darboux, *Systèmes orthogonaux*, p. 26—35).

Jede Schar von Parallelflächen bildet mit den beiden Scharen von abwickelbaren Flächen ihrer Normalenkongruenz ein dreifach orthogonales System.

Weitere bemerkenswerte Orthogonalsysteme sind:

a) *Die konfokalen Flächen zweiter Ordnung*

(211)
$$\frac{x^2}{a^2 - \varrho_i} + \frac{y^2}{b^2 - \varrho_i} + \frac{z^2}{c^2 - \varrho_i} = 1$$
$$-\infty < \varrho_1 < c^2 < \varrho_2 < b^2 < \varrho_3 < a^2;$$

(Binet, *J. de l'Éc. Pol.* (9), cah. **16**, 1813; Dupin, *Développements de géométrie*, Paris 1813), sie bilden die von Lamé (*J. de Math.* (1) **2**, 1837; *Leçons sur les coordonnées curvilignes,* Paris 1859 und Jacobi (*J. f. Math.* **19**, 1839) zuerst angewandten „*elliptischen Koordinaten*".

b) *Die zyklidischen Koordinaten* (Darboux, *C. R.* **59**, 1864; Moutard, ebenda); sie bestehen aus konfokalen Zykliden, die in Lieschen Fünfkugelkoordinaten durch die Gleichungen

$$(212)\qquad \sum_1^5 \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0, \qquad \sum_1^5 x_i^2$$

dargestellt werden (F. Klein, *Math. Ann.* **5**, 1872; ausführliche Diskussion auch der Sonder- und Grenzfälle bei Bôcher, *Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*, Leipzig 1894).

c) *Die isothermen Orthogonalsysteme.* Ein krummliniges Koordinatensystem heißt isotherm, wenn sich in einem homogenen Medium ein stationärer Wärmezustand einstellen kann, in dem eine Schar von Koordinatenflächen die Flächen konstanter Temperatur werden. Die reellen Isothermsysteme sind durch die folgende Reihe erschöpft:

1. Eine Schar von Parallelebenen, die von zwei dazu senkrechten Scharen von isothermen Zylindern geschnitten werden.
2. Eine Schar konzentrischer Kugeln und zwei Scharen isothermer konzentrischer Kegel.
3. Die Scharen konfokaler Rotationsflächen zweiter Ordnung und ihre Meridianebenen.
4. Die konfokalen Flächen zweiter Ordnung. (Lamé, *J. de Math.* (1) **8**, 1843; Bonnet, *J. de l'Éc. Pol.* cah. **30**, 1845.)

Die allgemeine Frage nach den Orthogonalsystemen, die aus lauter Isothermflächen (Nr. 17, 6) bestehen, hat Darboux (*Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **7**, 1878) erledigt.

d) *Die zyklischen Systeme Ribaucours.* Die Kreise der normalen Kreiskongruenzen (Kap. 41, Nr. 40) lassen sich in zwei Scharen von einander senkrecht schneidenden Flächen anordnen, die von den Orthogonalflächen der Kongruenz zu einem dreifach orthogonalen System ergänzt werden. Solche Systeme werden als *zyklische Systeme* bezeichnet.

Konstruiert man zu einer Fläche F eines beliebigen Orthogonalsystems O die Krümmungskreise der Orthogonaltrajektorien, so bilden diese eine Kreiskongruenz, dieser entspricht das längs der Fläche F *berührende zyklische System von* O.

Die zyklischen Systeme, die der Bianchischen Komplementärtransformation der pseudosphärischen Flächen entsprechen (Nr. 12), enthalten eine Schar von isometrischen pseudosphärischen Flächen.

Die entsprechenden normalen Kreiskongruenzen bestehen aus kongruenten Kreisen.

e) *Die Bianchischen Systeme.* Die Orthogonalsysteme, die eine Schar von pseudosphärischen Flächen enthalten, sind von Bianchi (*Annali di Mat.* (2) **3**, **14**, 1885—86, *Vorlesungen*, p. 679)

untersucht worden; sie sind bestimmt durch die simultanen Lösungen der Gleichung (207) und

$$(213) \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial \varrho_2^2} \qquad \frac{\sin \mu \cos \mu}{R(\varrho_3)},$$

in der $-\frac{1}{R^2}$ das konstante Krümmungsmaß der Flächenschar $\varrho_3 =$ konst. bedeutet. Sie enthalten als Untergruppe die Systeme, bei denen $R =$ konst. ist (*Weingartensche Systeme*); für diese reduziert sich (207) auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Bianchischen Systeme lassen, wie die einzelnen pseudosphärischen Flächen, die Bäcklundsche Transformation zu.

f) Aus kinematischen Fragestellungen heraus ergeben sich die Orthogonalsysteme mit einer Schar kongruenter Flächen (Darboux, *Ann. de l'Éc. Norm.* (2) **7**, 1878; L. Lévy, *J. de Math.* (4) **8**, 1892; *Mém. cour. et mém. des sav. étr. de l'Ac. de Belgique* **54**, 1896; Haag, *Ann. de l'Éc. Norm.* (3) **27**, 1910), die *E-Systeme*, bei denen die sphärischen Bilder der Flächen einer Schar zusammenfallen (Egorov, *C. R.* **131**, 1900, **131**, 1901; Demoulin, *C. R.* **136**, 1903; Darboux, *Syst. orth.* p. 429) und die Guichardschen Systeme (*Systèmes triple-orthogonaux*, Paris 1905).

Eine zusammenfassende Darstellung der bisherigen Ergebnisse geben die oft genannten *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2. Aufl., Paris 1910) von G. Darboux, zu deren Ergänzung aber auch die *Théorie des surfaces* desselben Verfassers heranzuziehen ist. Auch die Vorlesungen von Bianchi und die Monographie von C. Guichard (*Sur les systèmes triple-orthogonaux,* Paris 1905) geben eine ausführliche Darstellung einzelner Sonderprobleme. Zu nennen ist auch das klassische Werk von Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Paris 1859, das ein namentlich für physikalische Anwendungen bestimmtes reiches Formelmaterial liefert.

Literatur.

Der kurze Überblick, der auf den voraufgehenden Seiten zu geben versucht wurde, zeigt, daß „die Differentialgeometrie noch in ihren Anfängen steckt" (Knoblauch, *Grundlagen, Vorwort*). Das Hauptinteresse der Geometrie ist der Fülle der Einzelformen und dem Entwirren der geheimnisvoll hin und wieder spielenden Verbindungsfäden zugewandt, so daß eine stetig anwachsende Zahl von Einzeltatsachen den Überblick über das Ganze je länger je mehr erschwert. Dabei ist angesichts der Schwierigkeit der

ersten Orientierung in einem weiten Gebiet zunächst die Sorge um die Tragweite der einzelnen Ergebnisse vielfach zurückgetreten, die ausschließliche Betrachtung des „allgemeinen Falles" läßt die notwendige Umgrenzung der Singularitäten vernachlässigen. Man hat in diesem Sinne geradezu von einem Raubbau reden können, der die heutige geometrische Forschung charakterisiert (Study, Rezension von Bianchis „Vorlesungen", *Arch. Math. Phys.* (3) **18**, 1911). Selbst die systematische Gliederung des Stoffes nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten ist kaum angebahnt; die Untersuchung benutzt, soweit sie sich nicht auf rein geometrische Anschauung stützt, fast durchweg kartesische Koordinaten, auch wo es sich um Probleme der affinen, projektiven oder konformen Geometrie handelt, und führt andere Koordinaten höchstens gelegentlich als bequemeres Rechenhilfsmittel, nicht aber als das dem im Frage stehenden Problem allein konforme analytische Gewand ein. Neuerdings ist eine systematische Behandlung der *projektiven Differentialgeometrie* von Wilczynski (*Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig 1906, *Project. diff. geometry of curved surfaces, Amer. Math. Soc. Trans.* **8—10**, 1907—1909, *Théorie génér. des congruences*, *Belg. Mém.* (2) **3**, 1910) und seiner Schule sowie von Fubini (*Palermo Rend.* **43**, 1919 mit weiteren Literaturangaben) in Angriff genommen; auch die *affine Differentialgeometrie* ist, durch W. Blaschke (*Leipz. Ber.* 1916—1918) angeregt, weiter ausgebaut worden. Letzterer hat auch die bis dahin lange vernachlässigten Probleme der „Differentialgeometrie im Großen" (vgl. *Kreis und Kugel,* Leipzig 1915) wesentlich gefördert. Indessen liegen hier, ebenso wie in den der Revision der Grundlagen gewidmeten Arbeiten von Study (*Amer. J.* **32**, 1910, *Leipz. Ber.* **63**, 1911) erst Ansätze einer Entwickelung vor, die in der Literatur des Gesamtgebietes noch vereinzelt dastehen. In dieser sind es, soweit überhaupt auf eine gewisse systematische Anordnung des Ganzen Bedacht genommen wird, im wesentlichen zwei verschiedene Prinzipien, nach denen der Gesamtstoff geordnet wird. Auf der einen Seite geht man, den Traditionen der Mongeschen Schule folgend, von kinematischen Gesichtspunkten aus; dadurch gelingt es, auch bei weitgehender Verwickelung der analytischen Prozesse stets den Anschluß an die geometrische Anschauung zu bewahren. Ihre klassische Darstellung hat diese Forschungsrichtung in der vierbändigen *Théorie des surfaces* von G. Darboux (Paris 1887—1896) erfahren, auch R. v. Lilienthal (*Vorl. üb. Differentialgeom.*, 2 Bd., Leipzig 1908—1913) bevorzugt kinematische Vorstellungen. Das analytische

Rüstzeug von E. Study (*Geom. d. Dynamen*, Leipzig 1903, *Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges.* **12**, 1912) ist für flächentheoretische Probleme bisher kaum nutzbar gemacht worden.

Andererseits geht man im Anschluß an Gauß und Riemann (Habilitationsvortrag) von der Theorie der quadratischen Differentialformen aus, die, von Christoffel (s. Nr. **10** des Kap. **41**) entwickelt, durch die neuesten physikalischen Vorstellungen (Einsteins allgemeine Relativitätstheorie) an allgemeiner Bedeutung erheblich gewonnen hat. Sie ist durch die Arbeiten von Ricci (*Lezioni s. teor. d. superf.*, Verona-Padova 1898, *Math. Ann.* **54**, 1901), Hessenberg (*Acta Math.* **23**, 1899, *Math. Ann.* **78**, 1917), Levi-Civita (*Palermo Rend.* **42**, 1917) und Weyl (*Math. Zs.* **2**, 1918, *Raum, Zeit, Materie*, 3. Aufl., Berlin 1919) wesentlich gefördert worden. Das grundlegende Lehrbuch ist hier L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 2. Aufl., 3 Bde., Pisa 1902—1909, deutsch Leipzig 1910). Systematisch wird die Flächentheorie als Invariantentheorie eines Paares binärer quadratischer Differentialformen von J. Knoblauch, *Grundlagen der Differentialgeometrie*, Leipzig 1913, aufgefaßt, doch schlägt die vom Verf. entwickelte Methode der geometrischen Ableitungen wieder eine Brücke zur Kinematik.

Neben diesen größeren Handbüchern, denen als alles umfassende Materialsammlung die *Enzyklop. der math. Wiss.* Bd. III angefügt sei, ist eine Anzahl von Lehrbüchern zu nennen, die den Anfänger in die Theorie einführen und zum Verständnis der Originalarbeiten anleiten wollen:

F. Joachimsthal, *Anw. der Diffentialrechn. auf die allg. Theorie der Flächen,* 3. Aufl. Leipzig 1890.

J. Knoblauch, *Einleitung in die Theorie der Flächen*, Leipzig 1888.

G. Scheffers, *Theorie der Flächen*, Leipzig 1913 (*Anwendungen der Differential- und Integralrechnung* Bd. II).

V. u. K. Kommerell, *Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen*, 3 Bde., Leipzig 1909—1911 (Sammlung Schubert Bd. 29, 44, 62).

Demartres, *Cours de géométrie infinitésimale,* Paris 1913.

Vessiot, *Leçons de géométrie supérieure,* Lyon 1906.

Eisenhart, *Differential Geometry*, Boston 1909.

Nicht als Lehrbuch, sondern zur Orientierung über die Gesamtheit der Probleme gedacht sind die höchst anregenden autographierten Vorlesungshefte von

F. Klein, *Höhere Geometrie*, 2 Bde., Leipzig 1892/94.

G

H

M

T

U

W

Z

Berichtigungen und Zusätze.

Erste Hälfte. S. IX, Zeile 4 v. u. lies „Summe oder Differenz" statt „Summe 0 der Differenz".

S. 6, Zeile 6 v. o. füge hinzu nach „enthält also" „u. a.".

S. 8, Zeile 14 v. o. lies „der Verlängerung der Strecke FG" statt „der Geraden FG".

Zeile 10 v. o. lies: „Es wird nun die Verlängerung von GF ebenso wie" statt „Es werden nun".

Zeile 24 v. o. füge hinzu nach „zweier" „markierten Strecken der".

S. 9, Zeile 16 v. o. füge hinzu nach „Fläche BCD" „einander".

S. 11, Zeile 3 v. u. lies „beiden entgegengesetzten" statt „letzteren beiden" und ergänze nach „zwei andern" „Halbstrahlen des Umlaufsinnes".

S. 13, Zeile 9 und 4 v. u. lies „h'" statt „a'".

S. 14, Zeile 14 v. o. lies „*Rev. de Math.*" statt „*Riv. di Math.*".

S. 17, Zeile 5 v. o. lies „bringen hier Hilberts" statt „bringen hier die".

Zeile 6 v. o. lies „*Berl. Sitzungsber.*" statt „*Sitzungsber. der Berl. Math. Ges.*".

S. 64 unten ergänze: „Zweiter Band im Erscheinen. Vgl. auch L. Heffter, *Die Grundlagen der Geometrie als Unterbau für die analytische Geometrie*, Leipzig u. Berlin 1921.

S. 202, Zeile 6 v. u. Der eingeklammerte Satz ist durch folgende Bemerkung zu ersetzen: „Die Fadenkonstruktion der Ellipse findet man in der Literatur zuerst im 6. Jahrh. n. Chr. und zwar bei Anthemius, vgl. T. L. Heath, *Bibl. math.* (3) 7, 227 (1906, 07)."

S. 206, Zeile 11—9 v. u. sind zu ersetzen durch: „wo das obere oder untere Vorzeichen zu stehen hat, je nachdem die von F nach dem nächsten Scheitel des Kegelschnitts sich erstreckende Richtung zu $\vartheta = \pi$ oder zu $\vartheta = 0$ gehört."

Zeile 4 v. u. lies „Y-Achse" statt „y-Achse".

S. 207, Zeile 16 v. u. nach „Radius r" ist einzuschalten „$\geqq \frac{1}{2} m$".

S. 215, Zeile 19 v. o. füge hinzu: „Pasch, *Monatsh. Math. Phys.* **29**, 277 (1918)".

S. 246, Zeile 5 v. u. füge nach „Diskriminanten" ein: „(Determinanten)."

S. 259, Zeile 10 v. o. lies „Seiten" statt „Seietn".

S. 346, Zeile 23 v. o. lies „**51**" statt „**50**".

S. 352, Zeile 2 v. u. lies „235" statt „285".

S. 353, Zeile 4 v. o. lies „199" statt „**119**".

S. 362, Zeile 2 v. o. lies „206 (1873)" statt „223 (1875)".

S. 363, Zeile 19 v. o. lies „346" statt „336".

S. 372, Zeile 7 v. o. lies „**51**" statt „**50**".

S. 409, Zeile 16 v. o. lies „azygetisch" statt „ayzygetisch".

S. 414, Zeile 4 v. u. lies „Doppeltangenten" statt „Doppelpunkte".

S. 445, Zeile 19 v. o. lies „1715" statt „1815."

S. 462, Zeile 16 v. u. nach (1871) füge hinzu „E. Czuber, *Ztschr. Math. Phys.* **32**, 257 (1887)".

S. 497, Z. 11 v. o. lies „nicht senkrecht, so ist z. B." statt „senkrecht, doch ist z. B."

S. 508, Zeile 15 v. o. lies „allgemeinen" statt „allgemeine".

S. 512, Zeile 12 v. o. lies „$\frac{1}{2}\log(xx'\xi\xi')$" statt „$\frac{1}{2}(xx'\xi\xi')$".
Zeile 15 v. o. lies „einen" statt „rechten".
Zeile 16 v. o. lies „anderen" statt „linken".

S. 513, Zeile 3, 5, 7 v. o. lies „$2\varkappa'$" statt $2k'$".

S. 522, Zeile 16 v. u. lies „in dieser" statt „in diesen".

S. 528 Zeile 9 u. 8 v. u. lies „Geraden o" statt „Geraden".

S. 532, Zeile 8 v. u. lies „AA_2, BB_2, CC_2" statt „AA_1, BB_1, OC_1".

S. 631, Zeile 7 v. u. lies „λ_1" statt „λ_2".

S. 633, nach Zeile 11 füge hinzu: „O. Staude, *Anal. Geom. der kubischen Kegelschnitte,* Leipzig 1913".

S. 648, Zeile 6 v. u. lies „4. Ordnung" statt „2. Ordnung".

S. 671, Zeile 1 v. u. lies „1887" statt „1886".

S. 700, Zeile 29 v. o. streiche „521".

S. 721, Zeile 2 v. u. lies „Comessatti" statt „Commessatti".

S. 722, Zeile 17, 24 v. u. desgl.

S. 743, Zeile 12 v. o. füge hinzu: „Noether, *Berliner Sitzungsber.* 1888, S. 123, hat zuerst betont, daß jede Fläche F einer F' mit gewöhnlichen Singularitäten birational äquivalent ist."

S. 743, Zeile 15 v. u. füge hinzu: „Die erste Entdeckung der *ausgezeichneten Kurven* ist Noether, *Theorie* II, S. 521 zu verdanken".

S. 745 nach Zeile 21 v. o. füge hinzu: „Über den Satz, daß der veränderliche Teil der allgemeinen Kurve eines reduziblen

linearen Systems auf einer Fläche immer aus den Kurven eines Büschels besteht, s. Noether, *Math. Annalen* **3**, 171 (1870), *Theorie* II, S. 524."

S. 745, Zeile 5 v. u. füge hinzu: „Eine Fläche kann nicht unendlich viele irrationale Büschel vom Geschlecht $p > 1$ enthalten. Vgl. De Franchis, *Rend. Circ. M.* **36**, 276 (1913). Tatsächliche Beispiele von Flächen mit unendlich vielen elliptischen Büscheln wurden von Comessatti, *Rend. Circ. M.* **31**, 321 (1911) und Zorelli, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5), **21**, 453 (1912) angegeben."

S. 763 nach Zeile 10 v. u. füge hinzu:

„6. Die Moduln einer Klasse von algebraischen Flächen.

Eine Klasse (§ 1, Nr. 1) von algebraischen Flächen hängt von einer endlichen Anzahl veränderlicher Parameter ab, wenn man zwei birational äquivalente Flächen als identisch ansieht. Diese Parameter heißen die *Moduln* der Klasse. Wenn die Fläche F regulär ist ($p = p_g = p_a$) und die Postulationsformeln vollständig gültig sind, dann ist

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12$$

die Anzahl der Moduln der Klasse, welcher F angehört, wo $p^{(1)}$ das Kurvengeschlecht (§ 3, Nr. 3) der Fläche bezeichnet. Vgl. Noether, *Berliner Sitzungsber.* 1888, S. 123. Allgemeiner hat Enriques, *Rom. Acc. Linc. Rend.* (5), **17**, 690 (1908); *Torino Atti* **47** (1912) bewiesen, daß

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

wird, wo θ eine neue Invariante der Fläche ist. Für die regulären Flächen vom Geschlecht $p (= p_g = p_a) > 3$ mit irreduzibelm kanonischen System ist $\theta \geqq p$."

S. 770, Zeile 18 v. o. füge hinzu: „Castelnuovo-Enriques, *Ann. éc. norm.* (3) **12**, 342 (1906) haben bewiesen, daß *die* $\frac{1}{2}q(q+1)$ *Normalperioden der einfachen Integrale erster Art der Flächen von der Irregularität* q *keine Gleichung zu erfüllen brauchen.* Für Abelsche Integrale erster Art gilt bekanntlich keine analoge Eigenschaft."

S. 806, Zeile 10 v. o. lies „176" statt „175".

S. 810, Z. 8 v. o. ist nach „sind" die Klammer zu schließen.

S. 825, Zeile 11 v. o lies „XXI" statt „XI".

S. 993, Zeile 6 v. u. lies „$4\Omega(p)$" statt „$\Omega(p)$".

S. 1005, Zeile 9 v. o. lies „und 1. Klasse" statt „und Klasse".

S. 1025, Z. 4 v. o. füge hinzu: „Wenn in der Spalte „Doppelgerade des Komplexes" auf frühere Nummern verwiesen ist, so bedeutet dies, daß die Anordnung der Doppelgeraden als Sonder-

fall der entsprechenden früheren Anordnung aufgefaßt werden kann. Dies schließt ein Zusammenfallen gewisser Doppelgeraden nicht aus. Genaueres hierüber findet man in Sturm, *L. G.* III, S. 355—488 und in den ausführlicheren Angaben der entsprechenden Tafel I der Nr. 35 des Artikels III C, 8 (*Algebr. Liniengeometrie*) der *Enz. d. Math. Wiss.*"

S. 1029, Z. 6 v. u. lies „$k + r$" statt „k".

S. 1037, Zeile 13 v. u. lies „$m - 2$" statt „$n - 2$".

S. 1057, Zeile 2, 3 v. o. sind die Formeln zu ersetzen durch folgende:

$$x = - V' \sin v - V'' \cos v,$$

$$y = - V' \cos v + V'' \sin v.$$

S. 1058, Zeile 12 v. u. lies „$2a\sqrt{1-c^2}$" statt „$2a$".

Zeile 2 v. u. nach „Polarkurve" ist zu ergänzen: „wenn ihre Steigung $\frac{1}{4}\pi$ beträgt".